



секреты преподавания математики

В.В.Вавилов, А.В.Устинов

МНОГОУГОЛЬНИКИ НА РЕШЕТКАХ

Москва
Издательство МЦНМО
2006

УДК 514.112
ББК 22.151.0
В12

*Работа подготовлена к печати в рамках
существующей системы научных грантов
Клуба ФМШ Колмогорова, выделяемых
на конкурсной основе преподавателям
и выпускникам школы им. А. Н. Колмогорова*

Вавилов В. В., Устинов А. В.

В12 Многоугольники на решетках. — М.: МЦНМО, 2006. — 72 с.: ил.
ISBN 5-94057-246-4

Решетки на плоскости являются тем замечательным мостом (с достаточно интенсивным двусторонним движением), который позволяет задачи алгебры, анализа, теории чисел переводить на геометрический язык и наоборот — задачи дискретной геометрии облекать в аналитическую форму. Основу книги составляют вопросы, связанные с возможностью расположения на решетках правильных или «полуправильных» многоугольников (только с равными сторонами или только с равными углами), формулой Пика для площади многоугольника на решетке и ее тесной связью с комбинаторной формулой Эйлера.

Книга написана на основе лекций, которые один из авторов читал в школе им. А. Н. Колмогорова при МГУ, на Малом мехмате МГУ, а также для студентов, аспирантов и преподавателей вузов как у нас в стране, так и за рубежом.

Библиография: 51 наименование.

ББК 22.151.0

ISBN 5-94057-246-4

© В. В. Вавилов, А. В. Устинов, 2006.
© МЦНМО, 2006.

О г л а в л е н и е

Предисловие	4
Глава 1. Решетки на плоскости и в пространстве	6
§ 1.1. Основные свойства решеток	6
§ 1.2. Фундаментальный параллелограмм	10
§ 1.3. Кристаллографическое неравенство	15
§ 1.4. Области Дирихле	18
Упражнения и задачи	23
Глава 2. Правильные многоугольники на решетках	26
§ 2.1. Треугольник и квадрат	26
§ 2.2. Правильные многоугольники	30
§ 2.3. Полуправильные многоугольники	38
§ 2.4. Правильные многогранники	41
Упражнения и задачи	43
Глава 3. Две знаменитые формулы	45
§ 3.1. Формула Пика	45
§ 3.2. Формула Эйлера	52
§ 3.3. Обобщения формулы Пика	56
§ 3.4. Приложения формулы Пика	59
Упражнения и задачи	63
Литература	66

Предисловие

Клетчатая бумага (точнее — ее узлы), на которой мы часто предпочитаем рисовать и чертить, является одним из важнейших примеров точечной решетки на плоскости. Уже эта простая решетка послужила К. Гауссу отправной точкой для сравнения площади круга с числом точек с целыми координатами, находящихся внутри него. То, что некоторые простые геометрические утверждения о фигурах на плоскости имеют глубокие следствия в арифметических исследованиях, было в явном виде замечено Г. Минковским в 1896 г., когда он впервые для рассмотрения теоретико-числовых проблем привлек геометрические методы.

Основное содержание книги сконцентрировано около вопросов, находящихся на границе геометрии и арифметики. Какие правильные многоугольники можно расположить на решетке так, что все его вершины попадают в узлы решетки? А как обстоит дело с ответом на этот же вопрос для пяти правильных многогранников на пространственной решетке? Имеется ли простая формула для вычисления площади многоугольника, расположенного на решетке? Книга посвящена ответам на эти и некоторые другие вопросы. Показано, например, что прямым следствием полного ответа на первый вопрос является утверждение об иррациональности значений основных тригонометрических функций. При доказательстве формулы Г. Пика, дающей ответ на второй из этих вопросов, установлены тесные ее связи с известной комбинаторной формулой Л. Эйлера о графах. Много интересного и поучительного активный читатель сможет обнаружить и при решении задач, приведенных в конце каждой главы книги. Многие из этих задач встречались на различного рода школьных и студенческих математических соревнованиях.

Решетка на плоскости является мощным средством, которое позволяет переводить аналитические задачи на геометрический язык и обратно. Движение на этом своеобразном мосту между анализом и геомет-

рией стало достаточно интенсивным и двусторонним. Мы приглашаем наших читателей встретиться на этом мосту и полюбоваться красотами раскинувшейся панорамы.

Апрель 2006 г.

В. В. Вавилов¹, А. В. Устинов²

¹[e-mail:wavilov@tochka.ru](mailto:wavilov@tochka.ru)

²[e-mail:ustinov@mech.math.msu.su](mailto:ustinov@mech.math.msu.su)

Г л а в а 1

Решетки на плоскости и в пространстве

§ 1.1. Основные свойства решеток

Рассмотрим на плоскости два семейства параллельных прямых, разбивающих плоскость на равные параллелограммы; множество L всех точек пересечения этих прямых (или множество вершин всех параллелограммов) называется *точечной решеткой* или просто *решеткой*, а сами точки — *узлами решетки*. Любой из этих параллелограммов называется *фундаментальным параллелограммом* или параллелограммом, порождающим решетку; площадь фундаментального параллелограмма решетки L обозначим через $\Delta = \Delta(L)$. Обычно предполагается, что начало координат является одним из узлов решетки.

Задать решетку можно еще и так. Предположим, что на плоскости заданы две пересекающиеся прямые l_0 и m_0 , а также два положительных числа a и b . По обе стороны от прямой l_0 проведем параллельные прямые $l_{\pm 1}, l_{\pm 2}, l_{\pm 3}, \dots$ на расстояниях $a, 2a, 3a, \dots$ от нее. Аналогично по обе стороны от прямой m_0 на расстояниях $b, 2b, 3b, \dots$ проведем прямые $m_{\pm 1}, m_{\pm 2}, m_{\pm 3}, \dots$. Отметим все точки пересечения прямых l_i с прямыми m_j ; множество всех этих точек пересечения и является решеткой L (рис. 1.1).

Важно иметь в виду, что решетка состоит из точек (узлов), а сами прямые к ней не относятся. Одна и та же решетка может быть получена при помощи различных семейств параллельных прямых.

На рис. 1.2 изображена так называемая *ортогональная целочисленная решетка* \mathbb{Z}^2 , состоящая из точек с целыми координатами в декартовой системе координат. То же семейство точек можно получить пересечением других семейств прямых, не являющихся ортогональными. Таким образом, решетка точек напрямую не связана с семейством прямых в отличие от ее фундаментального параллелограмма.

Решетку можно построить, начиная с любого параллелограмма, следующим образом. Отметим вершины данного параллелограмма, затем

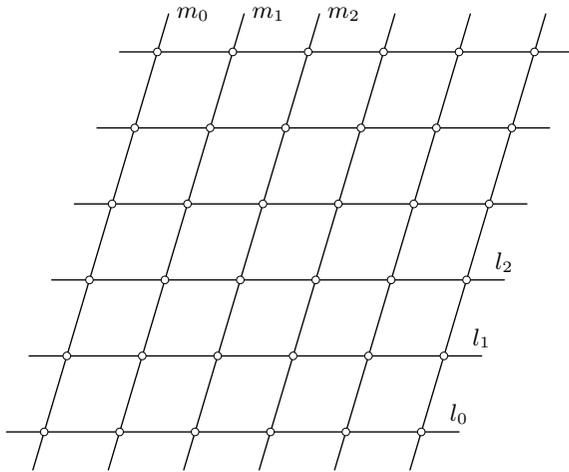


Рис. 1.1

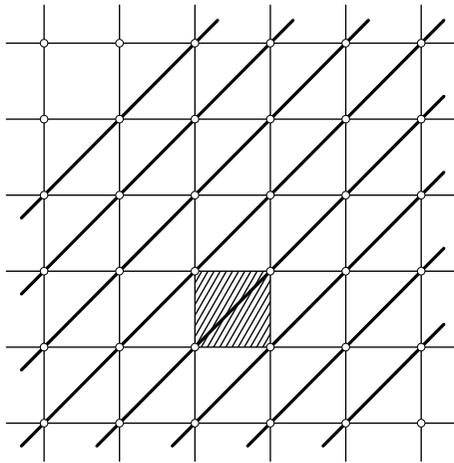


Рис. 1.2

сдвинем его параллельно одной из его сторон на длину этой стороны, и отметим две вновь полученные вершины. Если этот процесс продолжим сначала в одном направлении, а затем в противоположном, то мы получим на плоскости полосу, граница которой содержит два ряда точек — вершин этих параллелограммов.

Сдвинем эту полосу параллельно самой себе в направлении другой стороны данного параллелограмма на длину этой стороны; отметим

вновь получившиеся точки (вершины параллелограмма) и представим себе, что и этот процесс продолжен в обоих направлениях. Множество точек, отмеченных таким образом, образует решетку, а параллелограмм, с которого мы начинали, является фундаментальным, т. е. порождает эту решетку.

Другой удобный способ задания решетки на плоскости состоит в следующем. Пусть \mathbf{a} и \mathbf{b} — ненулевые и неколлинеарные векторы, O — начало координат. Тогда множество $L(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ всех таких точек P , что $\overrightarrow{OP} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b}$, где m, n — целые числа, является решеткой. Так, например, имеем $\mathbb{Z}^2 = L(\mathbf{i}, \mathbf{j})$, где \mathbf{i} и \mathbf{j} — два взаимно перпендикулярных вектора единичной длины. Более того, любую решетку можно задать именно таким образом, выбрав два вектора, которые начинаются в одном узле решетки, а свои концы имеют в различных вершинах некоторого фундаментального параллелограмма.

Начиная с трех ненулевых и некопланарных векторов, легче всего определить решетки точек в пространстве; так, ортогональная целочисленная решетка \mathbb{Z}^3 в пространстве получается, например, при выборе (в декартовой системе координат) трех векторов $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$.

Так же как и на плоскости, пространственную решетку можно построить, начиная с произвольного параллелепипеда. Аналогично могут быть определены решетки и в пространствах больших размерностей.

Отметим ряд простейших свойств произвольных точечных решеток.

1. Прямая, проходящая через два узла решетки, содержит бесконечно много узлов решетки. При этом все расстояния между соседними узлами, лежащими на этой прямой, равны между собой.

2. Преобразование параллельного переноса плоскости (пространства), переводящего один узел решетки в другой ее узел, переводит решетку саму в себя.

