Две окружности в треугольнике, три окружности в треугольнике ...

А.БЛИНКОВ, Ю.БЛИНКОВ

Рассмотрим любопытную геометрическую конфигурацию, которая возникает во многих задачах, в том числе и ставших «классическими»: отрезок CD разбивает треугольник ABC на два треугольника, в каждый из которых вписана окружность. Пусть точки I_1 и I_2 – центры этих окружностей (рис.1).

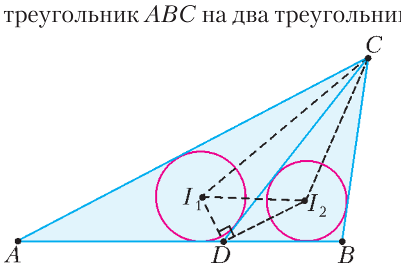

Рис. 1

Некоторые *свойства этой конфигурации* практически очевидны:

1. а) *Треугольник I_1DI_2 – прямоугольный.*

Действительно, DI_1 и DI_2 – биссектрисы смежных углов, поэтому $\angle I_1DI_2 = 90°$.

б) $\angle I_1CI_2 = \frac{1}{2}\angle ACB$.

Действительно, CI_1 и CI_2 – биссектрисы углов ACD и BCD соответственно.

2. *Пусть r_1 и r_2 – радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, r – радиус окружности, вписанной в треугольник ABC. Тогда $r_1 + r_2 > r$.*

Действительно, так как $S_{ABC} = S_{ACD} + S_{BCD}$, то, используя формулу, выражающую площадь треугольника через радиус вписанной окружности и полупериметр, получим: $pr = p_1r_1 + p_2r_2 \Leftrightarrow r = \frac{p_1}{p}r_1 + \frac{p_2}{p}r_2$. Из неравенства треугольника следует, что $p_1 < p$ и $p_2 < p$ (см. рис.1), т.е. $r < r_1 + r_2$, что и требовалось.

Отметим, что доказанное утверждение можно обобщить для любого описанного многоугольника (см. задачу 1 для самостоятельного решения).

Для того чтобы получить *другие свойства рассматриваемой конфигурации*, нам потребуется вспомнить один из фактов школьного курса геометрии.

Пусть окружность вписана в треугольник ABC со сторонами a, b и c. Тогда расстояния от вершин треугольника до точек касания равны $p-a$, $p-b$ и $p-c$, где p – полупериметр треугольника (рис.2).

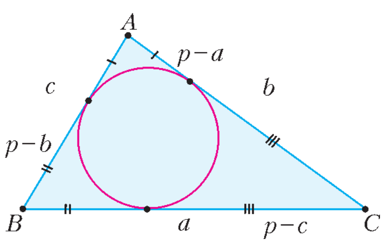

Рис. 2

Доказательство несложно восстановить по рисунку 2.

3. Пусть окружности, вписанные в треугольники ACD и BCD, касаются прямой CD в точках E и F (рис.3). Выясним, от каких линейных величин зависит длина отрезка EF.

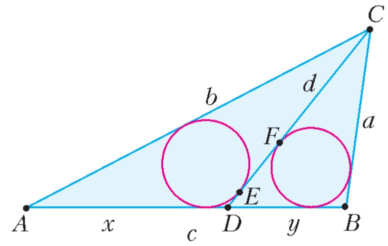

Рис. 3

Введем стандартные обозначения для сторон треугольника ABC, а также: $AD = x$, $BD = y$, $CD = d$. Периметры треугольников ACD и BCD обозначим p_1 и p_2 соответственно. Тогда

$$EF = |DF - DE| = |(p_2 - a) - (p_1 - b)| =$$
$$= \left|\frac{d+y-a}{2} - \frac{d+x-b}{2}\right| = \frac{|(b+y)-(a+x)|}{2}.$$

Таким образом, это расстояние зависит от длин четырех отрезков. Это позволяет рассмотреть *важные частные случаи*, которые фигурируют в качестве отдельных задач во многих источниках (см., например, [3], [6] и [7]).

а) Пусть $a = b$, т.е. треугольник ABC – равнобедренный с основанием AB. Тогда $EF = \frac{|y-x|}{2}$, а значит, в этом случае достаточно знать длины отрезков, на которые точка D разбивает AB.

