Изогональное сопряжение и педальные треугольники

Д.ПРОКОПЕНКО

В ПЕРВОЙ ЧАСТИ ЭТОЙ СТАТЬИ МЫ ПОвторим некоторые понятия и факты, связанные с изогональным сопряжением. Большинство из этих фактов известны и содержатся во многих источниках (см., например, недавнюю статью [1], для более глубокого изучения изогонального сопряжения рекомендуем статью [5]). Во второй части мы сконцентрируем свое внимание на замечательном факте о том, что изогонально сопряженные точки имеют общую педальную окружность. Оказывается, этот факт можно связать с сюжетами многих олимпиадных задач.

Основные свойства изогоналей и геометрия треугольника

Изогоналями относительно сторон угла (или изогональными прямыми) называются прямые, проходящие через вершину угла и симметричные относительно биссектрисы этого угла (рис.1). Часто используется следующее свойство изогоналей.

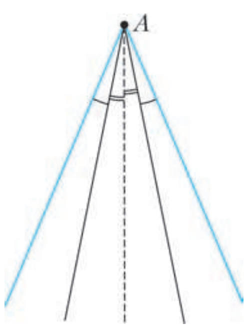

Рис. 1

Свойство 1. *Пусть AP и AQ – изогонали угла с вершиной A, а B_1 и C_1 – проекции*

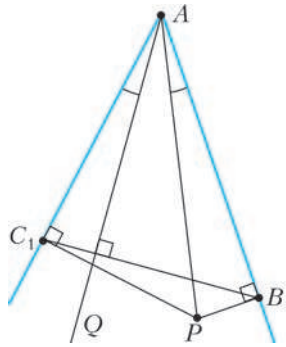

Рис. 2

точки P на стороны угла (рис.2). Тогда $AQ \perp B_1C_1$.

Упражнение 1. Докажите это свойство.

Пусть из точки P на прямые BC, AC и AB опущены перпендикуляры PA_1, PB_1 и PC_1 (рис. 3). Треугольник $A_1B_1C_1$ называется

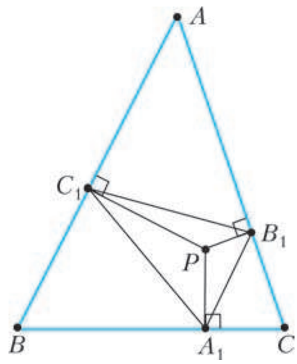

Рис. 3

педальным треугольником точки P относительно треугольника ABC, а его описанная окружность – *педальной окружностью* точки P. Если точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC, то педальный треугольник вырождается и точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

Будем использовать обозначения: O – центр описанной окружности, H – точка пересечения высот (ортоцентр) треугольника ABC. В следующем утверждении мы встречаем важный пример изогоналей в треугольнике:

Радиус описанной окружности и высота, проведенные из одной вершины треугольника, изогональны относительно угла треугольника (рис.4).

Упражнение 2. Докажите это.

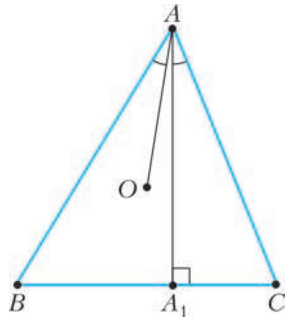

Рис. 4

Пусть в треугольнике ABC провели высоты. Треугольник с вершинами в основаниях высот называется *ортотреугольником*. Ортотреугольник является педальным треугольником ортоцентра H. Тогда по свойству 1 получаем:

Радиус описанной окружности, проведенный из вершины треугольника, перпендикулярен соответствующей стороне ортотреугольника (рис.5).