3. Решетка центрально-симметрична относительно середины любого отрезка, который соединяет два узла этой решетки. Более того, середины всех отрезков с концами в узлах данной решетки образуют новую решетку, включающую старую.

4. (*Правило параллелограмма.*) Если три вершины параллелограмма являются узлами решетки, то и четвертая его вершина — тоже узел решетки. В пространстве: если четыре вершины параллелепипеда, не лежащие в одной плоскости, являются узлами решетки, то и остальные его вершины — также узлы решетки.

5. Если параллелограмм с вершинами в узлах решетки не содержит других узлов на сторонах и внутри себя, то он эту решетку порождает.

ет, т. е. является ее фундаментальным параллелограммом. Более того, это свойство является критерием того, что параллелограмм является фундаментальным.

Аналогичное свойство имеет место и для фундаментального параллелепипеда в пространстве.

Простые доказательства свойств 1–3 непосредственно вытекают из рассмотрения решетки в форме $L(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Поэтому мы ограничимся доказательством только двух последних из перечисленных выше свойств.

Для доказательства важного свойства 4 предположим, что $ABCD$ — параллелограмм и точки A, B, C принадлежат решетке L . Мы должны доказать, что точка D лежит на пересечении двух прямых из каких-то различных семейств параллельных прямых, которые определяют эту решетку. Точки A, B и C — узлы решетки, поэтому они лежат на некоторых параллельных прямых p, q и r из одного семейства (рис. 1.3). (Если $p = q$, то доказательство очевидно.)

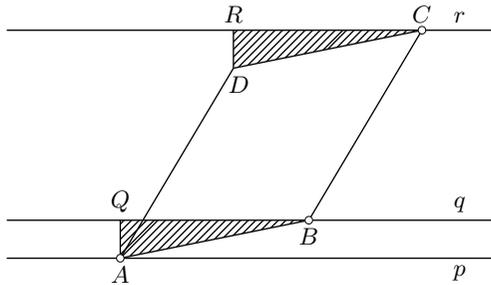


Рис. 1.3

Из точки A опустим перпендикуляр AQ на прямую q , а из точки D — перпендикуляр DR на прямую r . Треугольники ABQ и DCR подобны, так как их стороны соответственно параллельны. Но $AB = CD$, значит, эти треугольники равны; следовательно, $AQ = DR$. Последнее означает, что прямая, проходящая через точку D и параллельная прямой r , принадлежит тому же семейству параллельных прямых, которому принадлежат прямые p, q, r . Таким образом, D лежит на прямой одного из двух семейств параллельных прямых, определяющих решетку. Аналогично показывается, что точка D лежит также и на прямой из другого семейства параллельных прямых, определяющих решетку. Это и завершает доказательство свойства 4.

Для доказательства свойства 5 заметим, что параллелограмм, все вершины которого являются узлами решетки и который содержит ка-

кой-либо другой узел решетки внутри себя или на сторонах, не может породить всю эту решетку, так как, сдвигая его, чтобы построить решетку, которую он задает, мы «пропустим» узлы исходной решетки.

Пусть теперь параллелограмм $P = ABCD$ не содержит никаких других узлов данной решетки L , кроме своих вершин. Начиная с P , построим решетку L' , как мы это делали выше. Нужно показать, что $L = L'$.

Ясно, что решетка L' содержится в L . Предположим, что существует такой узел E решетки L , который не является узлом решетки L' . Так как параллелограмм P порождает решетку, то вся плоскость покрыта равными параллелограммами, и поэтому точка E лежит внутри некоторого параллелограмма $P' = A'B'C'D'$ или на его сторонах; при этом стороны параллелограмма P' параллельны соответствующим сторонам параллелограмма P (рис. 1.4). Параллельный перенос на вектор $A'A$ переводит (по свойству 2) обе решетки сами в себя.

Но тогда узел E перейдет в некоторый узел решетки L , который будет расположен внутри или на сторонах параллелограмма P , чего быть не может по сделанному предположению.

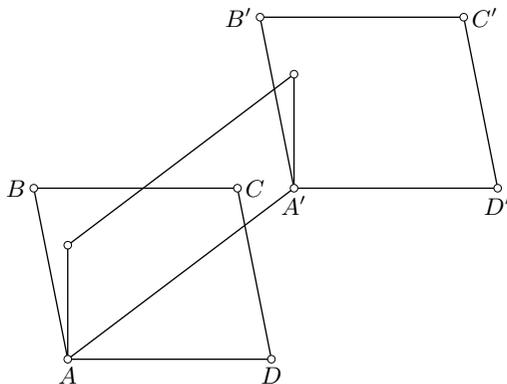


Рис. 1.4

§ 1.2. Фундаментальный параллелограмм

Треугольник с вершинами в узлах решетки называется *примитивным*, если кроме своих вершин он не имеет внутри себя и на своих сторонах других узлов решетки. Очевидно, что всякий фундаментальный параллелограмм разрезается диагональю на два примитивных треуголь-

ника. Верно и обратное утверждение (см. задачу 1.1). Множество примитивных треугольников решетки \mathbb{Z}^2 довольно богато (рис. 1.5), но не содержит остроугольных треугольников (см. задачу 1.3). Основное свойство фундаментальных параллелограммов и примитивных треугольников содержится в следующем утверждении.

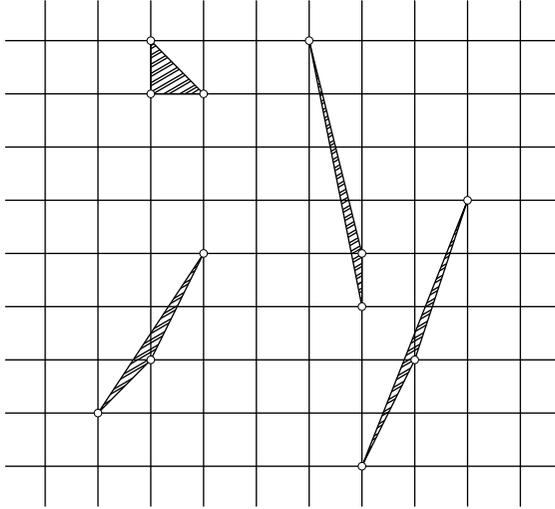


Рис. 1.5

Теорема 1.1. *Все фундаментальные параллелограммы (а следовательно, и примитивные треугольники) данной решетки имеют равные площади.*

Доказательство. Приведем доказательство теоремы для решетки \mathbb{Z}^2 , оставляя общий случай в качестве упражнения. Достаточно доказать (см. свойство 5), что все примитивные треугольники имеют равные площади.

Пусть $T = ABC$ — примитивный треугольник. Находясь на решетке \mathbb{Z}^2 , достаточно доказать, что $[ABC] = \Delta(\mathbb{Z}^2) = 1/2$, где $[F]$ здесь и всюду в дальнейшем будет обозначать площадь фигуры F . Рассмотрим произвольный минимальный описанный около треугольника ABC прямоугольник P с вершинами в узлах решетки \mathbb{Z}^2 и сторонами, параллельными осям координат, который описан около треугольника ABC . Из всех а priori возможных случаев (рис. 1.6) взаимного расположения треугольника и прямоугольника для примитивного треугольника наиболее общим является ситуация, показанная на рис. 1.6 г.

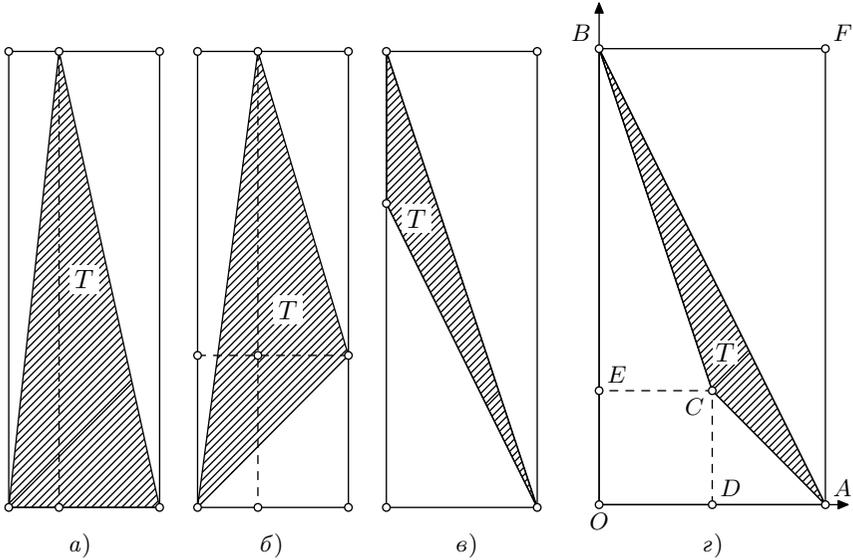


Рис. 1.6

Действительно, в случаях *a)* и *б)* из правила параллелограмма следует, что треугольник T не является примитивным; случай *г)* включает в себя случай *в)*, если считать, что вершина C может располагаться на OB или OA (в частности, может совпадать с O).

На рисунке 1.6 *г)* без ограничения общности можно считать, что точка O является началом координат; пусть точки D и A имеют соответственно координаты $(p, 0)$ и $(q, 0)$, а точки E и B — координаты $(0, r)$ и $(0, s)$.

Обозначим через $I(M)$ число узлов решетки, расположенных строго внутри многоугольника M , но не на его сторонах. Тогда

$$I(OAFB) = (q - 1)(s - 1).$$

Так как внутри отрезка AB нет узлов решетки, то

$$I(OAB) = \frac{1}{2}I(OAFB) = \frac{1}{2}(q - 1)(s - 1).$$

Аналогично,

$$I(ACD) = \frac{1}{2}(q - p - 1)(r - 1), \quad I(CBE) = \frac{1}{2}(s - r - 1)(p - 1).$$

Так как треугольник T не содержит внутри себя узлов решетки, то

$$I(OAB) - I(ACD) - I(CBE) = pr,$$

где pr — число узлов решетки, расположенных внутри прямоугольника $ODCE$, включая число узлов на его сторонах CD и CE . Отсюда следует, что

$$(q-1)(s-1) - (q-p-1)(r-1) - (s-r-1)(p-1) = 2pr$$

и, тем самым,

$$qs - ps - qr = 1.$$

Значит,

$$\begin{aligned} [ABC] &= [OAB] - [ACD] - [CBE] - [ODCE] = \\ &= \frac{1}{2}sq - \frac{1}{2}(p-q)r - \frac{1}{2}(s-r)p - pr = \frac{1}{2}(qs - ps - qr) = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Следующий результат дает возможность быстро находить фундаментальные параллелограммы и решает вопрос о том, когда разные пары векторов порождают одну и ту же решетку.