б) Пусть точка D – середина AB, т.е. CD – медиана треугольника ABC. Тогда $x = y$, значит, $EF = \frac{|b-a|}{2}$, т.е. в этом случае достаточно знать длины сторон AC и BC.

в) Пусть CD – биссектриса треугольника ABC. Тогда $\frac{x}{y} = \frac{b}{a}$ и $x + y = c$. Решая эту систему уравнений, получим $x = \frac{bc}{a+b}$, $y = \frac{ac}{a+b}$. Значит, $EF = \frac{(a+b-c)|b-a|}{2(b+a)}$.

г) Пусть D – точка касания окружности, вписанной в треугольник ABC, со стороной AB. Тогда $x = p - a$, $y = p - b$, где p – полупериметр треугольника ABC. Следовательно, $a + x = b + y$, поэтому $EF = 0$. Геометрически это означает, что обе окружности касаются CD в одной и той же точке, т.е. эти окружности касаются друг друга.

Полученный результат не только сам по себе интересен, но допускает и некоторую пространственную аналогию (см. задачу 9 для самостоятельного решения).

Замечание. Отметим также, что если бы изначально была сформулирована обратная задача: «При каком расположении точки D окружности касаются друг друга?», то догадаться, что D – точка касания вписанной окружности со стороной, исходя только из полученной нами общей формулы, было бы весьма непросто. Ниже мы покажем, как этот результат можно получить из других соображений.

Наше дальнейшее исследование будет связано с точками, в которых три окружности касаются стороны AB.

Пусть I, I_1 и I_2 – центры окружностей, вписанных в треугольники ABC, ACD и BCD соответственно, L, M и K – точки касания этих окружностей со стороной AB (рис. 4).

4. Докажем *«ключевой» факт*: $ML = DK$.

Действительно, $DK = p_2 - a = \frac{CD + BD - a}{2}$,

$$ML = AL - AM = (p-a) - (p_1 - CD) =$$
$$= \frac{b+c-a}{2} - \frac{b + AD - CD}{2} = \frac{c - a + CD - AD}{2} = \frac{CD + BD - a}{2},$$

так как $AD + BD = c$. Следовательно, $ML = DK$, что и требовалось.

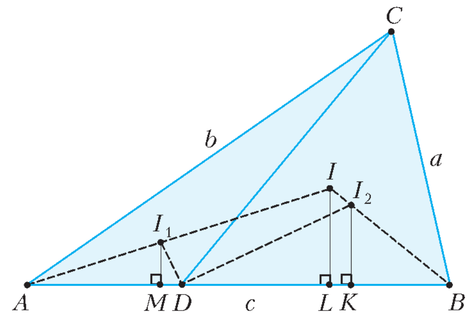

Рис. 4

Используя это равенство, можно последовательно получить *другие свойства рассматриваемой конфигурации.*

В частности, это дает другой способ доказательства того, что окружности с центрами I_1 и I_2 касаются тогда и только тогда, когда точки D и L совпадают. Действительно, касание окружностей с центрами I_1 и I_2 равносильно тому, что они касаются отрезка CD в одной и той же точке F, что, в свою очередь, равносильно равенству отрезков касательных: $DM = DF = DK$ (рис.5). Учитывая, что $ML = DK$, получим, что это равносильно совпадению точек D и L.

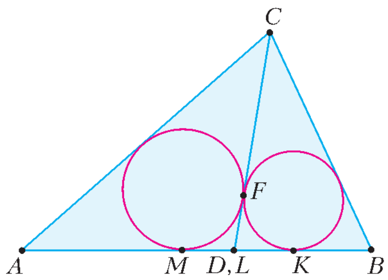

Рис. 5

Несколько лет назад на олимпиаде по геометрии была предложена следующая задача (V Московская устная олимпиада по геометрии, автор – П.Кожевников).

Фиксированы две окружности ω_1 и ω_2, одна их внешняя касательная n и одна их внутренняя касательная m. На прямой m выбирается точка X, а на прямой n строятся точки Y и Z так, что XY и XZ касаются ω_1 и ω_2 соответственно, а треугольник XYZ содержит окружности ω_1 и ω_2. Докажите, что центры окружностей, вписанных в треугольники XYZ, лежат на одной прямой (рис.6).

