Еще раз о точке Фейербаха

П. А. Кожевников

Знаменитая теорема Фейербаха гласит, что в любом треугольнике окружность девяти точек[1)] касается вписанной окружности.[2)] Точка касания окружности девяти точек и вписанной окружности называется *точкой Фейербаха*. В этой заметке предлагается геометрическое доказательство теоремы Фейербаха, которое дает возможность описать точку Фейербаха и, в частности, получить отличное от авторского геометрическое решение задачи 8 из задачного раздела «Математического просвещения», вып. 14, 2010 г. (авторское решение приведено в статье [1]).

Лемма Саваямы (лемма о сегменте) и теорема о луночках

Начнем со следующего утверждения, которое оказывается полезным во многих геометрических сюжетах с касающимися окружностями.

Теорема 1 (лемма Саваямы). *Пусть B, C, X, Y — точки на окружности Ω, а окружность ω касается окружности Ω и касается прямых BX и CY в точках K и L. Тогда прямая KL проходит через центр вписанной окружности либо одной из вневписанных окружностей треугольника BCY (а также треугольников BCX, XYB, XYC).*

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в статье [3]. Некоторые варианты конфигурации из теоремы 1 показаны на рис. 1.

Следующую теорему сформулировал И. Богданов.

Теорема 2 (о луночках[3)]). *Пусть зафиксированы точки B и C, окружность Ω, проходящая через B и C, а также дуга Γ некоторой окружности, имеющая концами точки B и C. На дуге Γ выбирается*

[1)] Окружность девяти точек — это окружность, которая проходит через середины сторон, основания высот и середины отрезков, соединяющие вершины треугольника с его ортоцентром.

[2)] Окружность девяти точек касается также вневписанных окружностей треугольника.

[3)] В некотором смысле утверждение теоремы 2 эквивалентно теореме о сегменте из статьи [2]. Кроме предложенной конфигурации можно рассматривать другие, например, со случаем внешнего касания окружностей.

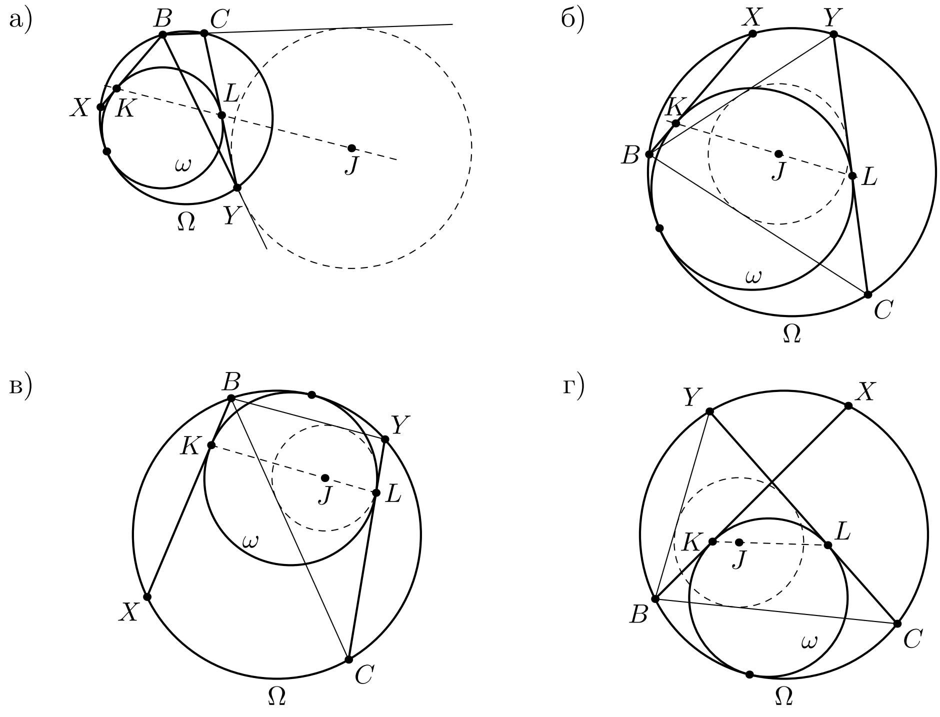

Рис. 1.