Теорема 1.2. Пара векторов $\mathbf{a} = m\mathbf{e}_1 + n\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{b} = k\mathbf{e}_1 + l\mathbf{e}_2$, где m, n, k, l — целые числа, тогда и только тогда порождает ту же решетку, что и векторы \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 , т. е. $L(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, когда

$$|ml - nk| = 1.$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1.1. Тогда достаточно установить, что площадь параллелограмма $P(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, построенного на векторах \mathbf{a}, \mathbf{b} , отличается от площади параллелограмма $P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, построенного на векторах \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 , множителем $|ml - nk|$.

Мы рассмотрим случай, когда числа m, n, k, l положительны и $n > l, k > m$ (этот случай изображен на рис. 1.7), оставляя вполне аналогичный разбор остальных случаев в качестве упражнения.

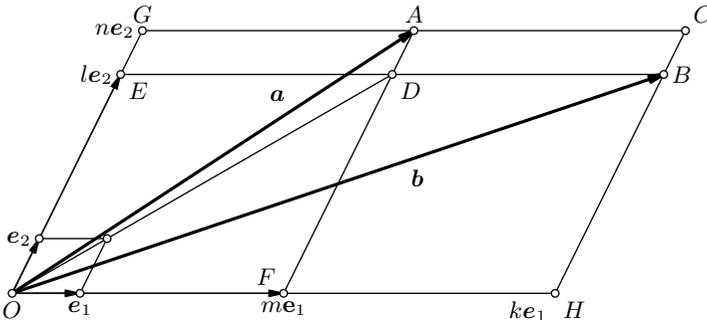


Рис. 1.7

Обозначим площади параллелограммов $P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ и $P(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ через Δ и Δ' соответственно. Тогда $\Delta' = 2[OAB]$. С другой стороны,

$$[ADBC] = 2[ADB], \quad [ADEG] = 2[ADO], \quad [DBHF] = 2[DBO].$$

В результате имеем

$$\Delta' = [ADBC] + [ADEG] + [DBHF] = [OGCH] - [OEDF].$$

Наконец,

$$[OGCH] = nk\Delta, \quad [OEDF] = ml\Delta,$$

откуда

$$\Delta' = (nk - ml)\Delta,$$

что и утверждает теорема в рассматриваемом на рис. 1.7 случае.

Замечание. Если векторы \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 порождают решетку \mathbb{L} , то квадрат расстояния между двумя какими-то ее узлами выражается величиной

$$|m\mathbf{e}_1 + n\mathbf{e}_2|^2,$$

где m, n — целые числа.

По свойствам скалярного произведения

$$\begin{aligned} |m\mathbf{e}_1 + n\mathbf{e}_2|^2 &= (m\mathbf{e}_1 + n\mathbf{e}_2, m\mathbf{e}_1 + n\mathbf{e}_2) = \\ &= |\mathbf{e}_1|^2 m^2 + 2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)mn + |\mathbf{e}_2|^2 n^2, \end{aligned}$$

т. е.

$$|m\mathbf{e}_1 + n\mathbf{e}_2|^2 = am^2 + 2bmn + cn^2, \quad (*)$$

где $a = |\mathbf{e}_1|^2$, $b = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = |\mathbf{e}_1||\mathbf{e}_2| \cos \varphi$, $c = |\mathbf{e}_2|^2$ и φ — угол между векторами \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 . Кроме того, ясно, что $a > 0$ и $c > 0$. Площадь фундаментального параллелограмма решетки можно вычислить из формулы

$$\Delta^2(\mathbb{L}) = |\mathbf{e}_1|^2 |\mathbf{e}_2|^2 \sin^2 \varphi = |\mathbf{e}_1|^2 |\mathbf{e}_2|^2 (1 - \cos^2 \varphi) = ac - \frac{b^2}{4}.$$

Таким образом, в формуле (*) имеем

$$ac - \frac{b^2}{4} > 0.$$

Число $D = 4ac - b^2 = 4\Delta^2(\mathbb{L})$ называется *дискриминантом* решетки \mathbb{L} .

Наоборот, если даны три числа a, b, c таких, что $a > 0$, $c > 0$ и $4ac - b^2 > 0$, то им соответствует некоторая решетка, для которой квадрат расстояния между узлами выражается по формуле (*). Действительно, по условию $4ac/b^2 > 1$ и, тем самым, существует такой острый (или прямой) угол φ , для которого $\cos \varphi = |b|/2\sqrt{ac}$. Теперь выберем векторы \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 так, чтобы $|\mathbf{e}_1| = \sqrt{a}$, $|\mathbf{e}_2| = \sqrt{c}$, а угол между этими

векторами был бы равен φ ; тогда ясно, что равенство (*) будет выполнено.

Таким образом, имеется теснейшая связь между квадратичными формами вида (*) и решетками на плоскости.

§ 1.3. Кристаллографическое неравенство

Для каждой решетки L с фиксированной величиной $\Delta(L)$ наименьшее расстояние $d = d(L)$ между двумя узлами решетки может быть достаточно малым, например, такой может быть решетка, составленная из прямоугольников с длинами сторон d и $\Delta(L)/d$. Но это число d для произвольной решетки не может быть очень большим, так как в этом случае решетка будет иметь площадь своего фундаментального параллелограмма больше $\Delta(L)$.

Теорема 1.3. Для наименьшего расстояния $d = d(L)$ между узлами решетки L с площадью фундаментального параллелограмма $\Delta = \Delta(L)$ имеет место неравенство

$$d \leq \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} \Delta}.$$

При этом знак равенства реализуется на единственной решетке, составленной из ромбов с острым углом 60° (рис. 1.8).

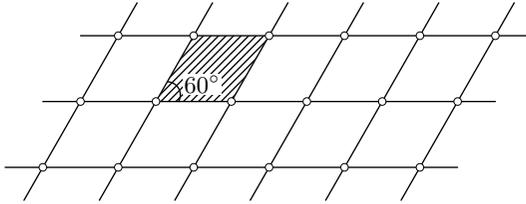


Рис. 1.8

Доказательство. Выберем два произвольных узла решетки A и B (рис. 1.9), находящихся на расстоянии d . Тогда прямая p , проходящая через A и B , содержит бесконечно много точек решетки, причем соседние находятся друг от друга на расстоянии d . Прямая q , параллельная прямой p и отстоящая от нее на расстояние $\Delta(L)/d$, должна содержать бесконечно много точек решетки, а внутри полосы, ограниченной этими двумя прямыми, нет ни одной точки решетки. Эти два утверждения следуют из того, что площадь фундаментального параллелограмма фиксирована и равна $\Delta(L)$.

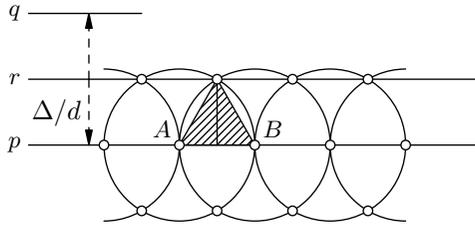


Рис. 1.9

Теперь построим окружности радиуса d вокруг всех точек решетки, расположенных на прямой p (рис. 1.9). Совокупность соответствующих кругов покрывает полосу, ограниченную прямыми p и r , ширина которой равна $d\sqrt{3}/2$ — высоте равностороннего треугольника со стороной d . Всякая точка внутри этой полосы расположена на расстоянии, меньшем d , хотя бы от одного узла решетки и, значит, по определению числа d , не может являться узлом решетки. Поэтому

$$\frac{\Delta}{d} \geq \frac{d\sqrt{3}}{2},$$

что и утверждается в теореме. Если в последнем неравенстве имеет место равенство, то прямые q и r совпадают. Точки пересечения окружностей являются тогда узлами решетки, так как если на прямой q был бы узел, отличный от этих точек пересечения, то на прямой p нашелся бы другой узел, отстоящий от него менее чем на d . Теорема 1.3 доказана.

Замечание. Как уже отмечалось, пространственная решетка может быть построена, начиная с некоторого параллелепипеда. Здесь также одна и та же решетка может быть получена при помощи различных изначальных параллелепипедов, но для этого они должны иметь равные объемы; кроме того, такие параллелепипеды (которые также называются *фундаментальными*) все свои вершины должны иметь в узлах решетки, а внутри них не должно содержаться никаких узлов решетки.

Ясно, что для пространственной решетки также не существует положительной нижней границы наименьшего расстояния между двумя узлами решетки, но верхняя граница этой величины, конечно, существует. Ее определение ничем существенным не отличается от плоского случая: роль, которую там играл правильный треугольник, здесь играет правильный тетраэдр. Однако есть одно *существенное различие*. На плоскости фундаментальный параллелограмм решетки, показанной на рис. 1.8, состоит из двух правильных треугольников; соответствующий ему в пространстве параллелепипед — ромбоэдр — состоит из

двух правильных тетраэдров и октаэдра (рис. 1.10). Дело в том, что пространство нельзя разбить на правильные тетраэдры (почему?).

Объем $V = V(\mathbf{L})$ этого параллелепипеда равен $c^3\sqrt{2}$, где c — длина ребра тетраэдра; поэтому для наименьшего расстояния $d(\mathbf{L})$ пространственной решетки с объемом фундаментального параллелепипеда $V(\mathbf{L})$ имеет место неравенство (см. [9], [13])

$$d(\mathbf{L}) \leq \sqrt[3]{\sqrt{2}V(\mathbf{L})}.$$

Задача оценки наименьшего расстояния между узлами решеток тесно связана с изучением плотнейших упаковок шаров в пространстве (см. [9], [16]).