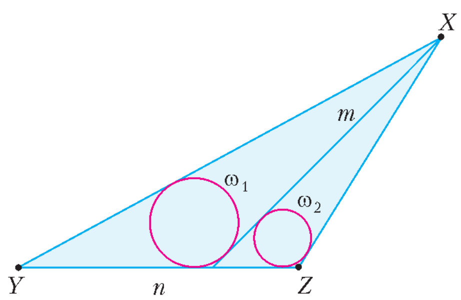

Рис. 6

Если бы мы ранее не рассмотрели свойство точек касания окружностей со стороной AB, то к этой задаче было бы трудно подступиться. Теперь же надо просто вникнуть в условие.

Пусть M и K – точки касания данных окружностей с прямой n, $D = n \cap m$. Рассмотрим рисунок 4, на котором $X \equiv C$, $Y \equiv A$, $Z \equiv B$, тогда $CD \equiv m$, $AB \equiv n$. Точки M, K и D фиксированы (следует из условия). Рассмотрим точку L касания вписанной окружности треугольника XYZ с прямой YZ. Так как $ML = DK$ и L лежит между M и K, то точка L также фиксирована. Центр I окружности, вписанной в треугольник XYZ, лежит на перпендикуляре к YZ, проходящем через точку L. Следовательно, центры окружностей, вписанных в треугольники XYZ, лежат на одной прямой.

5. Еще одно *важное свойство нашей конфигурации* (V Соросовская олимпиада школьников, автор – И.Шарыгин): *точки I_1, L, D и I_2 лежат на одной окружности.*

Рассмотрим точку Q – середину отрезка I_1I_2, который является большей боковой стороной прямоугольной трапеции MI_1I_2K (рис.7).

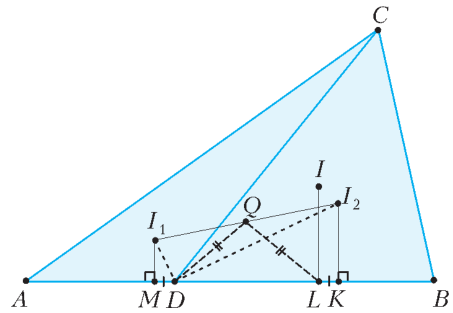

Рис. 7

Тогда точка Q равноудалена от точек M и K. Из равенства $ML = DK$ следует, что $MD = LK$, значит, точка Q равноудалена также и от точек D и L. Так как $\angle I_1DI_2 = 90°$, то окружность с диаметром I_1I_2 проходит через точку D, а тогда эта окружность проходит и через точку L, что и требовалось.

Это свойство оказывается очень существенным при рассмотрении частного случая, когда CD – высота треугольника ABC, лежащая внутри треугольника.

6. Докажем, что в этом случае:

а) $I_1L = I_2L$;

б) *вершина P квадрата I_1LI_2P лежит на прямой CD.*

Рассмотрим окружность с диаметром I_1I_2 (рис.8). По доказанному, точки L и D лежат на этой окружности.

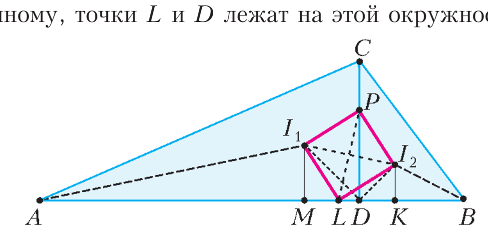

Рис. 8

а) $\angle I_1LI_2 = 90°$, поэтому в прямоугольных треугольниках I_1ML и LKI_2 острые углы соответственно равны. Кроме того, так как DI_2 – биссектриса угла BDC, то $\angle I_2DK = 45°$, значит, $I_2K = DK = ML$. Таким образом, треугольники I_1ML и LKI_2 равны, поэтому $I_1L = I_2L$.

б) Если I_1LI_2P – квадрат, то LP – диаметр той же окружности, тогда $\angle LDP = 90°$, значит, точка P лежит на высоте CD.

7. Пусть теперь треугольник ABC – прямоугольный, а CD – его высота, проведенная к гипотенузе (рис. 9). Докажем, что:

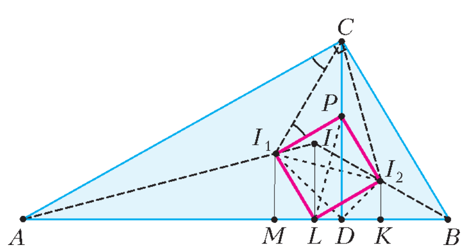

Рис. 9

а) *точка P – центр окружности, описанной около треугольника I_1CI_2;*

б) $I_1L \perp AC$ *и* $I_2L \perp BC$;

в) $I_1L = IL = I_2L$;

г) *точки A, I_1, I_2 и B лежат на одной окружности.*

а) Так как $\angle I_1CI_2 = 45°$, $\angle I_1PI_2 = 90°$ и точка P равноудалена от точек I_1 и I_2, то P – центр окружности, описанной около треугольника I_1CI_2.

