Геометрические построения с помощью треугольника-шаблона

А.Блинков

Несколько лет назад на Турнире Ломоносова была предложена следующая задача (автор – И.Ф. Акулич): пользуясь как шаблоном только стандартным угольником с углом 30°, постройте угол величиной 15°.

Понятно, что мы можем обвести данный шаблон и получить его копию на бумаге. А что же нам требуется построить в полученном треугольнике? Несложно осознать, что для построения угла 15° достаточно построить биссектрису угла 30°. Для того, чтобы придумать это построение, вспомним, что нам известно о биссектрисе, кроме её определения. Например, мы знаем, что биссектриса угла является его осью симметрии. Тогда можно осуществить построение, показанное на рисунке 1 (ABC и $AB'C'$ – два различных положения шаблона). Наглядно ясно, что, получив точку D пересечения BC и $B'C'$, мы сможем построить биссектрису BD треугольника ABC, поэтому любой из углов CAD или BAD будет искомым.

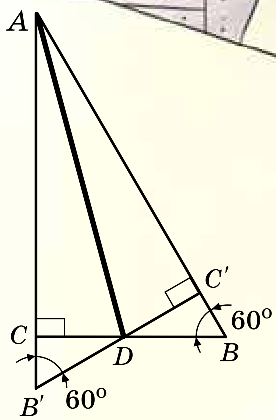

Рис. 1

Чтобы доказать, что это действительно так, давайте разберемся, что же мы сделали, изменив положение шаблона. Вершины B' и C' треугольника $AB'C'$ симметричны вершинам B и C треугольника ABC относительно искомой биссектрисы угла, поэтому симметричны также и отрезки BC и $B'C'$, значит, точка D их пересечения симметрична сама себе, значит, она лежит на этой биссектрисе! Так как вершина A заведомо принадлежит искомой биссектрисе, то построенный луч AD является биссектрисой угла BAC.

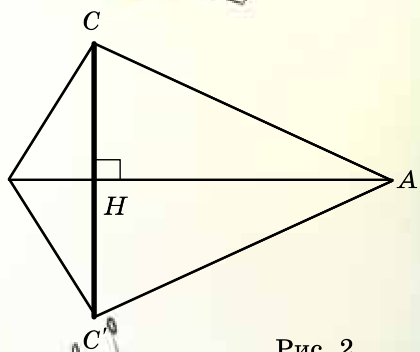

Рис. 2

А можно ли аналогичным образом построить другие биссектрисы треугольника ABC? Ответив на этот вопрос, вы заодно найдете и другой способ решения исходной задачи.

Естественным образом возникает и другой вопрос: какие еще замечательные линии треугольника ABC можно построить, если пользоваться только этим треугольником как шаблоном?

Попробуем, например, построить высоту треугольника. Здесь выбора у нас нет и мы будем строить высоту из вершины C, поскольку две другие высоты – это стороны AC и BC. На выручку опять приходит симметрия, а именно, тот факт, что ось симметрии является серединным перпендикуляром к отрезку, соединяющему две симметричные друг другу точки! Значит, можно осуществить построение, показанное на рисунке 2. Действительно, точки C и C' симметричны относительно прямой AB, поэтому отрезок CH, где H – точка пересечения CC' и AB, является высотой треугольника ABC.

А теперь построим медиану треугольника из той же вершины C. Для этого достаточно расположить шаблон так, как показано на рисунке 3, и провести отрезок CC', который пересечет отрезок AB в его середине O. Тогда CO – искомая медиана. Действительно, мы достроили прямоугольный треугольник ABC до прямоугольника и воспользовались тем, что его диагонали (как и у любого параллелограмма) делятся точкой пересечения пополам. Вспомнив, что точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии, можно объяснить это построение и по-другому. Расположив шаблон указанным способом, мы получили два треугольника, симметричных относительно точки O – середины AB. Центр симметрии является серединой отрезка, соединяющего две симметричные друг другу точки, значит, O – середина как отрезка CC', так и отрезка AB.

Научившись строить биссектрису, высоту и медиану треугольника, для полноты картины хотелось бы уметь строить и серединный перпендикуляр к стороне. Так как середину O стороны AB мы строить уже умеем, то остается найти способ построить еще одну точку, лежащую на этом перпендикуляре. На выручку опять приходит осевая симметрия. Расположим шаблон так, как показано на рисунке 4, тогда искомый серединный перпендикуляр будет осью симметрии треугольников ABC и $A'B'C'$, поэтому точка P пересечения симметричных отрезков AC и $A'C'$ лежит на этом перпендикуляре. Построив точку P, получим, что OP – серединный перпендикуляр к стороне AB.