Правило параллелограмма является одним из характеристических свойств решетки. Другое характеристическое свойство состоит в том, что для решетки существует строго положительное число, которое меньше расстояния между любыми двумя точками решетки. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.4 (см. [9], [13]). *Пусть множество точек X на плоскости, содержащее три точки, не лежащие на одной прямой, обладает двумя свойствами:*

- 1) *расстояние между любыми двумя его точками не меньше некоторого положительного числа d ;*
- 2) *имеет место правило параллелограмма, т. е. если точки A, B, C множества X являются вершинами параллелограмма $ABCD$, то и четвертая вершина D этого параллелограмма принадлежит множеству X .*

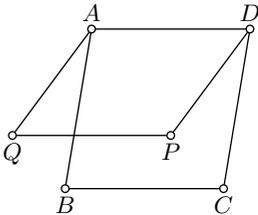


Рис. 1.11

Тогда X — решетка.

Доказательство. Выберем произвольную точку A множества X и пусть B — ближайшая к A точка из X . Такая точка существует по свойству 1 (почему?). Через точки A и B проведем прямую (рис. 1.11) и среди точек множества X , не лежащих на этой прямой, выберем точку C , ближайшую к точке B . Построив параллелограмм $ABCD$, по свойству 2 заключаем, что точка D также принадлежит множеству X . Построим решетку \mathbf{L} , порождаемую этим параллелограммом, и докажем, что $X = \mathbf{L}$.

Из свойства 2 следует, что \mathbf{L} содержится в X . Поэтому достаточно доказать, что ни на границе, ни внутри параллелограмма $ABCD$ нет точек

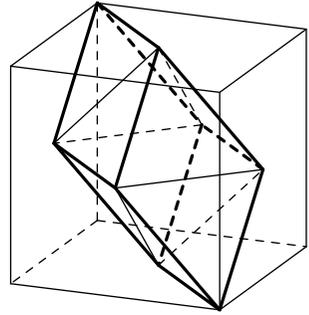


Рис. 1.10

множества X , отличных от его вершин. Если P является такой точкой и расположена внутри параллелограмма $ABCD$ (рис. 1.11) или на его границе, то хотя бы один из углов, под которыми видны из точки P стороны параллелограмма, будет тупым или прямым. Поэтому расстояние от точки P до некоторой из четырех вершин параллелограмма $ABCD$ будет меньше его стороны; пусть, например, $PD < DC$. Построим параллелограмм $ADPQ$; тогда по правилу параллелограмма вершина Q принадлежит множеству X и, кроме того, $AQ < AB$. Но это неравенство противоречит нашему выбору точки B (либо точки C , если $PC < BC$). Остальные случаи разбираются аналогично. Теорема доказана.

Замечание. Теорема 1.4 имеет свой аналог для решеток в пространствах любых размерностей. Попробуйте ее доказать самостоятельно в трехмерном пространстве.

§ 1.4. Области Дирихле

Для каждого узла плоской решетки найдем множество всех точек на плоскости, расстояние от которых до этого узла не больше, чем расстояние до всех других узлов. Такие области называются областями Дирихле (известный немецкий математик П. Г. Л. Дирихле с большим успехом использовал их в своих работах по теории чисел; в пространстве такие области рассматривал русский математик Г. Ф. Вороной).

В качестве примера рассмотрим решетку, фундаментальным параллелограммом которой является ромб с углом 60° . Для того чтобы найти области Дирихле, сделаем следующее построение. Во всех фундаментальных параллелограммах данной решетки проведем меньшие диагонали; в результате мы получим разбиение плоскости на равные правильные треугольники (рис. 1.12). Внутри каждого тре-

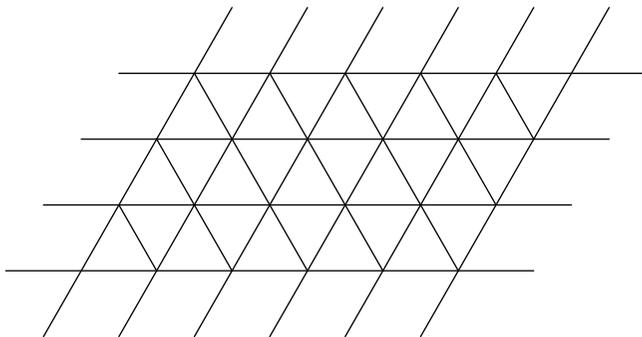


Рис. 1.12

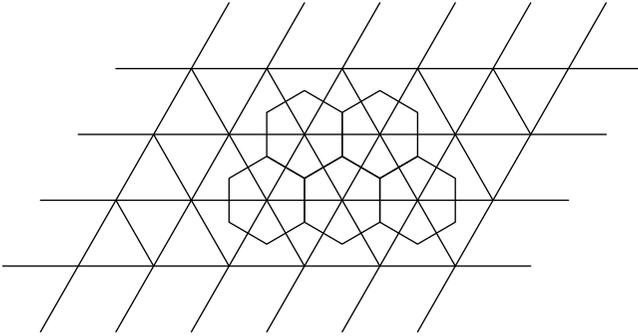


Рис. 1.13

угольника отметим центр его описанной окружности. Затем соединим отрезками эти центры для треугольников, имеющих общую сторону (рис. 1.13).

В итоге получилось разбиение плоскости на равные шестиугольники. Внутри каждого из них лежит ровно один узел решетки, который является его центром симметрии и центром его описанной окружности. Полученные шестиугольники и являются областями Дирихле. В самом деле, рассмотрим какой-либо шестиугольник с центром в узле O (рис. 1.14). Каждая его сторона является перпендикуляром к отрезку, соединяющему узел с одним из соседних к нему узлов. Причем этот перпендикуляр проходит через середину соответствующего отрезка (рис. 1.14).

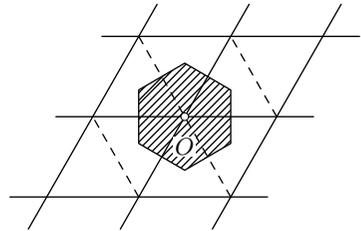


Рис. 1.14

Следовательно, точки шестиугольника находятся от точки O на расстоянии не большем, чем от узлов решетки, окружающих точку O . Это следует из того, что серединный перпендикуляр отрезка AB разбивает плоскость на две части: одна из этих частей состоит из точек, которые ближе к A , чем к B , а другая — из точек, которые ближе к B , чем к A .

Таким образом, область Дирихле является частью этого шестиугольника. Чтобы доказать, что она совпадает с шестиугольником, заметим, что область Дирихле для каждого из узлов также лежит в соответствующих им шестиугольниках. Но по своему определению области Дирихле должны покрывать всю плоскость, так как всякая точка плоскости отстоит по меньшей мере от одного узла не более, чем от всех других. Следовательно, каждая область Дирихле заполняет весь шестиугольник.

Области Дирихле могут быть устроены и по-другому. Если у решетки можно выбрать ортогональный базис, то областями Дирихле будут прямоугольники или квадраты. Во всех остальных случаях будут получаться шестиугольники с попарно параллельными противоположными сторонами.

Рассмотрение решеток и областей Дирихле является основным инструментом для решения довольно трудной олимпиадной задачи — она предлагалась на V Всесоюзной математической олимпиаде (Рига, 1971). На втором туре этой олимпиады старшеклассникам были предложены задачи исследовательского типа, а их условиям предшествовал следующий текст:

«Вам предлагаются три задачи. Верное решение любой из них представляет серьезные трудности и требует много времени. Выберите одну из них и постарайтесь продвинуться в ней как можно дальше.

Перед окончанием работы составьте “сводку” результатов по задаче, которую вы решали: перечислите доказанные Вами факты, укажите примеры, в которых Вам удалось разобраться, сформулируйте гипотезы, которые Вам кажутся верными».

Вот формулировка одной из этих задач (см. [5]):

Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2.$$

1. Доказать, что для любой точки (x, y) найдется такая пара целых чисел (m, n) , что

$$f(x - m, y - n) = (x - m)^2 + (x - m)(y - n) + (y - n)^2 \leq \frac{1}{2}.$$

2. Обозначим через $\bar{f}(x, y)$ наименьшее из чисел $f(x - m, y - n)$ при целых m и n . Утверждение задачи 1 состояло в том, что выполняется неравенство

$$\bar{f}(x, y) \leq \frac{1}{2} \quad \text{для всех } (x, y).$$

Докажите, что на самом деле верно более сильное неравенство

$$\bar{f}(x, y) \leq \frac{1}{3},$$

и найдите все точки, для которых имеет место равенство

$$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{3}.$$

3. Рассмотрим функцию

$$f_a(x, y) = x^2 + axy + y^2, \quad 0 \leq a \leq 2.$$

Найдите какое-либо число C (зависящее от a) такое, чтобы для всех (x, y) выполнялось неравенство

$$|\bar{f}_a(x, y)| \leq C.$$

Постарайтесь найти точную оценку.

Рассмотрим (см. [5], [10]) сразу пункт 3. Для этого, начиная с ромба со стороной 1 и с острым или прямым углом φ (считая его фундаментальным), построим решетку. Зададим косоугольную систему координат, выбрав две прямые Ox и Oy , содержащие различные стороны одного такого ромба (рис. 1.15). Теперь рассмотрим любой узел решетки M . Через него проходят две прямые построенной решетки, одна из которых пересекает ось Ox в точке M_x , а другая — ось Oy в точке M_y ; точки M_x и M_y имеют соответственно на осях Ox и Oy целочисленные координаты.

Другими словами, все целочисленные точки (m, n) в такой косоугольной системе координат задают нашу решетку. Ясно, что и любой точке M плоскости (не обязательно узлу решетки) можно поставить в соответствие пару действительных чисел (x, y) , которые возникают как координаты проекций точки M на прямые Ox и Oy соответственно (рис. 1.15). Обратно, каждому двум действительным числам x, y можно поставить в соответствие некоторую точку плоскости, у которой x и y будут координатами. Таким образом, мы установили взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и парами чисел, т. е. построили так называемую косоугольную систему координат.

Расстояние между двумя точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ можно найти по теореме косинусов из треугольника ABC (рис. 1.16): AB — диагональ некоторого параллелограмма со сторонами, параллельными осям координат.