некоторая точка A. Обозначим через γ окружность, вписанную в треугольник ABC, и через r — ее радиус. Пусть прямые AB и AC пересекают вторично Ω в точках X и Y соответственно. Пусть ω — окружность, вписанная в угол BAC, которая касается Ω в точке T, касается отрезков BX и CY соответственно в точках K и L, и такая, что ровно один из отрезков AT и XY пересекает прямую BC[4] *(см. рис. 2), r_ω — радиус окружности ω. Тогда отношение радиусов $\dfrac{r}{r_\omega}$ не зависит от выбора точки A на дуге Γ.*

Доказательство.[5] Пусть I_ω — центр окружности ω, I — центр окружности γ; I_ω и I лежат на биссектрисе угла BAC. Заметим, что углы $\angle(AB, AC)$, $\angle(AB, AI)$, $\angle(AB, KL)$ и $\angle(KL, KI_\omega)$[6] постоянны. Теперь

[4] Если отказаться от последнего условия, то ω, возможно, неоднозначно определена.

[5] Идея излагаемого здесь доказательства принадлежит Н. Белухову; некоторые изменения и упрощения произошли в процессе занятия с командой России на международной олимпиаде школьников 2010 г.

[6] Здесь и далее $\angle(a, b)$ обозначает угол от прямой a до прямой b, отсчитываемый против часовой стрелки.

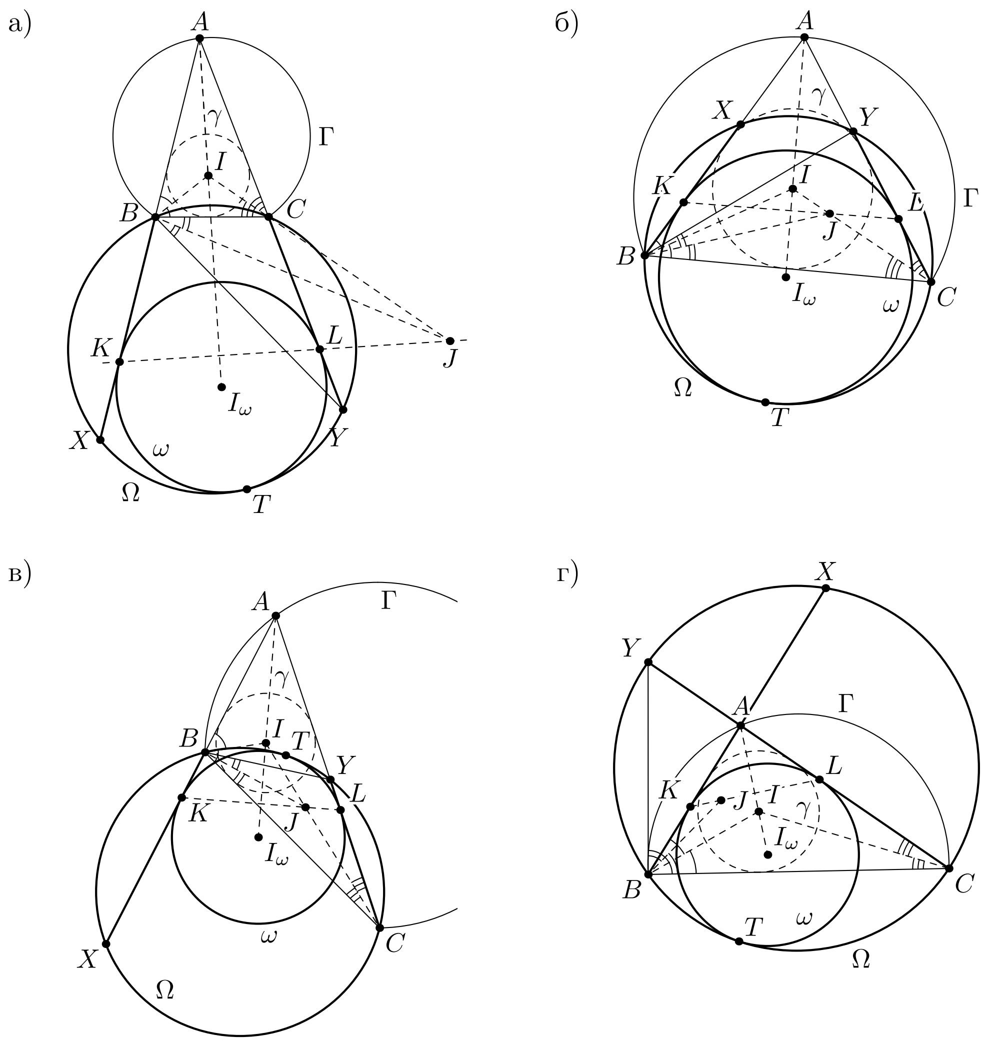

Рис. 2.