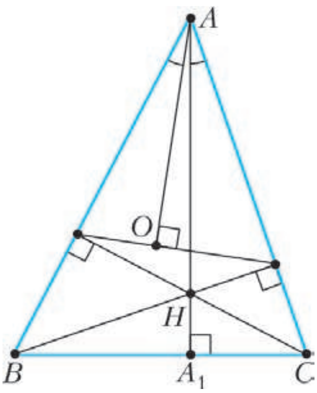

Рис. 5

Упражнение 3. Из точки K внутри треугольника ABC опущены перпендикуляры KA_1, KB_1 и KC_1 на стороны BC, AC, AB соответственно. Через точку A_1 проведена прямая l_1, параллельная прямой, симметричной прямой AK относительно биссектрисы угла A. Прямые l_2, l_3 определяются аналогично. Докажите, что прямые l_1, l_2, l_3 пересекаются в одной точке.

Указание. Пусть прямые l_A и AK – изогонали $\angle BAC$, тогда по условию $l_1 \parallel l_A$. По свойству 1 имеем $l_A \perp B_1C_1$.

Отметим еще одно свойство изогоналей.

Свойство 2. *Пусть AP и AQ – изогонали относительно угла, а точки X и Y симметричны P относительно сторон угла (рис.6).*

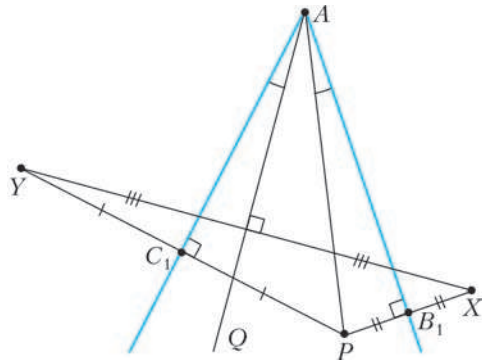

Рис. 6

Тогда AQ является серединным перпендикуляром к отрезку XY.

Доказательство. Согласно свойству 1, $AQ \perp B_1C_1$, $B_1C_1 \parallel XY$ (как средняя линия). Тогда $AQ \perp XY$. Теперь заметим, что в точке A пересекаются серединные перпендикуляры к сторонам PX и PY треугольника PXY. Или чуть иначе: $YA = AP = AX$, тогда треугольник AXY – равнобедренный, и перпендикуляр к стороне XY является серединным перпендикуляром к XY.

Пусть точки X, Y и Z симметричны P относительно прямых AC, AB и BC (рис.7). Треугольник XYZ будем называть *удвоенным педальным треугольником* точки P относительно треугольника ABC. Из свойства 2 вытекает такое следствие:

Изогонали являются серединными перпендикулярами к сторонам удвоенного педального треугольника.

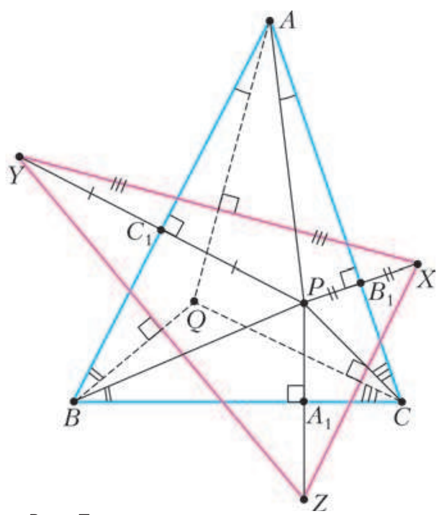

Рис. 7

Изогональное сопряжение

Теорема 1. *Пусть точка P не лежит на описанной окружности треугольника ABC. Тогда прямые, изогональные к прямым AP, BP и CP, пересекаются в одной точке (рис.8,а).*

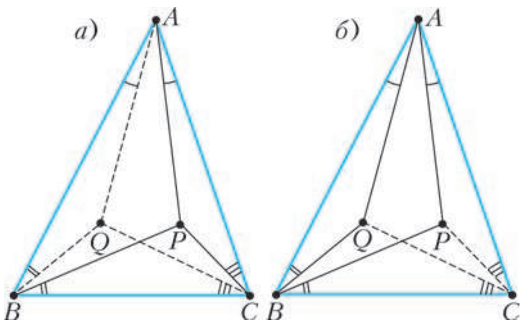

Рис. 8

Обозначим точку пересечения Q. Точка Q называется *изогонально сопряженной* для точки P. Можно также говорить, что точки P и Q изогонально сопряжены.

