Теорема Фейербаха по Шарыгину И. Ф.

`Данный текст является фрагментом из [1], задача №555.`

В 1998 году участникам Всероссийской олимпиады предлагалась такая задача И. Ф. Шарыгина

Проведём через основание биссектрисы угла A разностороннего треугольника ABC отличную от стороны BC касательную к вписанной в треугольник окружности. Точку её касания с окружностью обозначим через K_a. Аналогично построим точки K_b и K_c. Докажите, что три прямые, соединяющие точки K_a, K_b и K_c с серединами сторон BC, CA и AB соответственно, имеют общую точку, причём эта точка лежит на вписанной окружности(рис.1).

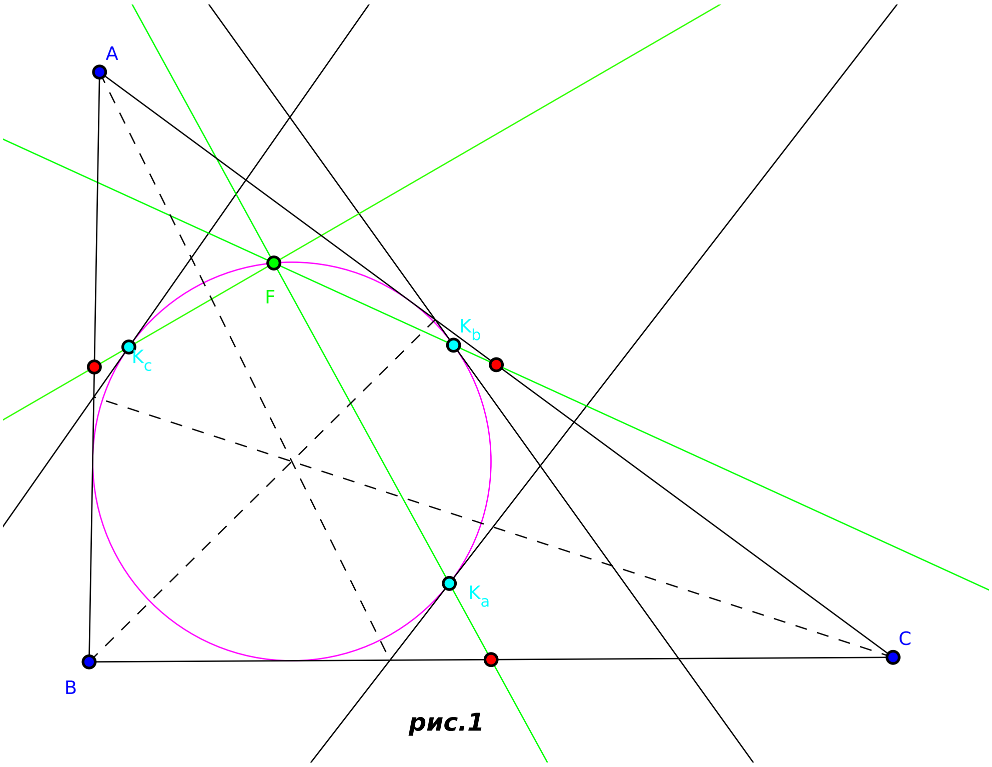


рис.1

Доказательство.
Сначала докажем, что стороны треугольника $K_aK_bK_c$ параллельны соответствующим сторонам треугольника ABC. Пусть $AC > AB$(рис.2) Имеем равенства $\angle POL = \angle K_aOL$ и $\angle POB = \angle ROB$, поэтому $\angle K_aOR = 2\angle LOB$. Угол LOB внешний в треугольнике AOB, значит $\angle K_aOR = \alpha + \beta$. Подобными же рассуждениями получаем, что $\angle K_bOR = \alpha + \beta$. Следовательно, точки K_a и K_b симметричны относительно прямой OR, поэтому $K_aK_b || AB$. Итак, соответствующие стороны треугольников $M_aM_bM_c$ и $K_aK_bK_c$ параллельны(M_a, M_b, M_c – середины сторон треугольника), поэтому эти треугольники гомотетичны. Центр этой гомотетии является общей точкой прямых M_aK_a, M_bK_b и M_cK_c.

