Данный текст является несколько расширенным переводом статьи [1].

1 Вокруг задачи Архимеда

Задачи, связанные с касанием окружностей, вызывали интерес во все времена. Одним из первых результатов является следующая

Лемма 1 (Архимед). *Окружность α касается хорды MN окружности β в точке B, а окружности β касается в точке A. Тогда AB является биссектрисой угла MAN (рис. 1).*

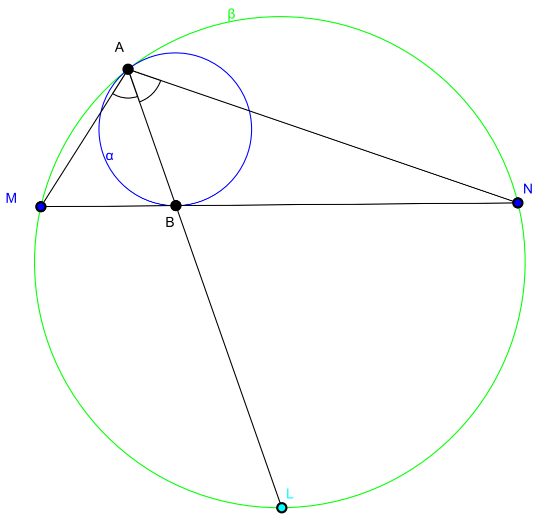

Рис. 1

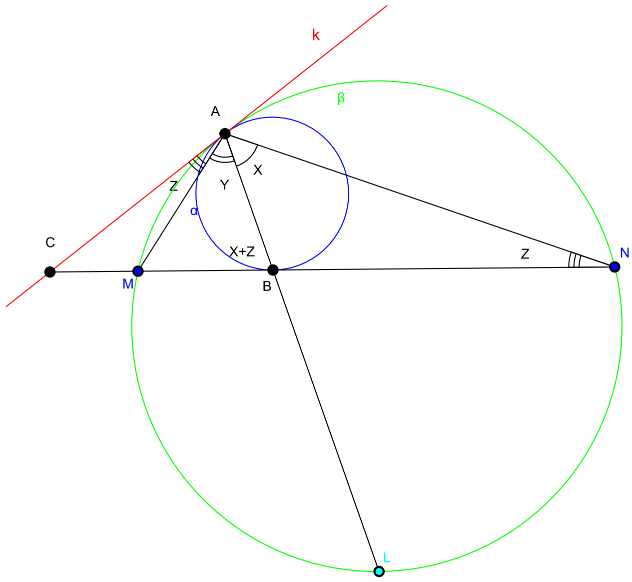

Рис. 2

Доказательство. Обозначим точку пересечения прямой AB и окружности β через L. Проведём через точку A общую касательную к окружностям, обозначим её через k (рис. 2). C – точка пересечения прямых MN и k. Введём обозначения для углов: $\angle NAB = x, \angle BAM = y, \angle MAC = z$. Заметим, что $\angle ANM = \angle CAM = z$(угол между касательной и хордой). По теореме о внешнем угле треугольника найдём, что $\angle MBA = x + z$. Остаётся увидеть, что треугольник CAB равнобедренный с основанием AB, следовательно, $\angle CAB = \angle CBA$, т.е. $z + y = z + x \Rightarrow x = y$. □

Упр. 1. Как «залатать» доказательство, если $MN || k$?
Упр. 2. На хорде MN окружности β отмечана точка B. Постройте окружность α, которая касается хорды MN в точке B и окружности β.
Упр. 3. Докажите, что $ML^2 = LB \cdot LA$ (рис. 2).

Оказывется, что лемма Архимеда даёт нам и критерий касания окружностей. Но для того, чтобы его сформулировать необходимо понятие *перпендикулярных окружностей*. Пусть имеются две окружности α и β, которые пересекаются в точках E и F(рис.3).