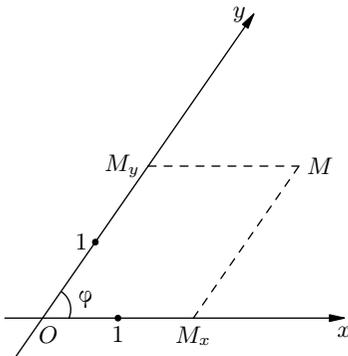


Рис. 1.15

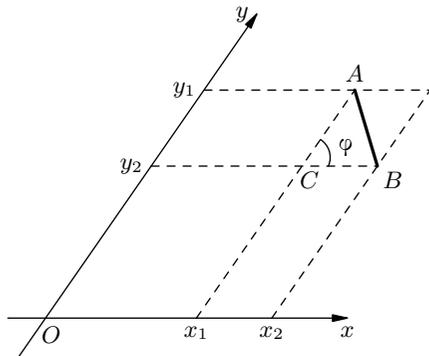


Рис. 1.16

динат, и его стороны равны $|x_1 - x_2|$ и $|y_1 - y_2|$ соответственно. Имеем:

$$AB^2 = |x_1 - x_2|^2 - 2 \cos \varphi |x_1 - x_2| |y_1 - y_2| + |y_1 - y_2|^2,$$

учитывая то, что $|x_1 - x_2| |y_1 - y_2| = -(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)$, получаем формулу

$$AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + 2 \cos \varphi (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + (y_1 - y_2)^2,$$

или

$$AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + a(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + (y_1 - y_2)^2,$$

где $0 \leq a = 2 \cos \varphi < 2$.

Теперь становится понятным, что $\bar{f}_a(x, y)$ — квадрат расстояния от точки (x, y) до ближайшего узла построенной решетки. Поэтому задача сводится к нахождению максимума функции $\bar{f}_a(x, y)$.

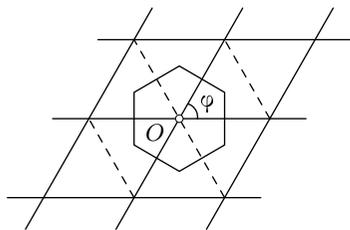


Рис. 1.17

Пусть $0 < a < 2$ (случаи $a = 0$ и $a = 2$ мы разберем потом отдельно). Для каждого узла решетки построим область Дирихле, которая представляет собой шестиугольник, показанный на рис. 1.17. Наиболее удаленные от узлов решетки точки располагаются, очевидно, в вершинах таких шестиугольников.

Расстояние от любой из вершин шестиугольника до ближайшего узла решетки (центра этого шестиугольника) равно радиусу окружности, описанной около равностороннего треугольника с боковыми сторонами 1 и углом φ при вершине. Следовательно, наибольшее расстояние равно

$$\frac{1}{2 \cos(\varphi/2)}.$$

Квадрат расстояния для этих точек равен

$$\frac{1}{4 \cos^2(\varphi/2)} = \frac{1}{2(\cos \varphi + 1)} = \frac{1}{a + 2}.$$

Поэтому для всех точек (x, y) плоскости

$$\bar{f}_a(x, y) \leq \frac{1}{a + 2}.$$

При $a = 1$ получаем утверждение из п. 2 задачи; в этом случае $\varphi = 60^\circ$ и область Дирихле представляет собой правильный шестиугольник со стороной $\sqrt{3}/3$, а равенство $\bar{f}_1(x, y) = 1/3$ достигается в вершинах этих шестиугольников, координаты которых задаются двумя формулами

(почему?):

$$\left(\frac{1}{3} + m, \frac{1}{3} + n\right), \quad \left(-\frac{1}{3} + m, -\frac{1}{3} + n\right),$$

где m и n — произвольные целые числа.

При $a = 0$ все наши рассуждения сохраняются, только в этом случае мы имеем дело с прямоугольной системой координат и областями Дирихле служат квадраты; поэтому $f_0(x, y) \leq 1/2$. Случай $a = 2$, когда $\bar{f}_2(x, y) = (x + y)^2$, приводит к вопросу о квадрате разности между числом $x + y$ и ближайшим к нему целым числом, так что $\bar{f}_2(x, y) = 1/4$. Таким образом, пункт 3 нами полностью изучен, а вместе с ним завершено и решение задачи.

Упражнения и задачи

1.1. Докажите (не используя результат теоремы 1.1), что примитивный треугольник всегда можно дополнить до фундаментального параллелограмма.

1.2. Докажите, что для любого сколь угодно большого числа M на решетке \mathbb{Z}^2 существует примитивный треугольник, все стороны которого больше числа M .

1.3. Докажите, что примитивный треугольник на решетке \mathbb{Z}^2 не может быть остроугольным.

1.4. Вершины треугольника являются узлами решетки \mathbb{Z}^2 и на его сторонах нет других узлов решетки. Докажите, что если такой треугольник содержит внутри себя ровно один узел решетки, то этот узел является центром тяжести (точкой пересечения медиан) данного треугольника.

1.5. а) (Россия, 1983; [26].)¹ Пусть вершины выпуклого n -угольника находятся в узлах решетки \mathbb{Z}^2 , а внутри и на его сторонах нет других узлов решетки. Докажите, что $n \leq 4$.

б) (Москва, 1987; [7].) Вершины выпуклого многогранника находятся в узлах решетки \mathbb{Z}^3 ; других узлов решетки внутри него и на его гранях нет. Докажите, что число вершин многогранника не превосходит 8.

1.6. (Ленинград, 1982.) Все вершины выпуклого пятиугольника являются узлами решетки \mathbb{Z}^2 , а его стороны — целые числа. Докажите, что периметр такого пятиугольника является четным числом.

¹Указание страны (или города) означает, что задача предлагалась на математической олимпиаде, проводившейся в этой стране (городе).

1.7. Докажите, что для любых двух узлов A и B решетки \mathbb{Z}^2 , на отрезке между которыми нет других узлов, найдется такой узел C , что треугольник ABC — примитивный. Чему равно расстояние от точки C до прямой AB , если точки A и B находятся на расстоянии d ?

1.8. (Н. Б. Васильев; [4].) Докажите, что если решетку \mathbb{Z}^2 разбить на четыре непересекающиеся подрешетки с клетками 2×2 , то вершины любого примитивного треугольника решетки \mathbb{Z}^2 обязательно попадут в узлы трех разных указанных подрешеток.

1.9. (Аргентина, 1995; [27], см. также [13].) Пусть бесконечное множество X точек плоскости таково, что внутри любого круга имеется только конечное число его точек либо вообще нет точек из X и, кроме того:

а) $(0, 0) \in X$;

б) если $(a, b) \in X$ и $(c, d) \in X$, то $(a - c, b - d) \in X$;

в) существует такое α , что $R_O^\alpha(X) = X$, где R_O^α обозначает поворот плоскости на угол α вокруг точки $O = (0, 0)$.

Докажите, что α может принимать только следующие значения:

$$\pm 60^\circ, \quad \pm 90^\circ, \quad \pm 120^\circ, \quad \pm 180^\circ.$$

1.10. (Венгрия, 1942; [12].) Пусть a, b, c, d — такие целые числа, что система уравнений

$$ax + by = m,$$

$$cx + dy = n$$

для всех целых n и m имеет решение в целых числах. Докажите, что

$$|ad - bc| = 1.$$

1.11. Докажите правила параллелограмма и параллелепипеда для пространственных решеток.

1.12. В пространстве заданы четыре точки, не лежащие в одной плоскости. Сколько существует различных параллелепипедов, четыре вершины которых совпадают с заданными точками? Опишите способы построения таких параллелепипедов.

1.13. Докажите, что пространство нельзя разбить на правильные тетраэдры.

1.14. Докажите, что параллелепипед, показанный на рис. 1.10, порождает в пространстве кубическую решетку, к которой добавлены в качестве узлов центры граней всех единичных кубиков.

1.15. (См. [24].) Из 27 одинаковых кубиков сложили один большой куб. Провести прямую, которая бы «пронзала» наибольшее число малых кубиков, и найти это число. Проведенная прямая не должна пересекать ребра кубиков.

1.16. (Венгрия, 1982; [12].) Куб в пространстве расположен так, что некоторые 4 его вершины являются узлами решетки \mathbb{Z}^3 . Докажите, что все вершины куба являются узлами этой решетки.

1.17. а) (Вьетнам, 1977; [12].) На решетке \mathbb{Z}^2 отмечены $n \geq 3$ узлов так, что любые три из них образуют треугольник, медианы которого не пересекаются в узле этой решетки. Найдите наибольшее число n , при котором такое возможно.

б) (Вьетнам, 1977; [12].) На решетке \mathbb{Z}^3 отмечены 37 узлов, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что из них можно выбрать такие три точки, что центр тяжести образованного ими треугольника будет узлом решетки.

1.18. Докажите, что для простой кубической решетки \mathbb{Z}^3 область Дирихле (или многогранник Вороного) — куб; для кубической решетки с центрами граней — ромбододекаэдр (его гранями являются двенадцать равных ромбов, на рис 1.18 изображена половина ромбододекаэдра, отсекаемая гранью куба); для кубической решетки с центрами кубов — усеченный октаэдр, гранями которого являются восемь квадратов и шесть правильных шестиугольников.

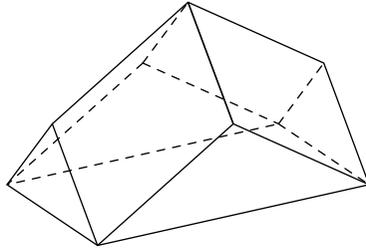


Рис. 1.18

Правильные многоугольники на решетках

§ 2.1. Треугольник и квадрат

В этой главе будет изучаться вопрос о том, какие правильные, равноугольные и равносторонние многоугольники можно разместить на плоских решетках. В дальнейшем мы будем говорить, что некоторый многоугольник *расположен на какой-либо решетке*, если все его вершины совпадают с узлами этой решетки.

Первый результат, связанный с невозможностью расположить правильный треугольник на целочисленной решетке \mathbb{Z}^2 , по-видимому, был доказан Е. Лукасом в 1878 г. (см. [43]). В основе его доказательства лежат элементарные сведения из теории делимости чисел, и мы его здесь повторим.

Теорема 2.1. *Правильный треугольник нельзя расположить на целочисленной решетке \mathbb{Z}^2 .*

Доказательство (I). Предположим, что какой-либо правильный треугольник можно расположить на решетке нужным образом и что начало координат находится в одной из его вершин, а две другие его вершины имеют координаты (a, b) и (c, d) . Можно считать, что четыре

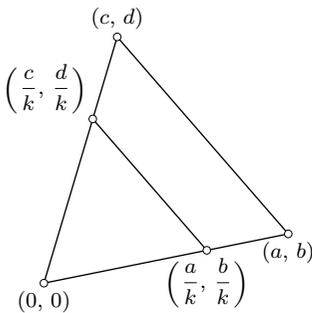


Рис. 2.1

целых числа a, b, c, d не имеют общих делителей, отличных от ± 1 . Последнее следует из того, что точки $(0, 0)$, $(a/k, b/k)$, $(c/k, d/k)$ также являются вершинами правильного треугольника, если k — общий делитель всех четырех чисел (рис. 2.1).