Пользуясь следствием из свойства 2, мы можем доказать теорему и сразу получить *геометрический смысл точки Q: это центр описанной окружности удвоенного педального треугольника XYZ.*

Теорему 1 используют и в немного другой формулировке.

Теорема 1′. *Если AP и AQ, BP и BQ – две пары изогоналей в треугольнике ABC, то CP и CQ – тоже изогонали (рис.8,б).*

Отметим, что если точка P лежит на описанной окружности и отлична от вершин треугольника ABC, то изогонали к AP, BP и CP параллельны друг другу.

Упражнение 4. Докажите это.

Очевидно, биссектриса изогональна сама себе. Тогда центр вписанной и центры вневписанных окружностей изогонально сопряжены сами себе.

Упражнение 5. а) На биссектрисе угла A треугольника ABC внутри треугольника взяты точки D и F так, что $\angle DBC = \angle FBA$. Докажите, что $\angle DCB = \angle FCA$.

б) Точка M расположена внутри треугольника ABC, A_1 – точка, симметричная M относительно внешней биссектрисы угла A; аналогично определяются точки B_1, C_1. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

в) Пусть AA_0, BB_0, CC_0 – высоты в треугольнике ABC, M – произвольная точка, A_1 – точка, симметричная M относительно стороны BC; аналогично определяются точки B_1, C_1. Докажите, что прямые B_0B_1, C_0C_1, A_0A_1 пересекаются в одной точке.

Указания. б) Прямые пересекаются в точке, изогонально сопряженной M относительно треугольника ABC; в) докажите, что стороны треугольника ABC лежат на внешних биссектрисах для треугольника $A_0B_0C_0$, и воспользуйтесь п.б).

Центр описанной окружности и ортоцентр

Вспомним, что радиус описанной окружности и высота, проведенные из одной вершины треугольника, изогональны. Тогда точки O и H – изогонально сопряжены.

Упражнение 6. а) Пусть прямая a проходит через вершину A треугольника ABC и перпендикулярна стороне B_1C_1 ортотреугольника. Прямые b и c определяются аналогично. Докажите, что прямые a, b и c пересекаются в одной точке.

б) Пусть H_1, H_2, H_3 – точки, симметричные H относительно сторон треугольника ABC. Докажите, что точки H_1, H_2, H_3 лежат на описанной окружности треугольника ABC.

в) Через основание высоты AA_1 треугольника ABC проведена прямая l_1, параллельная прямой AO. Прямые l_2, l_3 определяются аналогично. Докажите, что прямые l_1, l_2, l_3 пересекаются в одной точке.

Точка пересечения касательных и удвоенная медиана

Пусть AM – медиана треугольника ABC. Сделаем стандартное построение. Удвоим медиану AM за точку M и получим точку D. Построим точку P, изогональную к D. Для этого достаточно построить изогонали к BD и CD. Пусть углы треугольника равны $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. Отложим от стороны BA угла ABC изогональ к BD (рис. 9,*а*). Тогда эта прямая образует со стороной BC угол α. Аналогично построим изогональ к CD. Пусть полученные прямые пересекаются в точке P. Мы получили, что $\angle PBC = \angle PCB = \angle BAC = \alpha$. По известному признаку (угол между касательной и хордой) PB и CP – касательные к описанной окружности треугольника ABC. Тогда по теореме 1′ AP является изогональю для медианы AM относительно угла BAC. Эта изогональ называется *симедианой*. Мы получили основное свойство симедианы:

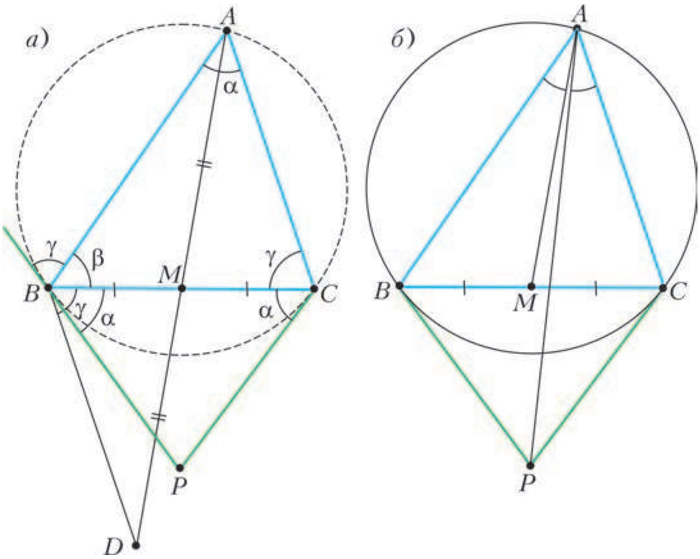

Рис. 9

Симедиана, проведенная через вершину A, проходит через точку пересечения касательных, проведенных в точках B и C к описанной окружности треугольника ABC (рис. 9,б).

Подробнее о свойствах симедианы можно прочитать в статье [4].

Упражнение 7. а) (Устная олимпиада по геометрии, 2004 г.) Пусть C_1 и B_1 – проекции точки P пересечения касательных, проведенных в точках B и C к описанной окружности треугольника ABC, AM – медиана. Тогда $AM \perp B_1C_1$.

б) (Всероссийская олимпиада, 2013 г.) Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность Ω. Касательные, проведенные к Ω в точках B и C, пересекаются в точке P. Точки D и E – основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые AB и AC. Докажите, что точка пересечения высот треугольника ADE является серединой отрезка BC.

Общая педальная окружность

Вернемся к изучению свойств изогоналей угла. Пусть AP и AQ – изогонали угла BAC.

Свойство 3. *Проекции точек P и Q на стороны угла AB и AC лежат на одной окружности (рис.10), причем центр этой окружности – середина отрезка PQ.*

Упражнение 8. Докажите это свойство.

Теперь мы готовы доказать основную теорему этого раздела.

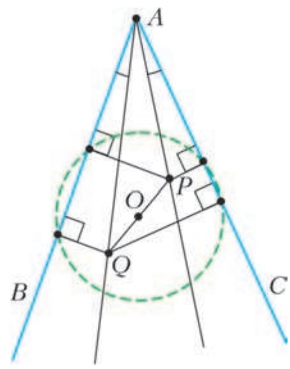

Рис. 10

Теорема 2. *Педальные окружности изогонально сопряженных точек P и Q совпадают.*

Доказательство. По свойству 3 проекции точек P и Q на прямые AB и BC лежат на одной окружности (рис.11). То же верно и для проекций точек P и Q на прямые AB и AC. Но эти две окружности имеют общий

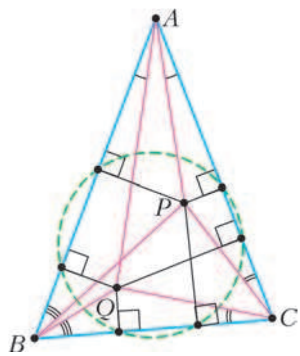

Рис. 11

центр – середину отрезка PQ. Кроме того, они имеют общую точку, значит, эти окружности совпадают.

Упражнение 9 (финальный тур Олимпиады имени И.Ф.Шарыгина, 2006 г.). Дан треугольник ABC и точка P внутри него. Точки A', B', C' – проекции P на прямые BC, CA, AB. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника $A'B'C'$, лежит внутри треугольника ABC.

Посмотрим, какой результат даст теорема 2 для уже знакомой пары изогонально сопряженных точек O и H. Вершины педального треугольника точки O – середины сторон, а для точки H – основания высот. Тогда по теореме 2 все эти шесть точек лежат на одной окружности. Эта окружность называется *окружностью Эйлера*.