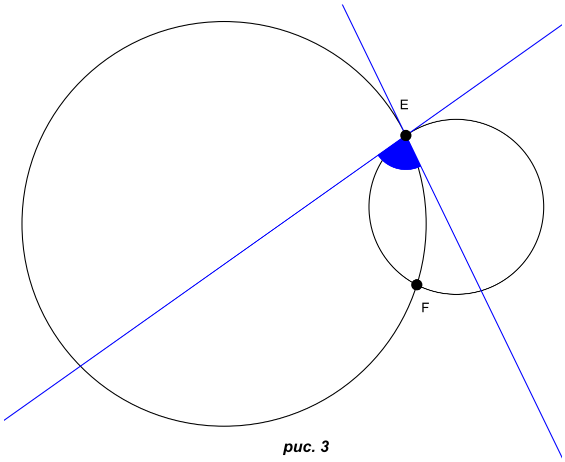

рис. 3

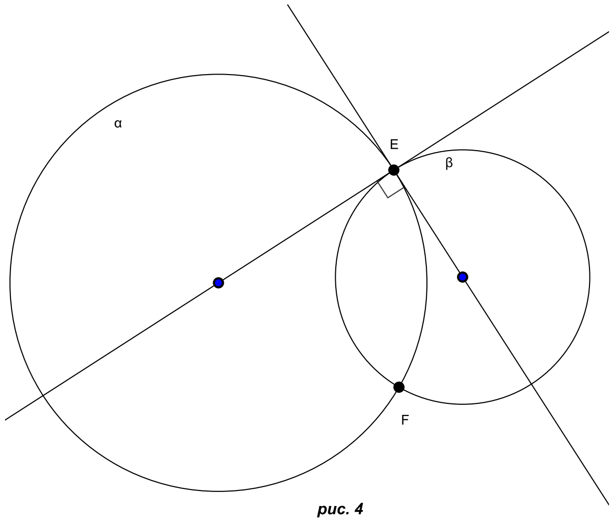

рис. 4

Проведём к окружностям касательные в точке E. Тогда угол между этими касательными и называют углом между окружностями α и β. Если же касательные перпендикулярны друг другу, то такие окружности называют *перпендикулярными*. Пусть окружности α и β, пересекающиеся в точках F и E, перпендикулярны. Тогда касательная, проведённая к окружности α в точке E, проходит через центр окружности β; аналогичное утверждение верно и для касательной, проведённой к окружности β в точке E (рис. 4).

Упр. 4. `Докажите это.`

Вернёмся к лемме Архимеда. Дополним рис. 1 следующим образом: проведём окружность с центром в точке L (L – середина дуги MN, которая не содержит точки A) и радиусом LM. Обозначим эту окружность через γ (рис. 5). Докажем, что окружности α и γ перпендикулярны ($\alpha \perp \gamma$). Обозначим точку пересечения α и γ через K (рис. 6). Из упр. 3 получаем, что $ML^2 = LB \cdot LA$. С другой стороны, $LM = LK$ (радиусы окружности). Следовательно, $LK^2 = LB \cdot LA$, поэтому окружность α касается прямой LK. А раз LK является касательной, то радиус окружности α, проведённый в точку K, будет перпендикулярен радиусу LK окружности γ. Откуда и следует перпендикулярность окружностей α и γ. $\square$

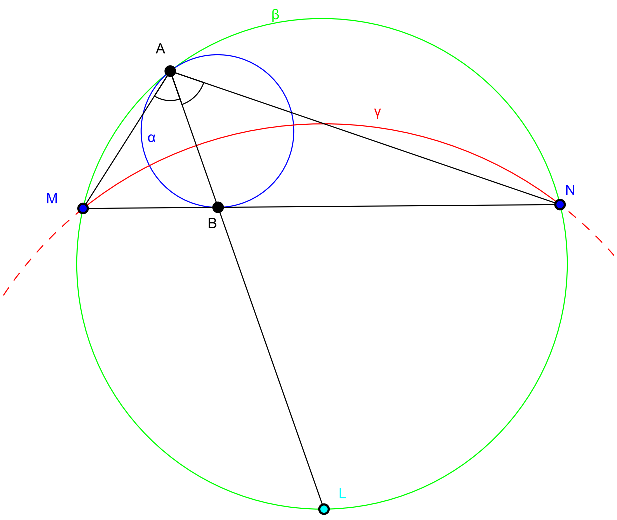

Рис. 5

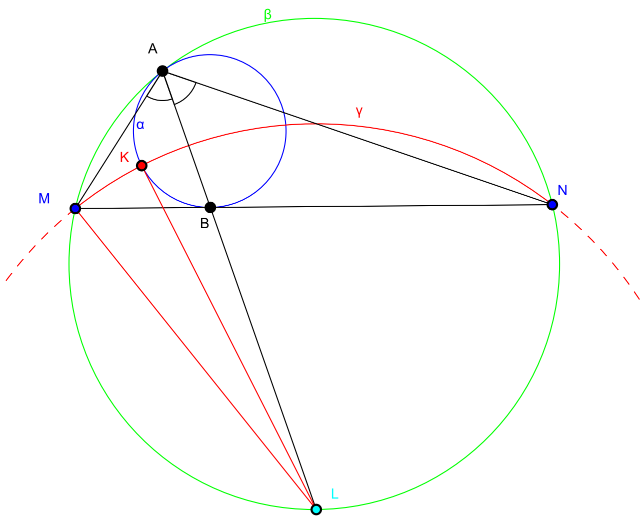

Рис. 6

Для дальнейшего нам понадобится следующая простая

Лемма 2. *Окружности α и β пересекаются в точках E и F. Окружность ω с центром на прямой EF перпендикулярна окружности α. Докажите, что окружность ω перпендикулярна и окружности β (рис. 7).*