б) Из доказанного в пункте а) следует, что $\angle PI_1C =$

$= \angle PCI_1 = \angle ACI_1$, значит, $PI_1 \parallel AC$, тогда $I_1L \perp AC$. Аналогично, $PI_2 \parallel BC$ и $I_2L \perp BC$.

в) Пусть $\angle CAB = \alpha$, тогда $\angle AIL = 90° - \frac{1}{2}\alpha$, а $\angle I_1LI = \alpha$ (его стороны соответственно перпендикулярны сторонам угла BAC). Значит,

$$\angle II_1L = 180° - (\angle AIL + \angle I_1LI) = 90° - \frac{1}{2}\alpha = \angle I_1IL.$$

Следовательно, $I_1L = IL$. Равенство $I_1L = I_2L$ уже доказано в пункте а) свойства 6.

г) Так как

$$\angle II_1I_2 = \angle II_1L - \angle I_2I_1L = 90° - \frac{1}{2}\alpha - 45° = 45° - \frac{1}{2}\alpha = \angle I_2BA,$$

то четырехугольник AI_1I_2B – вписанный, что и требовалось.

Широко известны геометрические утверждения, которые легко доказываются «в одну сторону», а доказательство утверждений, им обратных, сопряжено со значительными трудностями. Свойство нашей конфигурации, рассмотренное в пункте 6, дает возможность в очередной раз продемонстрировать этот «эффект обратной задачи».

8. Напомним одну известную задачу.

Пусть CD – высота прямоугольного треугольника ABC, проведенная к гипотенузе, а радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC, ACD и BCD, равны r, r_1 и r_2 соответственно. Докажите, что $r^2 = r_1^2 + r_2^2$.

Для ее решения обычно используется тот факт, что треугольники ACD и CBD подобны треугольнику ABC с коэффициентами $\frac{r_1}{r}$ и $\frac{r_2}{r}$ соответственно. Тогда $\frac{S_{ACD}}{S_{ABC}} = \frac{r_1^2}{r^2}$, $\frac{S_{BCD}}{S_{ABC}} = \frac{r_2^2}{r^2}$. Так как $S_{ABC} = S_{ACD} + S_{BCD}$, то, сложив эти равенства почленно, получим требуемое равенство.

Обратное утверждение столь же просто доказать не получится, так как неоткуда взять подобные треугольники! Зато можно продолжить рассуждения из доказательства свойства 6,а. Действительно, так как $r^2 = r_1^2 + r_2^2$, то $r_1 < r$ и $r_2 < r$, тогда высота CD лежит внутри треугольника ABC. Так как треугольники I_1ML и LKI_2 равны, то $r_1 = I_1M = LK$ и $r_2 = I_2K = LM$ (см. рис.8). Значит, $r_1^2 + r_2^2 = I_1L^2 = I_2L^2$, тогда $IL = r = I_1L = I_2L$, т.е. треугольники I_1LI и I_2LI – равнобедренные (см. рис.9). Используем то, что сумма углов четырехугольника I_1II_2L равна $360°$. Учитывая, что $\angle I_1II_2 = 180° - \frac{\alpha+\beta}{2} = \angle II_1L + \angle II_2L$, $\angle I_1LI_2 = 90°$, получим, что $\alpha + \beta = 90°$, т.е. $\angle ACB = 90°$ (где $\beta = \angle ABC$).

Отметим, что и обратную задачу можно решать аналогично.

9. Теперь уместно рассмотреть такой вопрос: *могут ли окружности, вписанные в треугольники ACD и BCD, иметь равные радиусы?*

Да, конечно. Это легко понять из соображений непрерывности: меняя положение точки D, мы можем получить как разбиение, при котором первая окружность больше второй, так и разбиение, при котором первая окружность меньше. Тогда, в силу непрерывности перемещения точки D по отрезку AB, существует положение точки D, при котором окружности равны (теорема о промежуточном значении непрерывной функции).