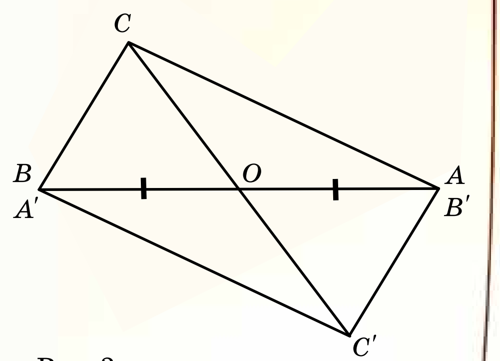

Рис. 3

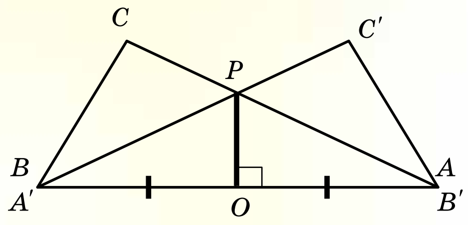

Рис. 4

До сих пор мы «деликатно» обходили один вопрос: каждый раз, построив нужные точки, нам надо их соединить отрезком, а хватит ли длин сторон треугольника-шаблона, чтобы использовать одну из них в качестве линейки?

Оказывается, что шаблон выбран настолько удачно, что все показанные построения мы сможем осуществить! Действительно, так как угол ADB – тупой (см. рис. 1), то AB – наибольшая сторона треугольника ADB, следовательно, $AD < AB$. Поэтому при построении биссектрисы в качестве линейки можно использовать гипотенузу треугольника-шаблона. Далее, так как $\angle CAB = 30^\circ$, то $\angle CAC' = 60^\circ$ и $AC = AC'$ (см. рис. 2), то есть треугольник ACC' – равносторонний. Значит, для построения высоты нам достаточно в качестве линейки использовать больший катет треугольника-шаблона (а можно и гипотенузу). При построении медианы мы получили прямоугольник $ACBC'$ (см. рис. 3), поэтому $CC' = AB$, то есть в качестве линейки опять можно использовать гипотенузу. А при построении серединного перпендикуляра в качестве линейки можно использовать любую сторону шаблона (см. рис. 4), так как отрезок PO меньше любой его стороны (докажите!).

Попробуйте обобщить поставленную задачу: можно ли аналогичными способами построить биссектрису, высоту, медиану и серединный перпендикуляр к стороне, если в качестве шаблона использовать произвольный треугольник? Мы вернёмся к этому вопросу в следующем номере.

Художник С.

А. Блинков

Геометрические построения с помощью ТРЕУГОЛЬНИКА-ШАБЛОНА

В прошлом номере мы построили замечательные линии треугольника с углами 30°, 60°, 90° почти из ничего – можно было пользоваться только карандашом и шаблоном этого треугольника. Попробуем справиться с задачей посложнее и построить биссектрису, высоту, медиану и серединный перпендикуляр к стороне для *произвольного* треугольника, используя этот треугольник как шаблон.*

Проще всего дело обстоит с биссектрисой. Как и в предыдущем случае, несложно доказать, что в любом треугольнике биссектриса меньше хотя бы одной из двух сторон, между которыми она проведена (тут пригодится неравенство треугольника). Значит, в любом неравностороннем треугольнике можно построить любую из биссектрис уже известным нам способом (см. рис. 1).

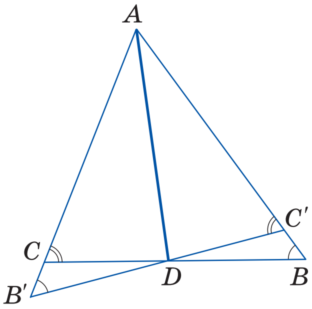

Рис. 1

Подумайте, почему этот способ не годится для равностороннего треугольника? А как в равнобедренном треугольнике построить биссектрису угла при вершине?

С высотой и медианой всё сложнее. Возьмём, например, в качестве шаблона какой-нибудь треугольник, «близкий» к равностороннему. Тогда построения, которые мы использовали для прямоугольного треугольника, сделать не получится – ведь длины никакой из сторон шаблона не хватит, чтобы использовать её в качестве линейки.

Надо как-то уменьшить размеры отрезков, которые придётся проводить. Неожиданно на помощь приходит ещё один вид движений на плоскости – параллельный перенос! Пусть дан произвольный треугольник-шаблон ABC, и требуется построить высоту CH и медиану CM. Изобразив треугольник ABC, перенесём его параллельно вдоль луча AC (см. рис. 2 а, б). Вершину A сдвинем в точку A' так, чтобы длина отрезка CA' была намного меньше длины CA. При таком параллельном переносе треугольник ABC перейдёт в равный ему треугольник $A'B'C'$, причём стороны $A'B'$ и AB будут параллельны. Тогда в треугольнике $A'DC$, где D – точка пересечения $A'B'$ и BC, будут такие же углы, как и в исходном. Пользуясь шаблоном, можно отложить углы, равные углам A' и D треугольника $A'DC$ и построить треугольники $A'ED$ (рис. 2а) и DFA' (рис. 2б) – получились картинки, аналогичные тем, которые были для прямоугольного шаблона, но с уменьшенными размерами!