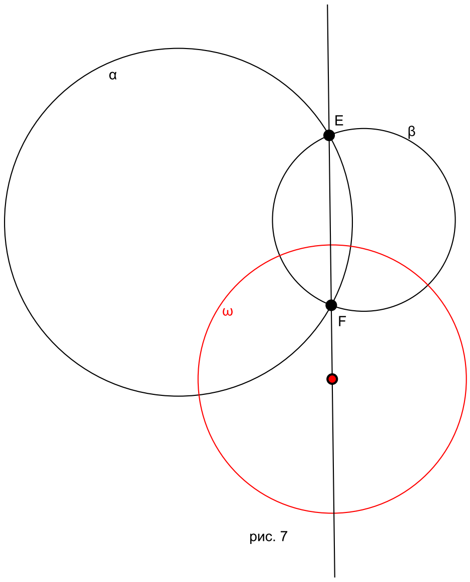

рис. 7

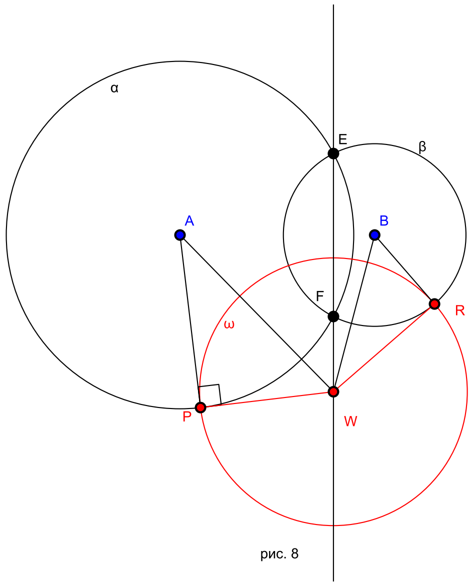

рис. 8

Для доказательства этой леммы пролезно вспомнить(узнать) такое утверждение.

Упр. 5. Пусть окружности α (A - центр, R_a - радиус) и β (B - центр, R_b - радиус) пересекаются в точках E и F. Тогда для любой точки W, лежащей на прямой EF:

$$WA^2 - R_a^2 = WB^2 - R_b^2.$$

Докажите также, что все точки с таким свойством лежат на прямой EF.

Перейдём теперь к доказательству леммы (рис. 8). Из условия леммы следует, что $WP \perp PA$(P – точка пересечения окружностей α и ω), т. к. окружности α и ω перпендикулярны. Из прямоугольного треугольника APW находим:

$$PW^2 = WA^2 - AP^2.$$

С другой стороны, из упр. 5 следует, что

$$WA^2 - AP^2 = WB^2 - BR^2.$$

Но $WP = WR$ равны, ибо радиусы одной окружности. Следовательно,

$$WR^2 = WB^2 - BR^2,$$

поэтому треугольник BRW является прямоугольным. Отсюда заключаем, что $BR \perp WR$. Откуда следует, что окружности β и ω перпендикулярны. $\square$

Упр. 6. Окружность ω перпендикулярна каждой из двух пересекающихся(в точках E и F) окружностей α и β. Докажите, что центр окружности ω лежит на прямой EF.

Теперь мы можем сформулировать

Лемма 3 (критерий Архимеда). *Пусть окружность α касается хорды MN окружности β в точке B, а также окружность α перпендикулярна окружности γ. Тогда окружность α касается окружности β (рис. 9).*

Доказательство. Предположим, что окружность α не касается окружности β. Построим тогда окружность α', которая касается окружности β, а также касается хорды MN в точке B (см. упр.2) (рис. 9). Обозначим через A точку касания окружности β и окружности α', а через Q – точку пересечения окружностей α и α', отличную от B.