Более того, оказывается, что такую точку D можно построить с помощью циркуля и линейки! Рассмотрим соответствующую задачу (IV Московская устная олимпиада по геометрии, автор – М.Волчкевич).

Дан произвольный треугольник ABC. Постройте прямую, проходящую через точку C и разбивающую его на два треугольника с равными радиусами вписанных окружностей.

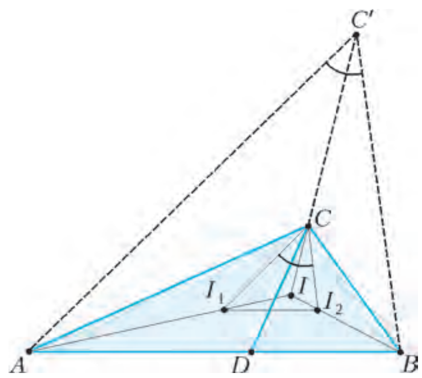

Рис. 10

Проведем анализ. Пусть CD – отрезок искомой прямой (точка D – на стороне AB), I_1, I_2 и I – центры окружностей, вписанных в треугольники ACD, BCD и ABC соответственно (рис. 10). Тогда точки I_1 и I_2 лежат на лучах IA и IB соответственно, причем $I_1I_2 \parallel AB$. Кроме того, $\angle I_1CI_2 = \frac{1}{2}\angle ACB$.

Рассмотрим такую гомотетию с центром I, что образами точек I_1 и I_2 являются точки A и B соответственно. Тогда образом точки C является точка C', лежащая на луче IC, из которой сторона AB видна под углом, равным $\frac{1}{2}\angle ACB$. Значит, можно построить точку C' как пересечение луча IC с геометрическим местом точек, из которых AB видна под углом, равным $\frac{1}{2}\angle ACB$. Выполнив затем гомотетию с центром I и коэффициентом $k = \frac{IC}{IC'}$, получим точки I_1 и I_2. Прямая CD – общая касательная двух окружностей с центрами в этих точках и радиусами, равными расстоянию между прямыми I_1I_2 и AB (достаточно построить касательную к одной из окружностей, проходящую через точку C, тогда она автоматически будет касательной и к другой окружности).

В заключительной части решения можно также использовать то, что отрезок I_1I_2 виден из искомой точки D под углом $90°$.

10. Интересен еще один частный случай (автор задачи – И.Кушнир).

Точка D выбрана на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC так, что окружности, вписанные в треугольники ACD и BCD, имеют равные радиусы. Тогда $S_{ABC} = CD^2$.

Докажем это. Пусть I_1, I_2 и I – центры окружностей, вписанных в треугольники ACD, BCD и ABC (рис.11).

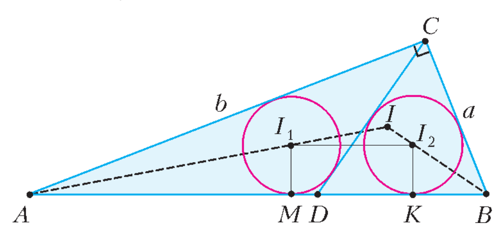

Рис. 11

Тогда точки I_1 и I_2 лежат на лучах IA и IB соответственно, причем $I_1I_2 \parallel AB$. Следовательно, треугольники AIB и I_1II_2 подобны, значит,

$$\frac{r}{r - r_1} = \frac{c}{I_1I_2}.$$

Теперь воспользуемся тем, что $S_{ABC} = S_{ACD} + S_{BCD} = (p_1 + p_2)r_1$, где r_1 – радиус равных окружностей. Пусть $CD = d$, тогда $p_1 + p_2 = p + d$, где p – полупериметр треугольника ABC. Таким образом,

$$r_1 = \frac{S_{ABC}}{p+d} = \frac{pr}{p+d}.$$

Так как расстояние между точками I_1 и I_2 равно расстоянию между точками M и K касания окружностей со стороной AB, то

$$I_1I_2 = DM + DK = p_1 - b + p_2 - a = p + d - a - b\,.$$

Из найденных трех соотношений получим

$$c\left(r - \frac{pr}{p+d}\right) = r(p + d - a - b) \Leftrightarrow$$

$$cd = (p+d)^2 - (p+d)(a+b) \Leftrightarrow$$

$$cd = p^2 + d^2 + 2pd - pa - pb - ad - bd \Leftrightarrow$$

$$p^2 + d^2 = pa + pb \Leftrightarrow d^2 = p(p-c) = pr = S_{ABC}\,.$$

«Под занавес» рассмотрим две сложные задачи, связанные с нашей конфигурацией.