достаточно доказать, что $\angle(KL, KI)$ постоянный. Действительно, тогда для двух различных положений точки A на дуге Γ существует преобразование подобия, совмещающее четверки точек A, K, I_ω, I, значит, отношение $\dfrac{r}{r_\omega} = \dfrac{AI}{AI_\omega}$ для двух различных положений точки A одно и то же.

Прямые BI и CI — биссектрисы углов треугольника ABC. Пусть $J = CI \cap KL$, тогда по теореме 1 J — центр вписанной или вневписанной окружности треугольника BCY. Подсчет углов (с учетом $KL \perp AI$) дает $\angle(CI, KL) = \angle(BI, BA)$, то есть $\angle(JI, JK) = \angle(BI, BK)$, значит точки

I, J, K, B лежат на одной окружности, откуда $\angle(KL, KI) = \angle(KJ, KI) = \angle(BJ, BI)$. Но угол $\angle(BY, BA)$ постоянный, а следовательно и угол $\angle(BJ, BI)$ между биссектрисами углов YBC и ABC постоянный. $\square$

Доказательство теоремы Фейербаха

Теперь можно дать следующее доказательство теоремы Фейербаха.[7)]

Пусть H — ортоцентр треугольника ABC, Γ — дуга BAC окружности, описанной около треугольника ABC, Ω — окружность (BHC). Как нетрудно видеть, $\angle(BA, CA) = \angle(CH, BH)$, это означает что Γ и Ω имеют равные радиусы, и при отражении относительно BC дуга Γ переходит в дугу окружности Ω.

В обозначениях теоремы 2 рассмотрим окружность ω (рис. 2). Из теоремы 2 следует, что отношение радиусов $\dfrac{r}{r_\omega}$ постоянно. Поэтому достаточно рассмотреть частный случай $AB = AC$. Если $AB = AC$, то картинка симметрична относительно серединного перпендикуляра к BC; в таком случае окружность γ касается отрезка BC в его середине M, а окружность ω касается дуги BC в ее середине N. Из симметрии окружностей (ABC) и Ω относительно BC имеем $AM = MN$. Гомотетия с центром A, переводящая M в N, очевидно, переводит γ в ω, поэтому $\dfrac{r}{r_\omega} = \dfrac{AM}{AN} = \dfrac{1}{2}$.

Возвращаясь к общему случаю, имеем $\dfrac{r}{r_\omega} = \dfrac{1}{2}$. Это означает, что гомотетия h с центром A и коэффициентом $\dfrac{1}{2}$ переводит окружность ω в окружность γ. Гомотетия h переводит окружность Ω, проходящую через B, C, H, в окружность, проходящую через середины отрезков AB, AC, AH, то есть в окружность девяти точек треугольника ABC. При гомотетии касание окружностей сохраняется, поэтому γ и окружность девяти точек касаются. $\square$

Описание точки Фейербаха

С помощью следующей теоремы мы решим задачу 8 «Математического просвещения» из вып. 14, хотя рассматриваемая здесь конструкция интересна сама по себе.

Теорема 3. *Пусть окружности Ω и ω касаются внутренним образом в точке T. Из точек B и C окружности ω проведены соответственно касательные BK и CL к окружности ω $(K, L \in \omega)$. Пусть*

[7)]Используя соответствующую конфигурацию теоремы о луночках так же можно доказать, что вневписанные окружности касаются окружности девяти точек.

$S = BC \cap KL$ (*см. рис.* 3). *Тогда прямая* ST *проходит через середину дуги* BC *окружности* Ω (*если* $KL \parallel BC$, *то* T — *середина дуги* BC).[8]

Доказательство. Достаточно доказать, что TS — это биссектриса (внутренняя или внешняя — в зависимости от конфигурации) угла BTC, то есть, что $\frac{SB}{SC} = \frac{BT}{CT}$.

Применяя теорему Менелая к треугольнику, образованному прямыми BC, BK и CL, с секущей KL, и используя равенство длин касательных к ω, проведенных из одной точки, получаем: $\frac{SB}{SC} = \frac{BK}{CL}$.