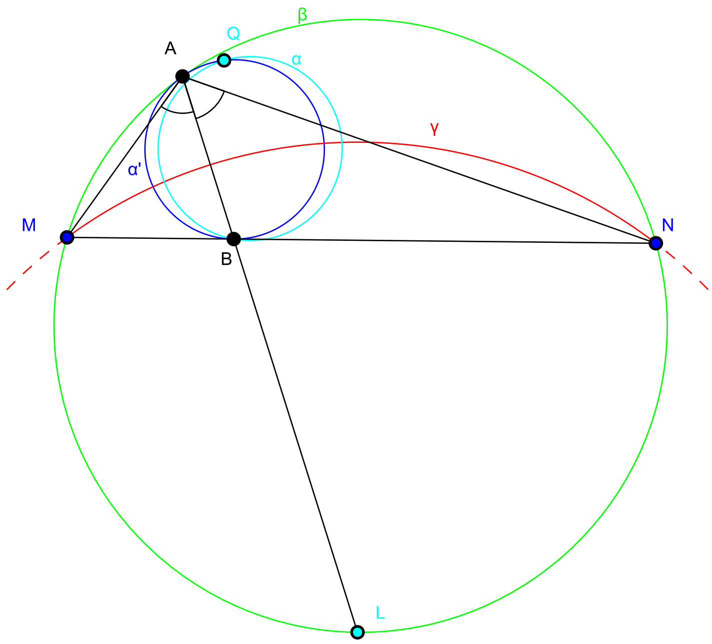

Рис. 9

Мы уже знаем, что окружность γ перпендикулярна окружности α' (см. рассуждение выше). С другой стороны, по условию окружности γ и α также перпендикуляры. Получаем, что окружность γ перпендикулярна каждой из окружностей α и α'. Следовательно, по упр. 6 получим, что центр окружности γ (точка L) обязан лежать на прямой QB. Но по лемме Архимеда точка A лежит на прямой BL. Получаем, что точки A и Q совпадают, откуда и следует увержение леммы. $\square$

2 Шестая окружность

Ежегодно на математических олимпиадах предлагаются задачи, в которых требуется установить, что какие-то четыре точки лежат на одной окружности. Сейчас мы рассмотрим одну такую.

Лемма 4 (о шестой окружности)**.** *Через вершины A и B, B и C, C и D, D и A провели по одной окружности. A_1, B_1, C_1, D_1 – точки пересечения этих окружностей (рис. 10). Докажите, что точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат на одной окружности.*

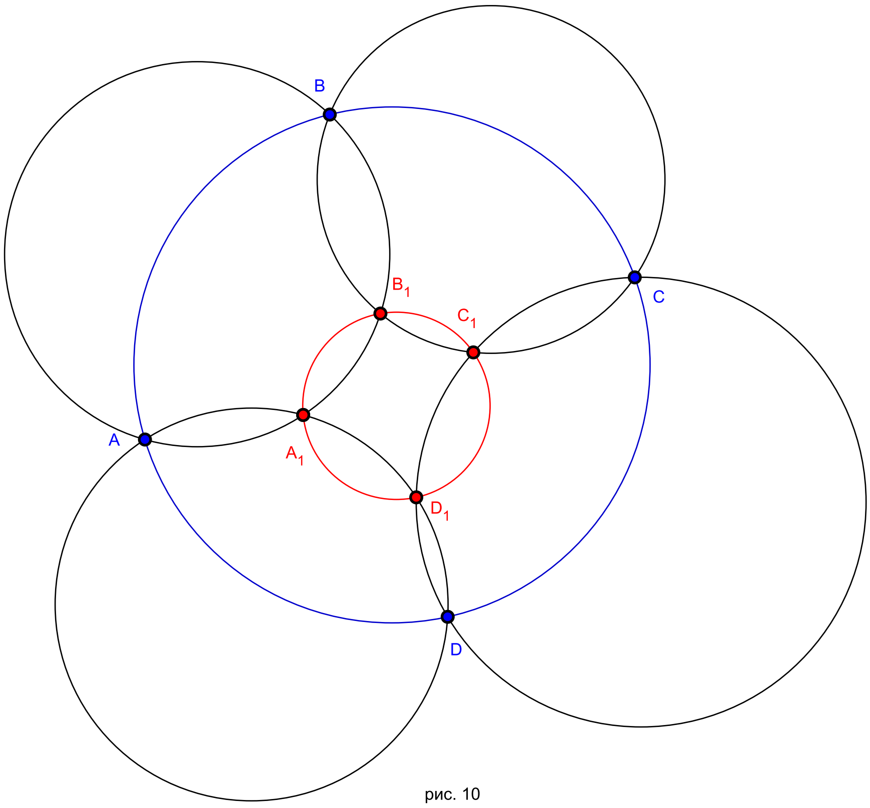

рис. 10

Упр. 7. `Докажите лемму.`

На первый взгляд кажется, что это утверждение особенно не отличается от огромного количества похожих задач на «вписанный угол». Но для нас будет весьма полезно следующее

`Следствие.` $ABCD$ – вписанный четырёхугольник. A_1 – основание перпендикуляра, опущенного из вершины A на диагональ BD; аналогично определяются точки B_1, C_1, D_1. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат на одной окружности(рис. 11).