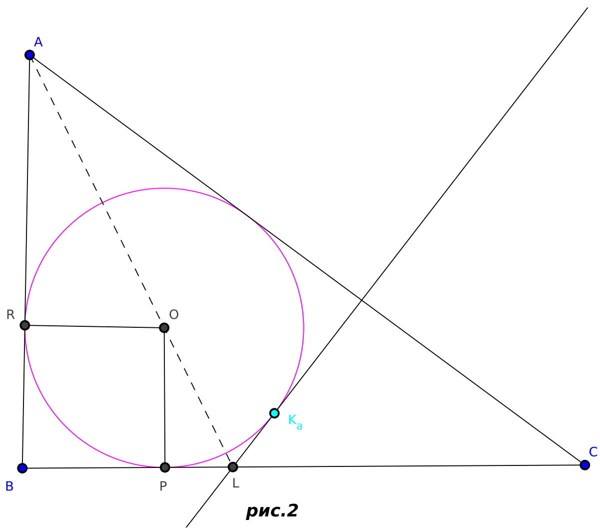


рис.2

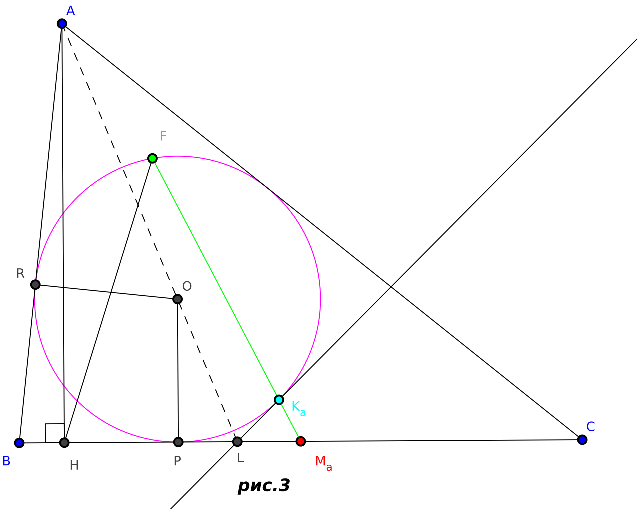


рис.3

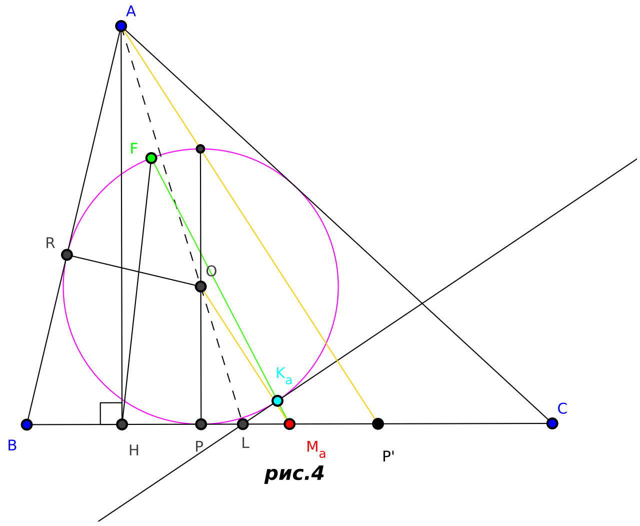


рис.4

Перейдём ко второй части утверждения. Пусть прямая M_aK_a вторично пересекает вписанную в треугольник ABC окружность в точке F(рис.3). Докажем, что описанная вокруг треугольника FK_aL окружность проходит через основание высоты H треугольника ABC. Для этого достаточно проверить выполнение равенства $M_aL \cdot M_aH = M_aP^2$, так как $M_aP^2 = M_aK_a \cdot M_aF$.

Пользуясь параллельностью прямых AH и OP, равенством $M_aP' = M_aP$[1](рис.4) и теоремой Фалеса, получаем

$$\frac{M_aP}{M_aL} = \frac{M_aP'}{M_aL} = \frac{OA}{OL} = \frac{PH}{LP} = \frac{PM_a + PH}{M_aL + LP} = \frac{M_aH}{M_aP}.$$

Так как четырёхугольник FK_aLH вписанный, углы M_aFH и M_aLK_a равны. Угол M_aLK_a легко выражается через углы треугольника ABC: $\angle M_aLK_a = \beta - \gamma$. Рассмотрим теперь четырёхугольник M_bFHM_a. Заметим, что $\angle HCA = \angle CHM_b = \gamma$, $\angle CM_aM_b = \beta$. Поэтому $\angle M_aM_bH = \beta - \gamma$, значит M_aFHM_b – вписанный и, следовательно, $\angle M_aFM_b = \angle M_aHM_b = \gamma$.

Обозначим через K точку пересечения отрезка FM_b со вписанной окружностью(рис. 5). Так как вписанный в окружность угол K_aFK равен γ, а дуга RK_a вписанной окружности равна $\alpha + \beta$, точки K_a и K симметричны относительно этой прямой. Значит точки K и K_b совпадают, что означает, что прямые M_aK_a и M_bK_b пересекаются в точке F вписанной окружности. □