Далее применим нашу теорию для решения задач.

Четырехугольник с двумя равными противоположными углами

Задача 1. *Диагонали параллелограмма $ABCD$ (отличного от прямоугольника) пересекаются в точке M (рис.12). Докажите, что точка M, а также основания*

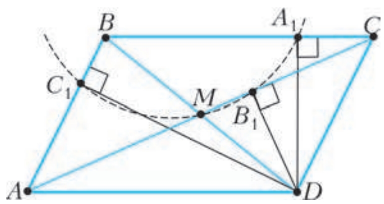

Рис. 12

перпендикуляров, опущенных из точки D на прямые BC, CA и AB, лежат на одной окружности.

Переформулируем задачу. Надо доказать, что точка M лежит на педальной окружности точки D относительно треугольника ABC ($A_1B_1C_1$ – педальный треугольник точки D). По теореме 2 на этой же окружности лежат проекции на стороны треугольника ABC изогонально сопряженной точки. Если мы докажем, что одна из проекций совпала с M, то задача решена.

Решение. Построим точку P, изогонально сопряженную к D. Поскольку BD – удвоенная медиана, то, по свойству симедианы, P – точка пересечения касательных к описанной окружности треугольника ABC, проведен-

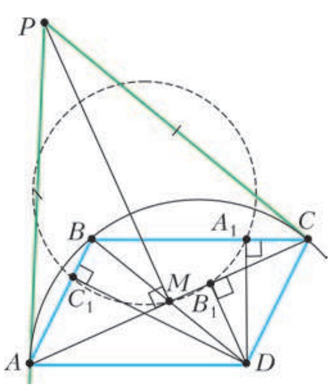

Рис. 13

ных в точках A и C (рис.13). По теореме 2 точки P и D имеют общую педальную окружность. Точка M – проекция точки P на AC. Следовательно, точка M лежит на окружности $A_1B_1C_1$.

Оказывается, что эту задачу можно обобщить.

Задача 2 (о четырехугольнике). *В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы A и C равны (рис.14). Докажите, что основания*

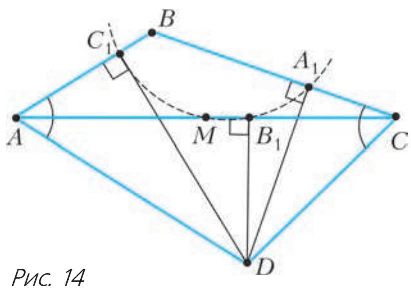

Рис. 14

перпендикуляров, опущенных из точки D на прямые AB, BC, AC, и середина отрезка AC лежат на одной окружности или на одной прямой.

Упражнения

10. Докажите это.

Указание. Пусть точка P – изогонально сопряженная к D относительно треугольника ABC. Докажите, что M – проекция P на AC.

11 (М991). В треугольнике ABC точка M – середина BC, H – основание высоты, проведенной из A на BC. Точки P и Q внутри угла BAC выбраны так, что $\angle BAP = \angle CAQ$, $BP \perp PA$, $AQ \perp QC$ (рис.15). Докажите, что точки P, Q, M и H лежат на одной окружности.

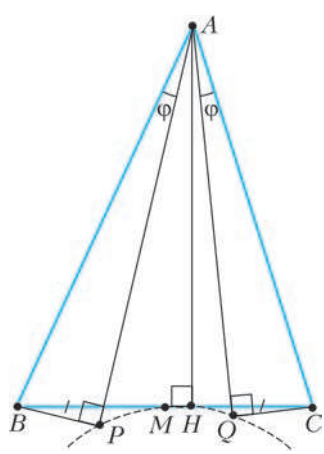

Рис. 15

Указание. Эта конструкция похожа на задачу о четырехугольнике.