Доказательство вытекает из леммы о шестой окружности и рис. 12.

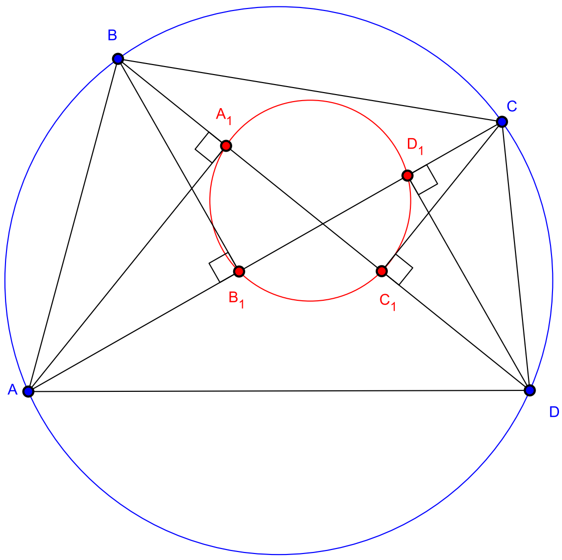

рис. 11

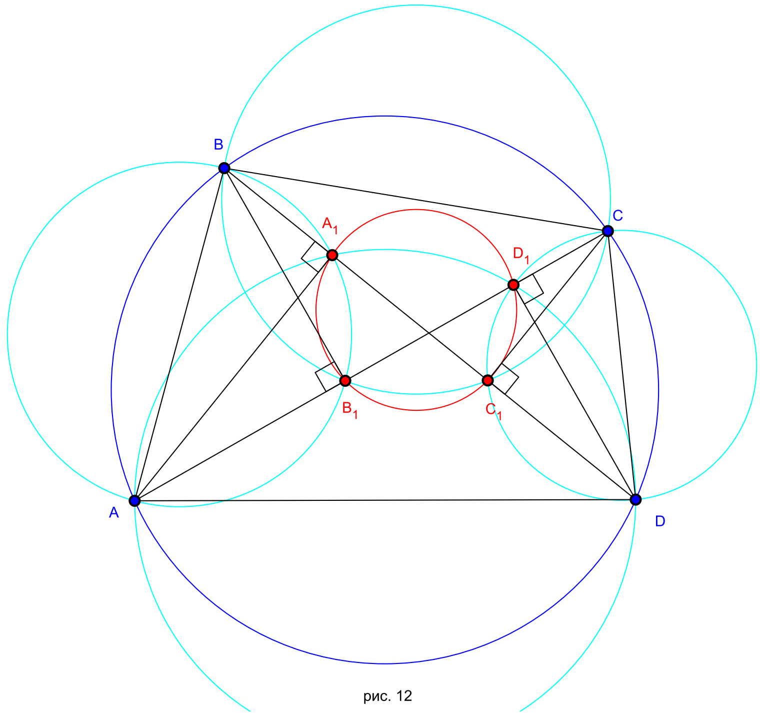

рис. 12

Упр. 8. $ABCD$ - вписанный четырёхугольник. A_1 - центр вписанной окружности треугольника BCD; аналогично определяются точки B_1, C_1, D_1. Докажите, что $A_1B_1C_1D_1$ - прямоугольник (рис. 13).

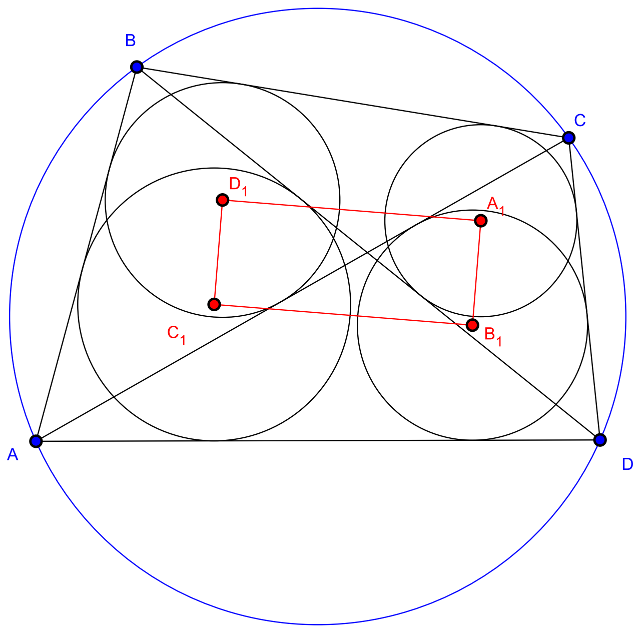

рис. 13

Оказывается, что следствие помагает найти несколько замечательных окружностей, связанных с треугольником.