Так как

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = (a - c)^2 + (b - d)^2,$$

то отсюда заключаем, что

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 2(ac + bd).$$

Следовательно,

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4(ac + bd),$$

т. е. сумма квадратов четырех чисел делится на 4. Но тогда или все четыре числа четные, или все нечетные. Первое невозможно потому, что эти числа, по нашему выбору, взаимно просты. Второе же невозможно потому, что тогда не выполняется соотношение

$$a^2 + b^2 = (a - c)^2 + (b - d)^2,$$

ибо его левая часть не делится на 4, а правая — делится. Полученное противоречие и доказывает сформулированное утверждение.

Существует еще много самых разнообразных доказательств для правильного треугольника. Мы остановимся еще на одном, использующем тригонометрию.

Доказательство (II). Отметим, что если два луча с началами в начале координат проходят через узлы (a, b) и (c, d) решетки \mathbb{Z}^2 (рис. 2.2), то тангенс угла θ между этими лучами является числом рациональным или не определен, так как

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{d/c - b/a}{1 + bd/(ac)} = \frac{ad - bc}{ac + bd}.$$

Поэтому, если предположить, что существует равносторонний треугольник с вершинами в узлах решетки \mathbb{Z}^2 , то два луча с началами в одной из его вершин, содержащие стороны треугольника, образуют угол в 60° . Но $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$, что является иррациональным числом, и поэтому расположить на решетке \mathbb{Z}^2 равносторонний треугольник нельзя.

Ясно, что правильный шестиугольник также нельзя расположить на решетке \mathbb{Z}^2 , так как в противном случае, соединив его вершины через одну, мы получили бы правильный треугольник, расположенный на решетке, что, как мы уже знаем, невозможно. Однако в пространстве на решетке \mathbb{Z}^3 можно расположить как правильный треугольник, так и правильный шестиугольник. Достаточно предъявить правильный шестиугольник. Для этого заметим, что отмеченные на рис. 2.3 середины ребер куба лежат в одной плоскости и являются вершинами правильного шестиугольника (почему?).

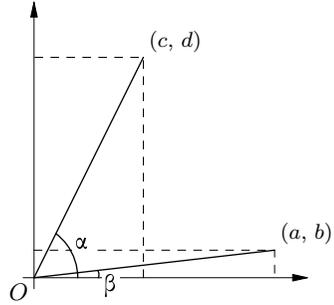


Рис. 2.2

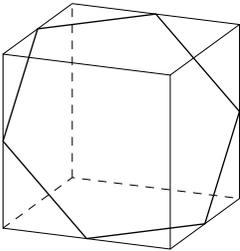


Рис. 2.3

Поэтому, если рассмотреть куб со стороной 2, расположенный на решетке \mathbb{Z}^3 так, что его ребра лежат на прямых решетки, а вершины являются ее узлами, то отмеченный выше шестиугольник будет также расположен на решетке \mathbb{Z}^3 .

Решетка \mathbb{Z}^2 содержит, конечно, квадрат, но не содержит правильный треугольник. Однако решетка, показанная на рис. 1.8, содержит как правильный треугольник, так и правильный шестиугольник. Возможно ли на этой решетке расположить квадрат? Ответ дает следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Не существует плоской решетки, содержащей одновременно квадрат и правильный треугольник.*

Доказательство (см. [11], [40], [41]). Предположим противное, т. е. что на некоторой решетке \mathbb{L} можно одновременно расположить правильный треугольник $T = ABC$ и квадрат $K = APQR$ (можно считать, что они имеют общую вершину A , см. рис. 2.4).

Начиная с квадрата K , построим решетку \mathbb{L}' . Так как $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$ — иррациональное число, то один из лучей $[AB)$ или $[AC)$ не содержит ни одного узла решетки \mathbb{L}' , отличного от A ; пусть это будет луч $[AC)$. На этом луче находится бесконечно много узлов C_1, C_2, C_3, \dots решетки \mathbb{L} (рис. 2.4) и, более того, тангенс угла наклона этого луча с любой прямой, параллельной стороне PQ квадрата K , является числом иррациональным.

Обозначим через D_k «левую нижнюю» вершину квадрата решетки \mathbb{L}' , в который попала точка C_k . Для каждого $k \geq 1$ рассмотрим параллелограмм $AC_k D_k E_k$. По правилу параллелограмма, все полученные таким образом точки E_k , являются узлами решетки \mathbb{L} и распо-

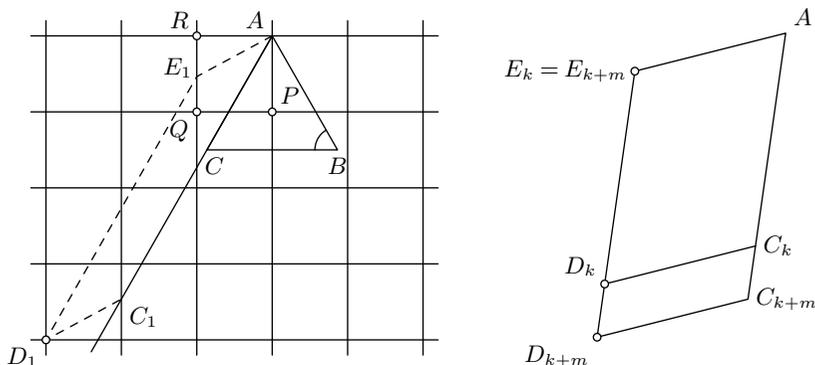


Рис. 2.4

жены внутри квадрата $APQR$. Кроме того, все точки E_k различны, так как если $E_k = E_{k+m}$ (рис. 2.4), то прямая $D_k D_{k+m}$ параллельна прямой AC и проходит через узлы решетки L' . Поэтому тангенс угла наклона прямой $D_k D_{k+m}$ с прямыми, параллельными стороне PQ квадрата K , является рациональным числом, что невозможно.

Итак, внутри квадрата K находится бесконечно много различных точек решетки L , что означает, что найдутся два ее узла, которые находятся на произвольно малом расстоянии друг от друга. На решетках это невозможно и полученное противоречие доказывает теорему 2.2.

Замечание. Другое (и поучительное) доказательство теоремы 2.2 можно получить с использованием комплексных чисел. Для этого идентифицируем решетку L_T , которая построена начиная с треугольника ABC , с множеством комплексных чисел

$$L_T = \{z: z = m + \varepsilon n; m, n \in \mathbb{Z}, \varepsilon = e^{\pi i/3}\}.$$

Предположим теперь, что точки $z_k = m_k + \varepsilon n_k$, $k = 0, 1, 2, 3$, являются вершинами квадрата. Без ограничения общности можно считать, что $z_0 = 0$ и точки z_1, z_2, z_3 занумерованы так, что $z_3 = iz_1$. Из этого равенства заключаем, что

$$m_3 + \varepsilon n_3 = i(m_1 + n_1 \varepsilon),$$

и, тем самым,

$$m_3 + n_3 \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{n_3}{2} = -\frac{n_1}{2} + \left(m_1 + n_1 \frac{\sqrt{3}}{2}\right) i.$$

Сравнивая действительные и мнимые части, приходим к системе

$$2m_1 + \sqrt{3}n_1 = n_3,$$

$$2m_3 + \sqrt{3}n_3 = -n_1.$$

Следовательно (почему?), $n_1 = n_3 = 0$, что невозможно, так как это означает, что точки z_0, z_1, z_3 лежат на одной (вещественной) прямой. Полученное противоречие доказывает теорему 2.2.

Отметим, что на решетке L_T , составленной из ромбов с длиной стороны 1 и с острым углом в 60° , легко можно разместить прямоугольный треугольник (рис. 2.5).

Помимо теоремы 2.2 можно доказать более сильный результат.

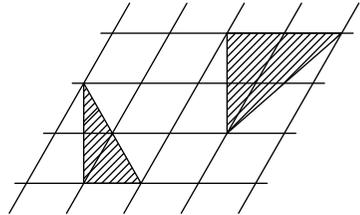


Рис. 2.5

Теорема 2.3 (М. Кламкин, [41]). *Никакой прямоугольный треугольник с целочисленными длинами сторон (пифагоров треугольник) нельзя расположить на решетке L_T .*

Доказательство. Мы покажем немного больше: если прямоугольный треугольник можно расположить на решетке L_T , то по крайней мере один из его катетов имеет длину $a\sqrt{3}$, где a — некоторое рациональное число. Для доказательства заметим, что если \mathbf{a} и \mathbf{b} — два единичных вектора, задающих решетку L_T , то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1/2$. Если ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом C , то $\overrightarrow{CB} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$, $\overrightarrow{CA} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$ для некоторых целых чисел x, y, u, v ; кроме того, $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = 0$ и, тем самым,

$$x(2u + v) + y(u + 2v) = 0.$$

Отсюда следует, что существует рациональное число t такое, что $x = t(u + 2v)$ и $y = -t(2u + v)$. Поэтому

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CB}|^2 &= x^2 + xy + y^2 = t^2[(u + 2v)^2 - (u + 2v)(2u + v) + (2u + v)^2] = \\ &= 3t^2(u^2 + uv + v^2) = 3t^2|\overrightarrow{CA}|^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$CB = \sqrt{3}|t|CA,$$

что завершает доказательство сформулированного выше утверждения.

§ 2.2. Правильные многоугольники

Правильный пятиугольник, так же как и правильный треугольник, нельзя поместить ни на целочисленную решетку \mathbb{Z}^2 в плоскости, ни на решетку \mathbb{Z}^3 в пространстве. Чтобы это доказать, заметим, что если провести все диагонали правильного пятиугольника (рис. 2.6), то точки их взаимного пересечения являются, как хорошо известно, вершинами также правильного пятиугольника, подобного исходному с коэффициентом $((\sqrt{5} - 1)/2)^2 < 1$.