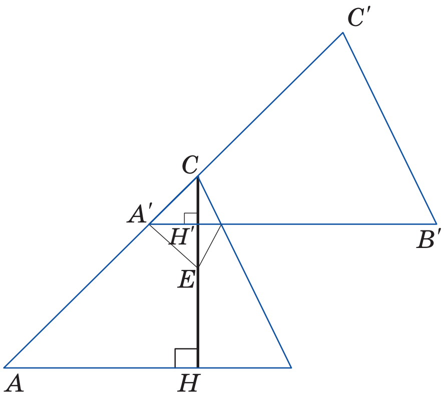

Рис. 2 а

*Серия задач придумана А. Блинковым и Ю. Блинковым. Задачи использовались на XV турнире имени А.П. Савина и VIII устной математической олимпиаде в г. Москве (7 класс)

Треугольники $A'ED$ и $A'CD$ симметричны относительно стороны AD, а треугольники DFA' и $A'CD$ симметричны относительно середины AD. Тогда, проведя в первом случае отрезок CE, а во втором – отрезок CF, мы сможем продлить их до пересечения со стороной AB треугольника ABC и получим, соответственно, его высоту CH и медиану CM. Остаётся объяснить, почему это так.

В первом случае это совсем просто – так как $A'D$ и AB параллельны, то прямая CH, перпендикулярная $A'D$, будет перпендикулярна и AB.

Во втором случае заметим сначала, что треугольник ABC – это как бы равномерно растянутая копия треугольника $A'DC$, когда длины всех сторон увеличены в одно и то же число раз, а углы одного треугольника соответственно равны углам другого. В таких случаях говорят, что треугольник ABC *подобен* треугольнику $A'DC$. Кроме того, на этом чертеже есть ещё две пары подобных треугольников: $A'M'C$ и AMC; $DM'C$ и BMC. Значит, AM во столько же раз больше $A'M'$, во сколько раз CM больше CM' – но и во столько же раз и BM больше DM'. Так как $A'M = M'D$, то $AM = MB$, то есть M – середина AB. *Более строго это можно доказать, познакомившись со свойствами частного случая подобия – гомотетией.*

Понятно, что, научившись строить середину любой стороны треугольника, мы сможем построить и серединный перпендикуляр к любой стороне, воспроизведя построение рисунка 3, а также любую среднюю линию треугольника. Не составит труда построить и четыре замечательные точки треугольника: центры вписанной и описанной окружности, точку пересечения высот (*ортоцентр*) и точку пересечения медиан (*центроид*). Попробуйте!

Заметим, что указанный способ построения высоты и медианы – не единственный. Подумайте самостоятельно над другими способами этих построений, а также над тем, какие ещё замечательные линии и точки можно построить, используя произвольный треугольник-шаблон? (*В частности, можно найти способы построить прямую Эйлера, точки касания вписанной и вневписанных окружностей со сторонами треугольника, точки Жергонна и Нагеля, касательную к описанной около треугольника окружности в любой его вершине, симедианы треугольника и точку Лемуана и так далее.***)

Надеемся, что построения с помощью треугольника-шаблона помогут вам глубже понять свойства основных преобразований плоскости, изучаемых в школьном курсе геометрии.

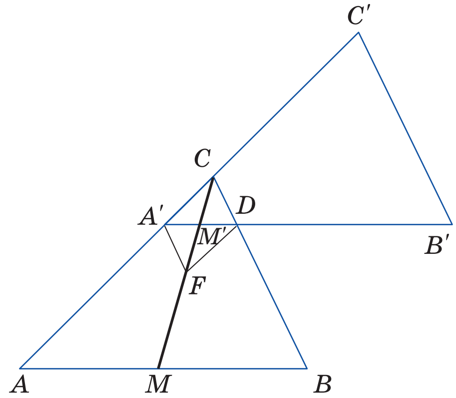

Рис. 2 б

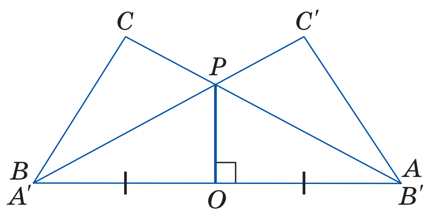

Рис. 3

** Подобное исследование было успешно проведено С. Довжиком, на тот момент учеником 9 класса ЦО № 218, г. Москва