Задача 1. *В треугольнике ABC A_1, C_1 – основания перпендикуляров, опущенных на биссектрису угла B из вершин A и C соответственно; BB_1 – высота, D_1 – середина стороны AC. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 и D_1 лежат на одной окружности.*

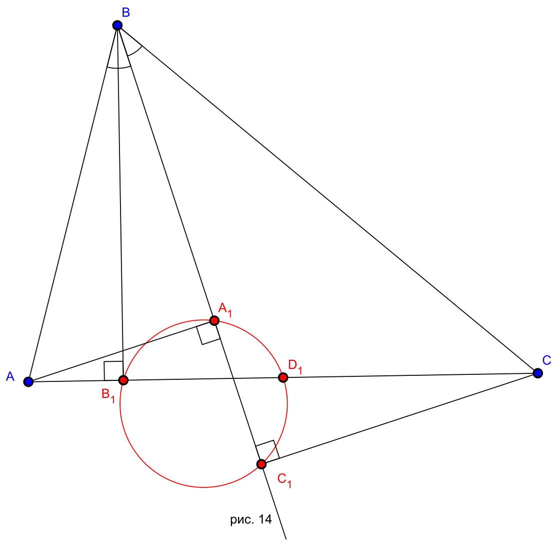

рис. 14

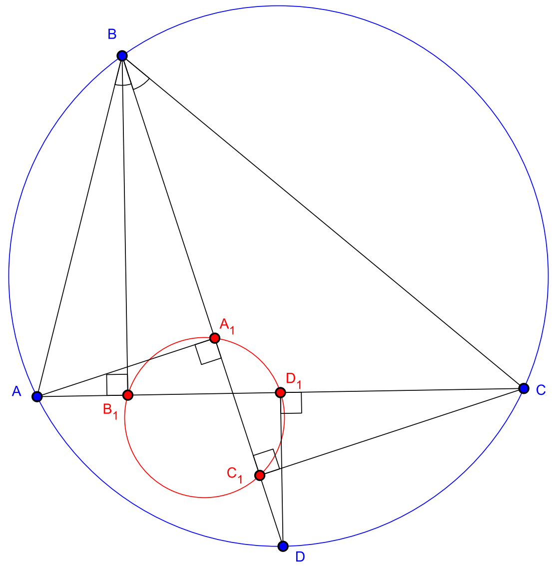

рис. 15

Доказательство. Оказывается, что эта задача является частынм случаем нашего следствия. Действительно, пусть биссектриса угла B пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке D(рис. 15). Тогда $DD_1 \perp AC$(почему?). Остаётся применить следствие к вписанному четырёхугольнику $ABCD$. $\square$

Упр. 9. `Данную задачу можно решить и без леммы о шестой окружности. Сделайте это.`

Отметим также следующий любопытный результат.

Задача 2. *Центр окружности, проходящей через точки A_1, B_1, C_1, D_1, лежит на окружности 9-ти точек треугольника ABC(рис. 16).*