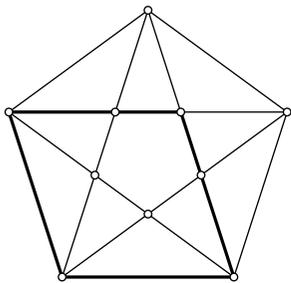


Рис. 2.6

Теперь предположим, что существуют какие-либо правильные пятиугольники, которые можно расположить на \mathbb{Z}^2 или \mathbb{Z}^3 (или, вообще, на \mathbb{Z}^n при $n \geq 2$) и выберем тот из них, который имеет наименьшую сторону. У него проведем все диагонали. Тогда, по правилу параллелограмма, все вершины меньшего пятиугольника также будут являться узлами решетки (рис. 2.6), который имеет

длину стороны меньше, чем исходный. А это противоречит выбору исходного пятиугольника.

Так как правило параллелограмма выполняется на любой решетке (и многомерной так же), то мы, в действительности, доказали, что *не существует ни одной решетки L (двух или более измерений), куда можно было бы поместить правильный пятиугольник.*

Полный ответ о правильных многоугольниках на решетках завершает следующее утверждение.

Теорема 2.4. *Плоский правильный n -угольник при $n = 5$ и $n > 6$ нельзя расположить ни на одной решетке на плоскости или в пространстве.*

Доказательство. Идея доказательства такая же, что и в случае правильного пятиугольника (отметим, что эта идея была использована В. Шеррером [49]. Он рассмотрел этот вопрос в 1946 г., ничего не зная о более ранней работе И. Шенберга [50] 1937 года; в последней — теорема 2.4 была доказана, исходя из соображений, связанных с уже известной иррациональностью значений тригонометрических функций; см. также статью А. Егорова [11]).

Случай $n = 5$ мы уже обсудили. Предположим теперь, что существует решетка L , на которой можно расположить плоский правильный n -многоугольник, $n > 6$. Выберем из всех таких правильных n -угольников тот, который имеет самую маленькую длину стороны.

Рассмотрим произвольный узел решетки O и отложим от этой точки векторы, равные векторам, образующим стороны n -угольника (рис. 2.7). Ясно, что концы этих новых векторов являются вершинами правиль-

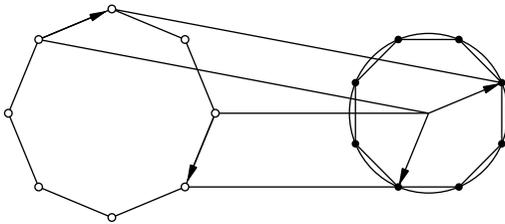


Рис. 2.7

ного n -угольника и (по правилу параллелограмма) все вершины этого нового правильного n -угольника являются узлами решетки L .

Отношение стороны нового многоугольника к длине старого легко вычислить, так как новый правильный n -угольник вписан в окружность, радиус которой равен длине стороны исходного n -угольника — это отношение, следовательно, равно $2 \sin(\pi/n)$. Так как $2 \sin(\pi/n) < 1$

при всех $n > 6$, то построенный правильный n -угольник имеет сторону меньше, чем исходный. Это противоречит выбору многоугольника, а само противоречие завершает доказательство теоремы 2.4.

Отметим еще одно важное следствие доказанной теоремы, оформив его в виде отдельного утверждения.

Теорема 2.5. 1. При любом натуральном $q > 3$ число $\cos(\pi/q)$ иррационально.

2. При любом натуральном $q \geq 3$ и $q \neq 6$ число $\sin(\pi/q)$ иррационально.

Доказательство (см. [11]). 1. Предположим противное, т. е. что

$$\cos \frac{\pi}{q} = \frac{m_1}{n_1},$$

где m_1, n_1 — натуральные числа. Рассмотрим правильный $2q$ -угольник $A_0A_1A_2 \dots A_{2q-1}$, вписанный в окружность радиуса 1 с центром в начале координат (рис. 2.8), вершина A_0 которого совпадает с точкой $(1, 0)$.

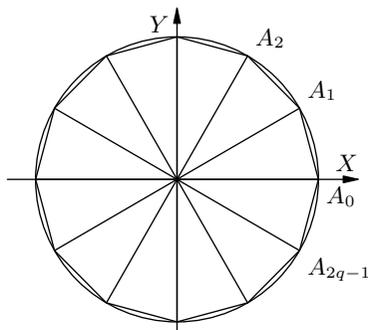


Рис. 2.8

Точка A_k имеет координаты

$$\left(\cos \frac{k\pi}{q}, \sin \frac{k\pi}{q} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2q - 1.$$

Так как, по предположению, $\cos(\pi/q)$ является рациональным числом, то все числа вида $\cos(k\pi/q)$ для указанных значений k также являются рациональными числами. Это следует из простого утверждения о том, что при любом натуральном k существуют многочлены с целыми коэффициентами $T_k(x)$ и $U_{k-1}(x)$, степени которых равны k и $k - 1$ соответственно, и такие, что одновременно выполняются равенства

$$\begin{aligned} \cos k\alpha &= T_k(\cos \alpha), \\ \sin k\alpha &= \sin \alpha \cdot U_{k-1}(\cos \alpha). \end{aligned}$$

Для доказательства этого утверждения применим индукцию. При $k = 1$ имеем $T_1(x) = x$ и $U_0(x) = 1$. Индуктивный переход также не сложен:

$$\begin{aligned} \cos(k+1)\alpha &= \cos k\alpha \cos \alpha - \sin k\alpha \sin \alpha = \\ &= T_k(\cos \alpha) \cos \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) U_{k-1}(\cos \alpha), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(k+1)\alpha &= \cos k\alpha \sin \alpha - \sin k\alpha \cos \alpha = \\ &= T_k(\cos \alpha) \sin \alpha + \sin \alpha U_{k-1}(\cos \alpha) \cos \alpha. \end{aligned}$$

Многочлены $T_k(x)$ и $U_k(x)$ называются многочленами Чебышева 1-го и 2-го рода соответственно.

Таким образом,

$$\cos \frac{k\pi}{q} = T_k\left(\cos \frac{\pi}{q}\right) = \frac{m_k}{n_k}, \quad \sin \frac{k\pi}{q} = \sin \frac{\pi}{q} U_{k-1}\left(\cos \frac{\pi}{q}\right) = \frac{r_k}{s_k} \sin \frac{\pi}{q},$$

где m_k, n_k, r_k, s_k являются целыми числами.

Итак,

$$A_k = \left(\frac{m_k}{n_k}, \frac{r_k}{s_k} \sin \frac{\pi}{q} \right), \quad k = 0, 1, \dots, 2q - 1.$$

Приводя все дроби к общему знаменателю, получаем, что

$$A_k = \left(\frac{M_k}{D}, \frac{R_k}{D} \sin \frac{\pi}{q} \right), \quad k = 0, 1, \dots, 2q - 1.$$

Рассмотрим теперь все точки на плоскости с координатами

$$\left(\frac{n}{D}, \frac{m}{D} \sin \frac{\pi}{q} \right),$$

где числа m и n пробегают все целые значения. Эти точки образуют решетку, фундаментальным параллелограммом которой является прямоугольник со сторонами $1/D$ и $(1/D) \sin(\pi/q)$, причем все вершины правильного многоугольника $A_0 A_1 A_2 \dots A_{2q-1}$ являются узлами этой решетки. Так как $2q \geq 8$, то по теореме 2.4 этого быть не может. Значит, предположение о том, что при $q > 3$ число $\cos(\pi/q)$ является рациональным, неверно. Полученное противоречие завершает доказательство утверждения 1.

Для доказательства п. 2 можно воспользоваться п. 1 и простым тригонометрическим тождеством

$$\sin \frac{\pi}{q} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{q} \right),$$

рассмотрев сначала случай четного q , а затем — нечетного q . Теорема 2.5 полностью доказана.

Теорема 2.4 может быть уточнена следующим образом.

Теорема 2.6. *Единственным правильным многоугольником на плоскости, все координаты вершин которого рациональны, является квадрат.*

Доказательство. Мы приведем здесь два различных и чисто аналитических доказательства этой теоремы.

Предположим, что все вершины некоторого правильного n -угольника ($n > 2$) имеют рациональные координаты. Если A, B, C — три последовательные его вершины, то $\operatorname{tg} \angle ABC$ и $\cos \angle ABC$ являются рациональными числами (или $\operatorname{tg} \angle ABC$ неопределен), где $\angle ABC = \pi(1 - 2/n)$. Тот факт, что $\operatorname{tg} \angle ABC$ является рациональным числом или неопределен, следует, например, из рис. 2.2; то, что $\cos \angle ABC$ также рациональное число, вытекает из теоремы косинусов для равнобедренного треугольника ABC .

Первое доказательство начнем с того, что $2 \cos n\alpha$ можно записать в виде $f_n(2 \cos \alpha)$, где $f_n(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом, равным 1. Действительно, из тождества

$$2 \cos(n+1)\alpha - 2 \cos(n-1)\alpha = 2 \cos \alpha \cdot 2 \cos n\alpha$$

следует, что

$$2 \cos(n+1)\alpha = 2 \cos \alpha \cdot 2 \cos n\alpha - 2 \cos(n-1)\alpha.$$

Поэтому, если многочлены $f_n(x)$ определены начальными условиями

$$f_0(x) = 2, \quad f_1(x) = x$$

и рекуррентным соотношением

$$f_{n+1}(x) = x f_n(x) - f_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

то $f_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, — многочлены с нужными свойствами. Так, например,

$$f_2(x) = x^2 - 2, \quad f_3(x) = x^3 - 3x, \quad f_4(x) = x^4 - 4x^2 + 2.$$

Предположим теперь, что $\alpha = m\pi/n$ и $2 \cos \alpha$ является рациональным числом. Тогда $2 \cos n\alpha = 2$ для некоторого числа n и, тем самым, число $x = 2 \cos \alpha$ для этого значения n является корнем уравнения $f_n(x) = 2$. Это уравнение нецелых рациональных корней не имеет, а среди целых для $2 \cos \alpha$ имеются только три возможности:

$$2 \cos \alpha = 0, \quad 2 \cos \alpha = \pm 1, \quad 2 \cos \alpha = \pm 2,$$

т. е. $\cos \alpha = 0$, $\cos \alpha = \pm 1/2$ или $\cos \alpha = \pm 1$.