11 (автор – Л.Емельянов). *В треугольнике ABC проведена медиана CD. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, а точки J_1 и J_2 – центры вневписанных окружностей этих треугольников, касающихся сторон AC и BC соответственно (рис.12). Докажите, что эти четыре точки лежат на одной окружности.*

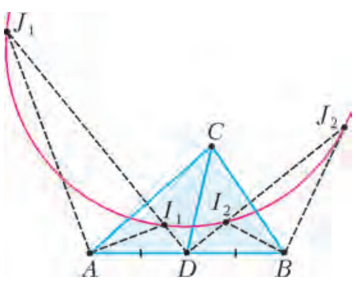

Рис. 12

Доказательство. Нам потребуется следующая **лемма.**

Дан треугольник ABC, I – центр вписанной в него окружности, Q – центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC. Тогда $AI \cdot AQ = AB \cdot AC$.

Доказать это утверждение можно по-разному. Например, рассмотрим треугольники ABQ и AIC (рис. 13): $\angle BAQ = \angle IAC$, кроме того, так как $\angle IBQ = 90^\circ$, то $\angle ABQ = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle B$, а $\angle AIC = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle A - \frac{1}{2}\angle C = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle B = \angle ABQ$. Таким образом, эти треугольники подобны, значит, $\frac{AB}{AI} = \frac{AQ}{AC}$, откуда и следует доказываемое равенство.

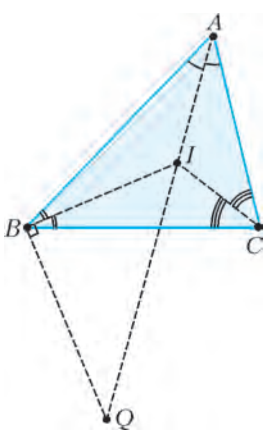

Рис. 13

Другой способ – использовать симметрию относительно биссектрисы AI и свойство секущей.

По доказанной лемме для треугольников ADC и BDC имеем: $DI_1 \cdot DJ_1 = DA \cdot DC = DB \cdot DC = DI_2 \cdot DJ_2$, откуда и следует утверждение задачи.

12 (заключительный этап XXXVII Всероссийской олимпиады, автор – М.Кунгожин). *В неравнобедренном треугольнике ABC проведена медиана AM. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей, вписанных в треугольники ABM и ACM, N – середина дуги BC (содержащей вершину A). Докажите, что точки A, N, I_1 и I_2 лежат на одной окружности (рис.14).*

Доказательство будет состоять из нескольких частей, которые мы будем формулировать и доказывать по отдельности.

1) Пусть J_1 и J_2 – центры вневписанных окружностей треугольника ABC, касающихся сторон AB и AC соответственно. Тогда точка N – середина отрезка J_1J_2.

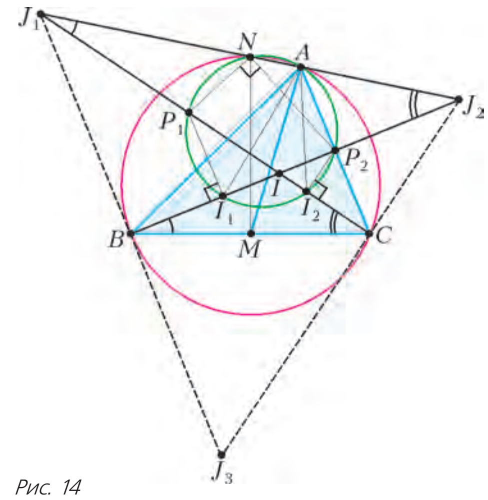

Рис. 14

Действительно, пусть J_3 – центр третьей вневписанной окружности треугольника ABC. Тогда точки A, B и C – основания высот треугольника $J_1J_2J_3$ (так как угол между внутренней и внешней биссектрисами угла прямой). Следовательно, окружность, описанная около треугольника ABC, является окружностью девяти точек треугольника $J_1J_2J_3$, а значит, она проходит через середины сторон треугольника $J_1J_2J_3$. Так как расстояния от середины стороны J_1J_2 до оснований высот B и C одинаковы, точка N совпадает с серединой J_1J_2.