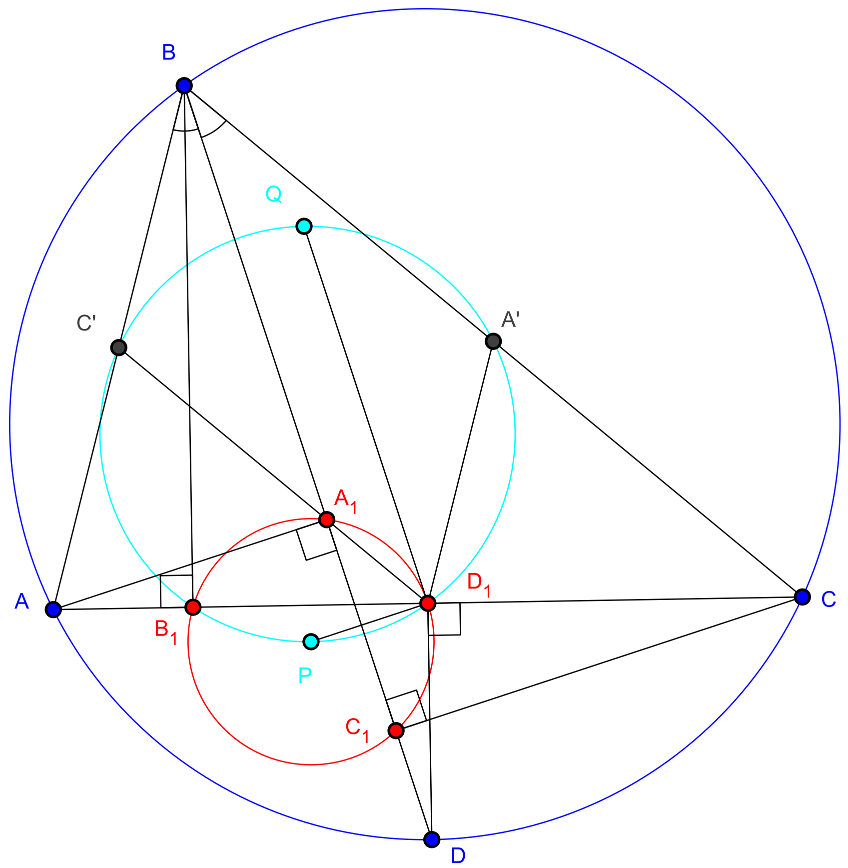

рис. 16

Доказательство. Пусть A', C' – середины сторон AB и CB соответственно. Обозначим через P середину дуги B_1D_1 окружности 9-ти точек. Докажем, что P будет центром окружности, проходящей через точки A_1, B_1, C_1 и D_1. Очевидно, что точка P равноудалена от точек B_1 и D_1. Следовательно, достаточно показать, что точка P также равноудалена от точек A_1 и C_1. Пусть Q – точка симметричная точке P относительно центра окружности 9-ти точек. Заметим, что четырёхугольник $A'D_1B_1C'$ является равнобокой трапецией (почему?). Следовательно, PQ является серединным перпендикуляром для отрезков B_1D_1 и для $A'C'$. Поэтому Q – середина дуги $A'C'$. Откуда следует, что D_1Q суть биссектриса угла $C'D_1A'$. С другой стороны, четырёхугольник $A'BC'D_1$ является параллелограммом, а прямые BD и D_1Q содержат биссектрисы его противоположных углов, откуда и следует их параллельность, т.е. $BD||D_1Q$. Теперь заметим, что $\angle PD_1Q = 90°(PQ$ – диаметр), поэтому $PD_1 \perp BD$. Получаем, что $AA_1||PD_1||CC_1$, а точка D_1 является серединой отрезка AC. Следовательно, $A_1P = C_1P$, чем и завершается доказательство. □

Следствие из леммы помагает найти ещё одну окружность, связанную с треугольником.

Задача 3. *Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AC в точке X, а вневписанная окружность касается стороны AC в точке Y. Докажите, что точки A_1, Y, C_1, X лежат на одной окружности.*

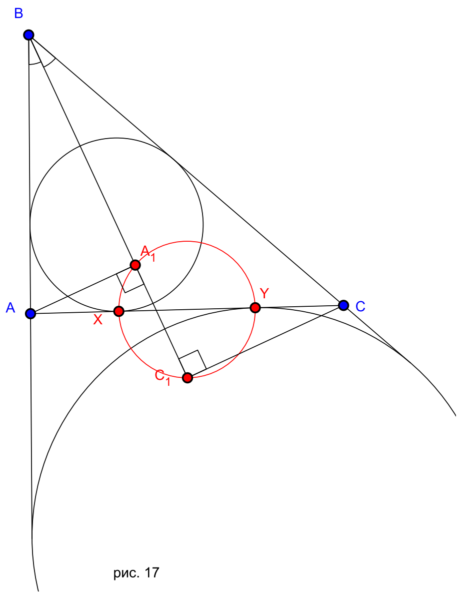

рис. 17

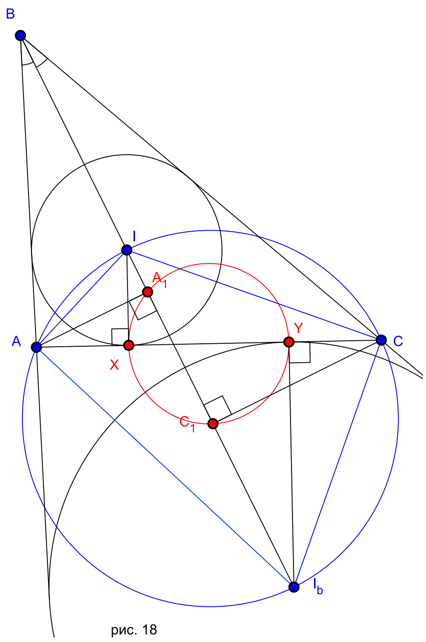

рис. 18

Доказательство. Как и выше, основная идея состоит в том, чтобы найти вписанный четырёхугольник. Обозначим через I и I_b центры вписанной и вневписанной окружности соответственно(рис. 18).