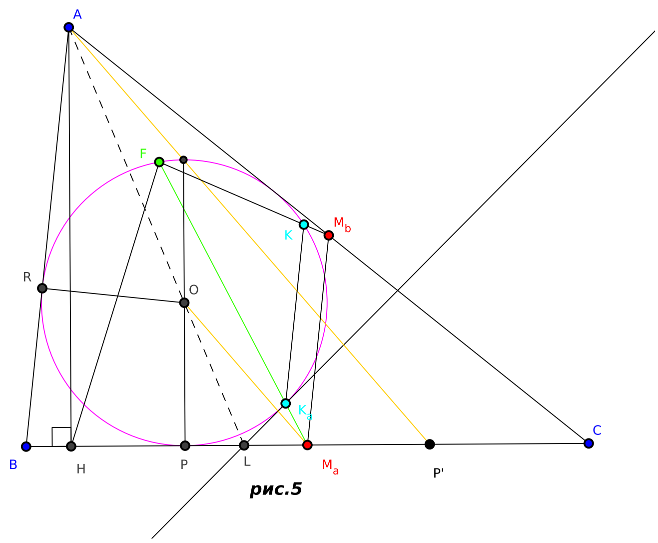
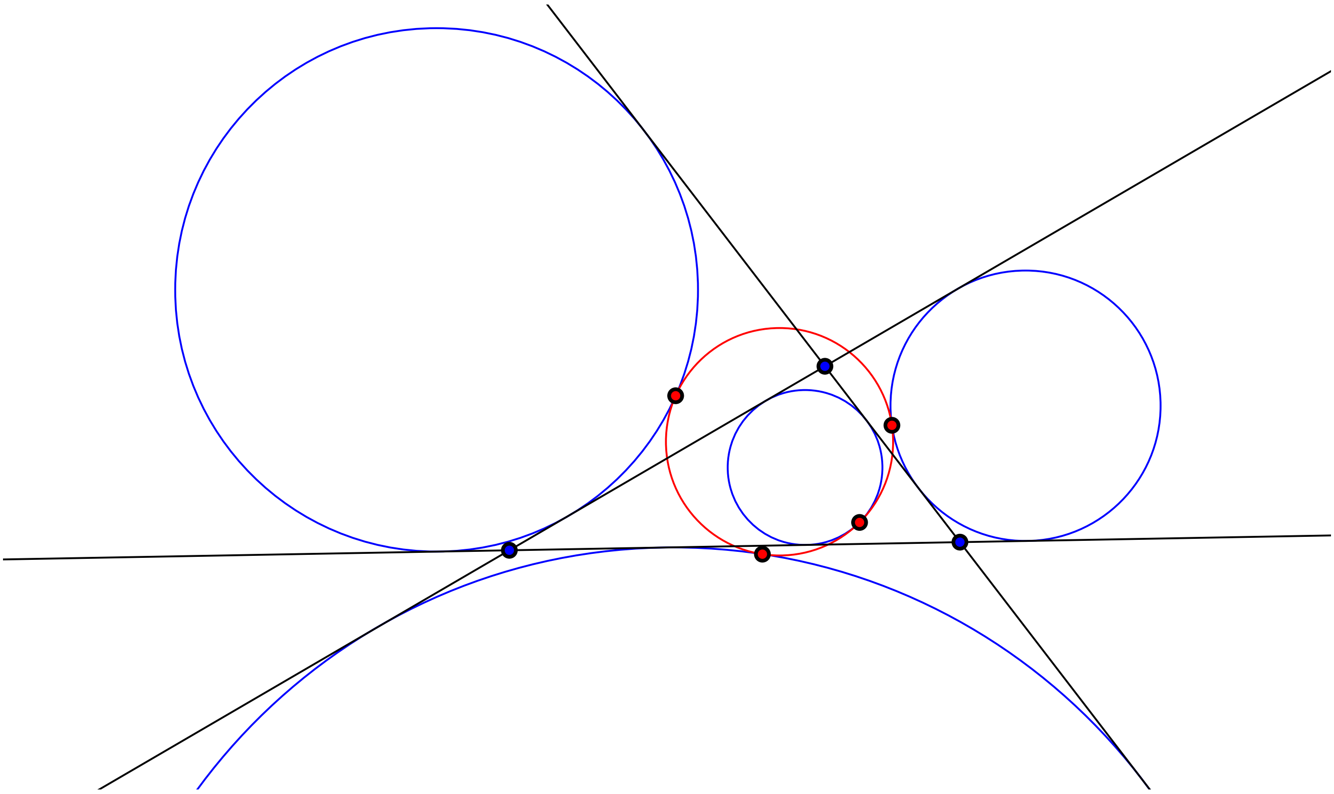


рис.5

На самом деле, из доказанного следует **теорема Фейербаха**, которая гласит, что *окружность девяти точек и вписанная окружность касаются.*

Доказательство теперь совсем простое. При гомотетии с центром в точке F, переводящей треугольник $M_aM_bM_c$ в треугольник $K_aK_bK_c$, окружность 9-ти точек переходит во вписанную. Но F их общая точка, следовательно, эти окружности касаются в точке F. □

[1] Равенство этих отрезков можно получить, используя гомотетию, которая переводит вписанную окружность во вневписанную.



Список литературы

[1] Н. Х. Агаханов, И. И. Богданов, П. А. Кожевников, О. К. Подлипский, Д. А. Терёшин. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993–2006. МЦНМО, 2007 год. (http://math.ru/lib/files/pdf/olimp/Vseross.pdf)