Пусть D и E — вторые точки пересечения прямых TB и TC с ω. При гомотетии с центром T, переводящей ω в Ω, точки D и E перейдут соответственно в B и C, значит $DE \parallel BC$. Поэтому $\frac{BD}{CE} = \frac{BT}{CT}$. Отсюда $\frac{SB^2}{SC^2} = \frac{BK^2}{CL^2} = \frac{BD \cdot BT}{CE \cdot CT} = \frac{BT^2}{CT^2}$, то есть $\frac{SB}{SC} = \frac{BT}{CT}$, что и требовалось.[9] $\square$

Задача. В треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 — точки касания сторон BC, CA, AB со вписанной окружностью соответственно, A_0, B_0, C_0 — середины сторон BC, CA, AB соответственно. Пусть $C' = A_0B_0 \cap A_1B_1$, $A' = B_0C_0 \cap B_1C_1$, $B' = C_0A_0 \cap C_1A_1$. Докажите, что A_1A', B_1B' и C_1C' пересекаются в точке Фейербаха.

Решение. Докажем, что A_1F проходит через A', где F — точка Фейербаха. Аналогично доказывается, что B_1F и C_1F проходят через B' и C' соответственно, откуда следует утверждение задачи.

Используем обозначения из теоремы 2.

Если $KL \parallel BC$, то $AB = AC$, и утверждение очевидно из симметрии.

---

[8] Частный случай этой теоремы, когда точка пересечения BK и CL лежит на окружности Ω — это задача И. Ф. Шарыгина, предлагавшаяся на соросовской олимпиаде.

[9] Приведем построение, из которого следует другое доказательство теоремы 3. Пусть изначально дана окружность ω с центром O и точки B и C вне ее. Пусть из B проведены касательные BK_1 и BK_2, а из C — касательные BL_1 и BL_2 (K_1, K_2, L_1, $L_2 \in \omega$). Положим $S = K_1L_1 \cap K_2L_2$, $R = K_1L_2 \cap K_2L_1$, $Z = K_1K_2 \cap L_1L_2$. Тогда тройка точек S, R, Z *автополярна* относительно ω (то есть для любой точки из этой тройки прямая, проходящая через две другие, является ее полярой). Как известно, точки R, B, S, C лежат на одной прямой, причем эта четверка точек — гармоническая. Пусть ZO пересекает ω в точках Q_1 и Q_2. Касательные к ω, проведенные в Q_1 и Q_2, параллельны BC, так как $ZO \perp SR$. Пусть Q_1R и Q_2R пересекают вторично ω соответственно в точках T_1 и T_2. Тогда T_1Q_2 и T_2Q_1 пересекаются в точке, лежащей на поляре точки R и на поляре точки Z, то есть в точке S. Центральное проектирование с центром T_1 переводит четверку R, B, S, C в гармоническую четверку точек Q_1, D, Q_2, E окружности ω. Так как Q_1Q_2 — диаметр, то $Q_1Q_2 \perp DE \parallel BC$. Это означает, что существует гомотетия с центром T_1, переводящая треугольник T_1DE в треугольник T_1BC, а окружность ω — в окружность Ω, описанную вокруг треугольника T_1BC и касающуюся ω. Эта гомотетия переводит Q_2 в середину дуги BC окружности Ω, значит S, T_1, Q_2 и середина дуги BC лежат на одной прямой.