Как известно, точки A, I, C и I_b лежат на одной окружности. Тогда получаем, что AC и II_b диагонали вписанного четырёхугольника, а точки A_1, X, C_1, Y основания перпендикуляров, опущенных из соответствующих вершин на диагонали. Поэтому по следствию из леммы получаем, что эти четыре точки лежат на одной окружности. □

Упр. 10. `Докажите, что точка` D_1 `(середина стороны` AC`) является центром этой окружности.`

3 Доказательство теоремы Фейербаха

Введём для элементов треугольника ABC такие обозначения: α – вписанная окружность; β – окружность 9-ти точек; γ – окружность из задачи №1; φ – окружность из задачи №3 (рис. 19).

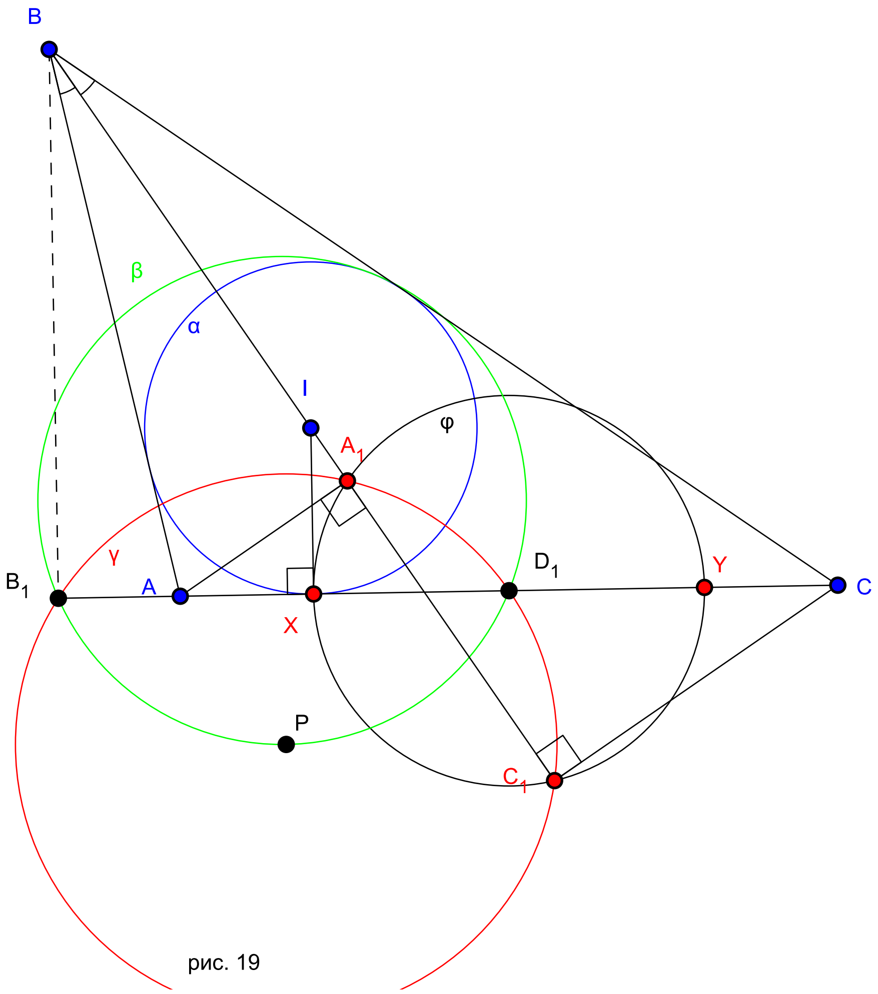

рис. 19

Заметим, что окружности α и φ перпендикулярны. С другой стороны центр окружности α точка I лежит на прямой A_1C_1. Следовательно, по лемме 2 получаем, что и окружности α и γ перпендикулярны. Теперь посмотрим на тройку окружностей α, β и γ. Эти три окружности удовлетворяют критерию Архимеда. В самом деле, окружность α касается хорды B_1D_1 окружности β, а центр окружности γ точка P лежит на середине дуги B_1D_1(задача №2) , и она проходит через точки B_1 и D_1. Также мы уже выяснили, что окружности α и γ перпендикулярны, поэтому по критерию Архимеда получаем, что окружности α и β касаются. Таким образом мы доказали, что вписанная окружность и окружность 9-ти точек касаются, теорема Фейербаха доказана. $\square$

Список литературы

[1] Jean-Louis Ayeme. Feurbach's theorem. A new purely synthetic proof. (http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/Docs/Feuerbach1.pdf)