2) Пусть M – середина отрезка BC, тогда точки M и N соответствуют друг другу в подобных треугольниках IBC и IJ_1J_2.

Действительно, $\angle J_1BJ_2 = \angle J_1CJ_2 = 90^\circ$ (углы между внутренними и внешними биссектрисами). Следовательно, точки B и C лежат на окружности с диаметром J_1J_2, значит, $\angle BCJ_1 = \angle BJ_2J_1$. Тогда указанные треугольники подобны (по двум углам), а точки M и N – середины соответствующих сторон этих треугольников.

3) Рассмотрим окружность γ, проходящую через точки A, I_1 и I_2. Пусть γ вторично пересекает BI и CI в точках P_1 и P_2 соответственно. Докажем, что P_1P_2 – диаметр этой окружности.

Действительно, $\angle I_1P_1I_2 = \angle I_1P_2I_2 = \angle I_1AI_2 = \frac{1}{2}\angle BAC$.

С другой стороны, $\angle BIP_1 = \angle IBC + \angle ICB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC = 90^\circ - \angle I_1P_1I_2$. Следовательно, $\angle P_2I_1P_1 = \angle P_1I_2P_2 = 90^\circ$, т.е. P_1P_2 – диаметр окружности γ.

4) Так как $P_1I_1 \perp BJ_2$ и $J_1B \perp BJ_2$, то $P_1I_1 \parallel J_1B$, тогда $\frac{II_1}{IP_1} = \frac{IB}{IJ_1}$, т.е. точки I_1 и P_1 соответствуют друг другу в подобных треугольниках IBC и IJ_1J_2. Аналогично, точки I_2 и P_2 – также соответствующие. Таким образом, $\angle P_1NP_2 = \angle I_1MI_2 = 90^\circ$, а значит, точка N лежит на окружности γ, что и требовалось доказать.

Задачи для самостоятельного решения

1. Описанный многоугольник произвольным образом разбит на треугольники. Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в эти треугольники, больше радиуса окружности, вписанной в многоугольник.

2. Пусть BM – медиана треугольника ABC. В треугольники ABM и CBM вписаны окружности радиусов r и R ($r < R$). Докажите, что $\frac{R}{r} < 2$.

3. В прямоугольном треугольнике с катетами 5 и 12 проведена медиана к гипотенузе и в образовавшиеся треугольники вписаны окружности. Найдите расстояние между точками касания этих окружностей с гипотенузой.

4. В треугольнике со сторонами 3 и 5 и углом 120° между ними проведена биссектриса к третьей стороне и в образовавшиеся треугольники вписаны окружности. Найдите расстояние между точками касания этих окружностей с биссектрисой.

5. В прямоугольном треугольнике с катетом 1 и противолежащим углом 30° проведена высота к гипотенузе и в образовавшиеся треугольники вписаны окружности. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.

6. В прямоугольном треугольнике проведена высота к гипотенузе и в образовавшиеся треугольники вписаны окружности, расстояние между центрами которых равно d. Найдите радиус окружности, вписанной в данный треугольник.

7. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CD к гипотенузе AB. Докажите, что $r_1 + r_2 + r = CD$, где r_1, r_2 и r – радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD, BCD и ABC соответственно.

8. В треугольнике ABC проведена высота CD, лежащая внутри треугольника; r_1, r_2 и r – радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD, BCD и ABC соответственно. Докажите, что $r^2 < r_1^2 + r_2^2$ тогда и только тогда, когда угол ACB – тупой.

9. Докажите, что суммы длин скрещивающихся ребер тетраэдра равны тогда и только тогда, когда существует сфера, касающаяся всех его ребер. (Такой тетраэдр называют *каркасным*.)

10. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка D. Для треугольников ADC и BDC рассматриваются вневписанные окружности, касающиеся сторон AC и BC соответственно. Пусть P и Q – точки касания этих окружностей с прямой DC.

а) Найдите PQ, если $BC = a$, $AC = b$, $AD = x$, $BD = y$.

б) Рассмотрите частные случаи (аналогичные разобранным в свойстве 3).

11 (Л.Емельянов). На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D так, что равны радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABD и ACD. Докажите, что равны радиусы вневписанных окружностей этих треугольников, касающихся сторон AD и CD соответственно.