12 (Московская математическая олимпиада, 1987 г.). Точка P внутри треугольника ABC такова, что $\angle PBA = \angle PCA$ (рис.16). Пусть C_1 и B_1 – проекции точки P на стороны AB и AC

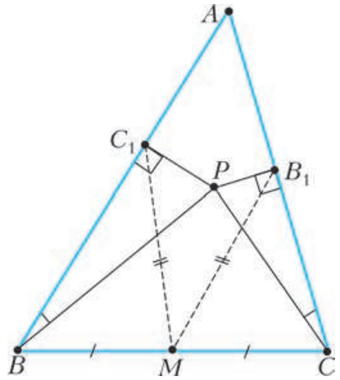

Рис. 16

соответственно, M – середина BC. Докажите, что $MB_1 = MC_1$.

Указание. Заметим, что в условии уже есть проекции точки P на две стороны и середина стороны. Добавим еще точку A_1 – проекцию точки P на сторону BC. Таким образом можно построить конструкцию из задачи 2 (для случая невыпуклого четырехугольника $ABPC$). Останется доказать равенство хорд в окружности, проходящей через A_1, B_1, C_1, M.

Снова точка пересечения касательных и удвоенная медиана

Рассмотрим точку P пересечения касательных к описанной окружности треугольника ABC, проведенных в точках B и C, и удвоенную медиану AD (рис.17). Воспользуемся теперь теоремой об общей педальной окружности, чтобы «придумать» задачу. Мы уже знаем, что точки P и D изогонально сопряжены и у них общая педальная окружность. А теперь «спрячем» некоторые элементы конструкции. Именно, попробуем избавиться в условии задачи от точки D (которая была бы подсказкой к решению). Проведем высоту AH. Поскольку $ABDC$ – параллелограмм, то проекция X точки D на BC и точка H симметричны относительно середины M отрезка BC, т.е. $CX = BH$. Теперь мы готовы сформулировать задачу, которая практически эквивалентна сложной олимпиадной задаче (упражнение 13).

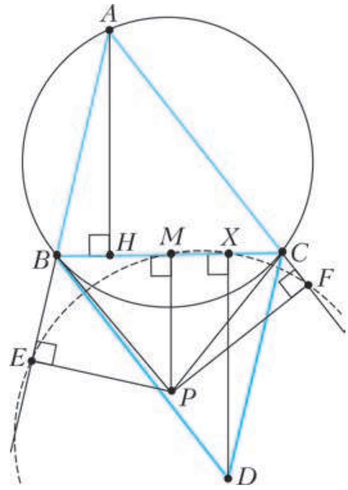

Рис. 17

Задача 3. *В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведена высота AH, точка M – середина BC. Касательные к описанной окружности треугольника ABC, проведенные в точках B и C, пересекаются в точке P. На стороне BC отложили отрезок $CX = BH$. Точки E и F – проекции точки P на стороны AB и AC. Докажите, что точки E, F, M и X лежат на одной окружности.*

Упражнения

13 (Всероссийская олимпиада, 2015 г.). В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены медиана AM и высота AH. На прямых AB и AC отмечены точки Q и P соответственно так, что $QM \perp AC$ и $PM \perp AB$ (рис.18). Окружность, описанная около треугольника PMQ, пересекает прямую BC вторично в точке X. Докажите, что $BH = CX$.