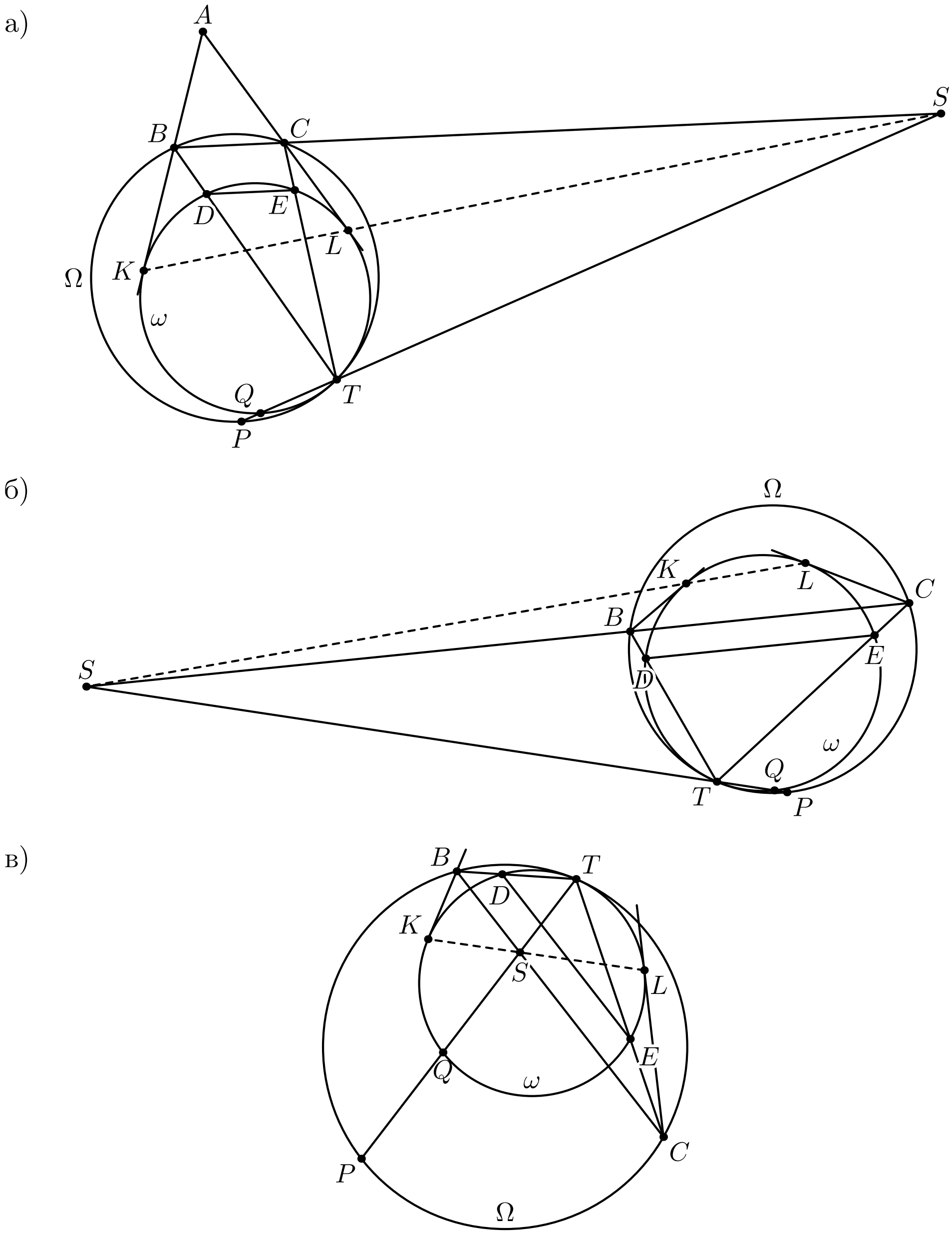

Рис. 3.

Пусть $S = KL \cap BC$. По теореме 3 прямая ST пересекает вторично Ω в точке P — середине дуги BC. Касательная к Ω, проведенная в P, параллельна BC. Пусть ST пересекает вторично ω в точке Q (см. рис. 3). При гомотетии с центром T, переводящей Ω в ω, точка P переходит в Q, поэтому касательная к ω, проведенная в Q, также параллельна BC.

Теперь, как и выше в доказательстве теоремы Фейербаха, применим гомотетию h с центром в точке A и коэффициентом $\frac{1}{2}$. При этой гомотетии ω переходит во вписанную окружность γ, причем точка Q переходит в A_1 (касательные к ω и γ в точках Q и A_1 параллельны). При гомотетии h прямая BC переходит в прямую B_0C_0, прямая KL — в прямую B_1C_1, поэтому точка $S = BC \cap KL$ переходит в $A' = B_0C_0 \cap B_1C_1$. Как мы видели в доказательстве теоремы Фейербаха, h переводит T в F. Так как прямая QT проходит через точку S, то прямая A_1F проходит через точку A', что и требовалось доказать. $\square$

Список литературы

[1] Ивлев Ф. *Несколько прямых, проходящих через точку Фейербаха* // Математическое Просвещение. Сер. 3, вып. 15. 2011. С. 219–228.

[2] Протасов В. *Вокруг теоремы Фейербаха* // Квант. №9. 1992. С. 51–58.

[3] Протасов В. *Касающиеся окружности: от Тебо до Фейербаха* // Квант. №4. 2008. С. 10–15.

П. А. Кожевников, МФТИ