Список литературы и веб-ресурсов

1. *Н.Х.Агаханов и др.* Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993–2009: Заключительные этапы. – М.: МЦНМО, 2010.
2. *А.В.Акопян.* Геометрия в картинках. – Москва, 2011.
3. *Р.К.Гордин.* Геометрия. Планиметрия. Задачник для 7 – 9 классов. – М.: МЦНМО, 2004.
4. *И.А.Кушнир.* Геометрия на баррикадах – 2. – Киев: Знания Украины, 2011.
5. Материалы для проведения заключительного этапа XXXVII Всероссийской олимпиады школьников, 2010/11 учебный год. – Москва, 2011.
6. *В.В.Прасолов.* Задачи по планиметрии: в 2 ч. – М.: Наука, 1995.
7. *И.Ф. Шарыгин, Р.К. Гордин.* Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами. – М.: Астрель, 2001.
8. olympiads.mccme.ru/ustn – устные геометрические олимпиады.
9. www.problems.ru – база задач по математике.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Воробьями по пушкам!

А.ПОЛЯНСКИЙ

В ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ, ПОЛЬЗУЯСЬ ДВУМЯ ПРОСТЫМИ И элегантными фактами, решим две достаточно сложные задачи. Возникает ситуация, обратная пословице «из пушек по воробьям», поэтому мы и назвали статью «Воробьями по пушкам!» Все дальнейшие рассуждения напрямую будут связаны с расположением точек на картинке, поэтому автор надеется, что добросовестный читатель проверит все «в общем случае».

Вначале введем несколько обозначений. Пусть задан неравнобедренный треугольник ABC ($AB < BC$), на его сторонах AB и BC выбраны точки C_0 и A_0 соответственно, точка B_1 – середина дуги ABC описанной окружности ω треугольника ABC, точка I – центр окружности, вписанной в треугольник ABC, точка M – середина стороны AC. Равенство $B_1A = B_1C$ считаем очевидным.

А вот и наши факты-«воробьи».

Факт 1. *Равенство $AC_0 = CA_0$ выполняется тогда и только тогда, когда точки A_0, C_0, B_1, B лежат на одной окружности.*

Доказательство. Пусть $AC_0 = CA_0$ (рис. 1). Тогда треугольники AC_0B_1 и CA_0B_1 равны, поскольку $AC_0 = CA_0$, $AB_1 = CB_1$, $\angle BAB_1 = \angle BCB_1$ (как два угла, опирающихся на одну и ту же дугу BB_1). Из равенства треугольников получаем

$$\angle C_0B_1A_0 = \angle C_0B_1A + \angle AB_1A_0 = \angle AB_1A_0 + \angle A_0B_1C = \angle AB_1C = \angle ABC .$$

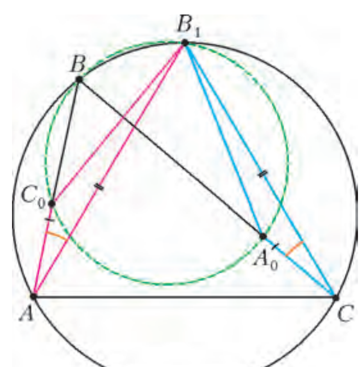

Рис. 1

А последнее означает, что точки A_0, C_0, B_1, B лежат на одной окружности ω_0. В обратную сторону утверждение теперь становится очевидным.

Факт 2. *Окружность, описанная около треугольника A_0BC_0, проходит через I тогда и только тогда, когда $AC_0 + CA_0 = AC$.*

Доказательство. Пусть точки A_0, B, C_0, I лежат на одной окружности (рис.2). Обозначим через C_0', A_0', B_0' точки касания вписанной окружности со сторонами AB, BC, CA соответственно. Если точки A_0 и C_0 совпадают с точками касания вписанной окружности A_0' и C_0' (в таком случае четырехугольник $BC_0'IA_0'$ – вписанный), то $AC_0' + CA_0' = AB_0' + CB_0' = AC$. Если же не совпадают, и точка A_0 лежит между A_0' и C (случай, когда A_0 лежит между B и A_0', рассматривается аналогично), то прямоугольные треугольники $IC_0'C_0$ и $IA_0'A_0$ равны по катету и углу: $IC_0' = IA_0'$ и $\angle IA_0B = 180° - \angle IC_0B = \angle IC_0A$ (первое равенство углов следует из того, что четырехугольник BC_0IA_0