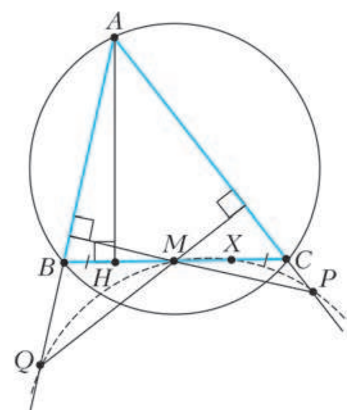

Рис. 18

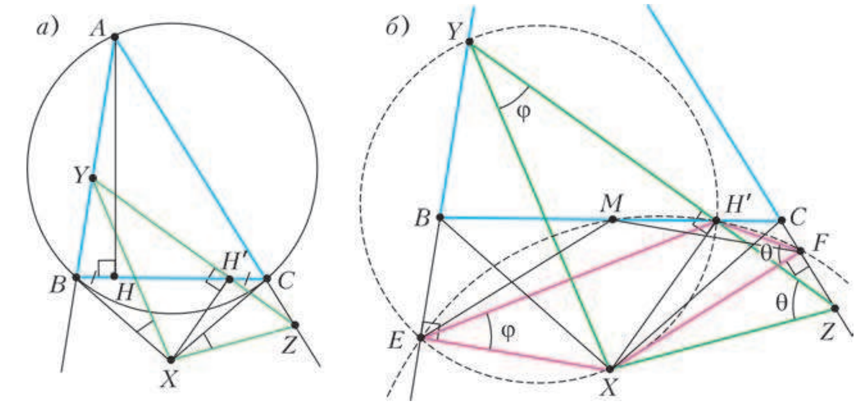

Рис. 19

Указание. «Верните» на чертеж точку пересечения касательных к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C и воспользуйтесь результатом упражнения 7,б.

14 (заочный тур Олимпиады имени И.Ф.Шарыгина, 2017 г.). Касательные к описанной окружности треугольника ABC, проведенные в точках A и B, пересекаются в точке D. Окружность, проходящая через проекции D на прямые BC, CA, AB, повторно пересекает AB в точке C'. Аналогично строятся точки A', B'. Докажите, что прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.

В завершение попробуем решить еще одну довольно сложную задачу.

Задача 4 (Иранская олимпиады по геометрии, 2014 г.). *Пусть H – основание высоты из вершины A треугольника ABC и H' – точка, симметричная точке H относительно середины стороны BC (рис. 19,а). Касательные к описанной окружности треугольника ABC, проведеные в точках B и C, пересекаются в точке X. Перпендикуляр к XH', проведенный в точке H', пересекает прямые AB и AC в точках Y и Z соответственно. Докажите, что $\angle YXB = \angle ZXC$.*

Решение. Рассмотрим случай остроугольного треугольника (другие случаи читатель может разобрать аналогично).

Поскольку BX и CX – касательные, имеем $\angle CBX = \angle BCX = \angle A$, откуда $\angle BXC = 180° - 2\angle A$.

Пусть $\angle XYZ = \varphi$, $\angle XZY = \theta$. Для решения достаточно доказать, что $\angle YXZ = 2\angle A$ или, эквивалентно, $\varphi + \theta = 2\angle A$.

Пусть E и F – проекции точки X на AB и AC (рис.19,*б*). Заметим, что четырехугольник $XH'YE$ – вписанный, следовательно, $\angle XYH' = \angle XEH' = \varphi$. Аналогично, $\angle XZH' = \angle XFH' = \theta$. Из четырехугольника $AEXF$ найдем $\angle EXF = 180° - \angle A$. Остается убедиться, что $\angle EH'F = 180° - \angle A$ (тогда по сумме углов в четырехугольнике $XFH'E$ получим, что $\varphi + \theta = 2\angle A$).

Пришла пора применить полученные знания про эту конструкцию. Нам уже известно, что точки E, M (середина BC), H', F лежат на одной окружности. Тогда $\angle EH'F = \angle EMF$. Кроме того, согласно упражнению 7,б, $EM \perp AC$, $FM \perp AB$, откуда легко получаем, что $\angle EMF = 180° - \angle A$.

Задача решена.

Список литературы

1. *П.Кожевников.* Изогонально сопряженные точки. – «Квант», 2016, №1.

2. *В.В.Прасолов.* Точки Брокара и изогональное сопряжение. – М.: МЦНМО, 2000.

3. *А.В.Акопян.* Геометрия в картинках. – М.: МЦНМО, 2011.

4. *Ю.Блинков.* Симедиана. – «Квант», 2015, №4.

5. *А.Акопян, А.Заславский.* Разные взгляды на изогональное сопряжение. – «Математическое просвещение», 2007, вып. 11.