Отсюда все уже быстро следует. Если применить доказанное для $\alpha = 2\pi/n$, $n > 2$, то становится ясно, что равенства $\cos \alpha = \pm 1$ невозможны. Если $\cos \alpha = \pm 1/2$ (правильные треугольник и шестиугольник),

то $\sin^2 \alpha = 3/4$ и, тем самым, $\operatorname{tg}^2 \alpha = 3$; последнее невозможно, так как $\operatorname{tg} \alpha$ должен быть рациональным числом. Единственный же возможный случай $\cos \alpha = 0$ соответствует случаю $n = 4$.

Второе доказательство использует то, что $\operatorname{tg}(2\pi/n)$ при натуральных значениях n всегда является иррациональным числом, за исключением случаев $n = 1, 2, 4, 8$. В основе последнего утверждения лежат свойства комплексных чисел.

Действительно, пусть $\alpha = 2\pi/n$; тогда из формул Муавра и Ньютона получаем равенство

$$\begin{aligned} \cos n\alpha + i \sin n\alpha &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \\ &= (\cos^n \alpha - C_n^2 \cos^{n-2} \alpha \sin^2 \alpha + C_n^4 \cos^{n-4} \alpha \sin^4 \alpha - \dots) + \\ &+ i(C_n^1 \cos^{n-1} \alpha \sin \alpha - C_n^3 \cos^{n-3} \alpha \sin^3 \alpha + C_n^5 \cos^{n-5} \alpha \sin^5 \alpha - \dots). \end{aligned}$$

Приравнявая действительные и мнимые части, имеем:

$$\begin{aligned} \cos n\alpha &= \cos^n \alpha - C_n^2 \cos^{n-2} \alpha \sin^2 \alpha + C_n^4 \cos^{n-4} \alpha \sin^4 \alpha - \dots, \\ \sin n\alpha &= C_n^1 \cos^{n-1} \alpha \sin \alpha - C_n^3 \cos^{n-3} \alpha \sin^3 \alpha + C_n^5 \cos^{n-5} \alpha \sin^5 \alpha - \dots, \end{aligned}$$

где обозначенные в правых частях этих равенств многоточием члены, закон образования которых легко обнаружить, выписываются до тех пор, пока сохраняют смысл биномиальные коэффициенты.

Если n — нечетное простое число, то $\operatorname{tg} n\alpha = 0$, и из полученных формул легко находим, что

$$0 = \operatorname{tg} n\alpha = \frac{\sin n\alpha}{\cos n\alpha} = \frac{C_n^1 \operatorname{tg} \alpha - C_n^3 \operatorname{tg}^3 \alpha + C_n^5 \operatorname{tg}^5 \alpha - \dots + (-1)^{(n-1)/2} \operatorname{tg}^n \alpha}{1 - C_n^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + C_n^4 \operatorname{tg}^4 \alpha - \dots + (-1)^{(n-1)/2} \operatorname{tg}^{n-1} \alpha}.$$

Другими словами, число $x = \operatorname{tg}(2\pi/n)$ является корнем уравнения с целыми коэффициентами

$$n - C_n^3 x^2 + C_n^5 x^4 - \dots + (-1)^{(n-1)/2} x^{n-1} = 0.$$

Это уравнение в множестве рациональных чисел может иметь только целые корни. Поэтому если x — рациональное число, то оно может быть только целым. Кроме того, x^2 является делителем простого числа n и, следовательно, $\operatorname{tg}(2\pi/n) = \pm 1$, что невозможно для нечетного простого n .

Пусть теперь $n = mp$, где p — нечетное простое число. В этом случае число $\operatorname{tg}(2\pi/n)$ также иррационально. Если бы число $\operatorname{tg}(2\pi/n)$ было рациональным, то, как видно из предыдущих формул, число $\operatorname{tg}(2\pi m/n) = \operatorname{tg}(2\pi/p)$ также было бы рациональным, а этого, по доказанному выше, быть не может.

Осталось рассмотреть только одну возможность — число n является степенью числа 2. Но $\operatorname{tg}(2\pi/16) = \sqrt{2} - 1$ — число иррациональное; тем самым, в качестве допустимых значений остались только $n = 1, 2, 4, 8$, что завершает второе доказательство теоремы.

Рассмотрим теперь более общую задачу. Пусть на плоскости задано множество

$$K(D) = \{z: z = \alpha + i\beta; \alpha, \beta \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})\},$$

где D — натуральное число, свободное от квадратов, $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ — квадратичное поле, состоящее из чисел вида $x + y\sqrt{D}$, где x, y — рациональные числа. Ясно, что решетка \mathbb{Z}^2 содержится в множестве точек плоскости \mathbb{Q}^2 , обе координаты которых являются рациональными числами. В свою очередь, $\mathbb{Q}^2 \subset K(D)$, и, тем самым, $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{Q}^2 \subset K(D)$. Как было показано (теоремы 2.4 и 2.6), на \mathbb{Z}^2 и \mathbb{Q}^2 нельзя расположить никакой правильной многоугольник, за исключением квадрата. А как обстоят дела для множества точек $K(D)$? Ответом на этот вопрос является следующее утверждение.

Теорема 2.7. *Имеют место следующие возможности.*

- а) При любом D квадрат всегда можно расположить на $K(D)$.
- б) Если $D = 2$, то на $K(2)$ можно расположить только квадрат и правильный восьмиугольник.
- в) Если $D = 3$, то на $K(3)$ можно расположить только квадрат и правильные треугольник, шестиугольник и двенадцатиугольник.
- г) Если $D \neq 2$ и $D \neq 3$, то никакой правильной многоугольник, за исключением квадрата, на $K(D)$ расположить нельзя.

Доказательство. Ясно, что квадрат можно расположить на $K(D)$ при любом D .

Предположим теперь, что некоторый правильный n -угольник при $n \neq 4$ можно расположить на $K(D)$. Тогда если a — сторона этого многоугольника и l — самая короткая его диагональ, то из теоремы косинусов (для треугольника, образованного этой диагональю и двумя соседними сторонами многоугольника) заключаем, что

$$l^2 = 2a^2 - 2a^2 \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right) = 2a^2 + 2a^2 \cos \frac{2\pi}{n}.$$

Таким образом, $\cos(2\pi/n) \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$. Кроме того, $\operatorname{tg}(2\pi/n) \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$, что следует из формулы для тангенса угла между двумя лучами, приведенной на с. 27. Следовательно, оба числа $\cos(2\pi/n)$ и $\sin(2\pi/n)$ лежат в $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ и их степень не превосходит двух. (Напомним, что корни многочленов с рациональными коэффициентами называются алгебраическими числами. Степенью алгебраического числа α называется наи-

меньшая возможная степень многочлена с рациональными коэффициентами, корнем которого является α . Например, все рациональные числа имеют степень 1, а степень корней квадратного уравнения не превосходит 2.) Так как $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, то число $e^{2\pi i/n}$ также является алгебраическим и его степень не превосходит 4. С другой стороны, известно (см. [2], с. 368), что степень такого алгебраического числа (корня n -й степени из 1) равна $\varphi(n)$, где $\varphi(n)$ — функция Эйлера (ее значение равно числу всех взаимно простых с n натуральных чисел, меньших n). Итак,

$$\varphi(n) \leq 4.$$

На основе формулы

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

получаем: $n \in \{3, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$.

Тот факт, что ни при каком D правильный пятиугольник и десятиугольник нельзя расположить на $K(D)$, следует из того, что числа

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}, \quad \operatorname{tg} \frac{2\pi}{10} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$$

не содержатся в $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, так как они являются алгебраическими числами степени 4 (почему?).

Так как $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$, то это возможно только при $D = 2$ (почему?), т. е. правильный восьмиугольник можно расположить лишь на $K(2)$. Тем самым доказан пункт г).

Аналогично (как?), из равенств

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

следует, что если $\operatorname{tg}(\pi/6)$, $\operatorname{tg}(\pi/3)$ или $\operatorname{tg}(2\pi/3)$ лежит в $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, то $D = 3$. Другими словами, если на $K(D)$ можно расположить (правильные) треугольник, или шестиугольник, или двенадцатиугольник, то с необходимостью $D = 3$.

Чтобы закончить доказательство теоремы, осталось заметить, что, рассмотрев окружность радиуса 1 с центром в начале координат и вписав в нее в одном случае восьмиугольник, а в другом случае — двенадцатиугольник (у которых одна вершина совпадает с точкой $(1, 0)$), мы завершим доказательства утверждений б) и в).

Теорема 2.7 доказана.

Замечания. 1. Из правила параллелограмма на $K(3)$ следует, что если это множество содержит только правильный треугольник, то оно

обязательно содержит и правильные шестиугольник и двенадцатиугольник. Более того, если на $K(3)$ можно расположить любой из этих трех многоугольников, то там содержатся и два других.

2. В научном докладе на Колмогоровских чтениях в 2001 году десятиклассники И. Седошкин и Е. Мычка (СУНЦ МГУ) доложили результаты своих исследований, которые коротко можно сформулировать так: *На каждой из правильных плоских мозаик (паркет), т. е. покрытии плоскости при помощи правильных многоугольников (быть может, разных типов), можно расположить только такие правильные многоугольники, которые «видны невооруженным глазом», т. е. составляющие мозаику многоугольники и их простейшие комбинации.* (Мы здесь ограничимся только такой качественной характеристикой.)

Заметим, что различных таких мозаик (паркетов) ровно 11 и в таких покрытиях плоскости встречаются правильные треугольники, квадраты, шестиугольники, восьмиугольники и двенадцатиугольники. (О паркетах см. [14], [25].)

3. Интересной темой для самостоятельных исследований в этом направлении является изучение вопроса о том, какие правильные многоугольники можно расположить на непериодических разбиениях плоскости, например, на мозаиках Пенроуза (см. [8], [17]); таких разбиений бесконечно много.

4. Было бы интересно изучить вопрос о правильных многоугольниках, у которых вершины имеют координаты из $\mathbb{Q}(\alpha)$ — простого алгебраического расширения поля рациональных чисел, полученного присоединением алгебраического числа α степени $n \geq 2$. В частности, для какого α множество $\mathbb{Q}(\alpha)^2$ (аналог решетки \mathbb{Z}^2) содержит правильный семнадцатиугольник?

§ 2.3. Полуправильные многоугольники

Расширим класс рассматриваемых многоугольников, а именно рассмотрим множество *равноугольных (равносторонних) многоугольников — таких, у которых все внутренние углы (все стороны) равны, но стороны (внутренние углы) могут и отличаться друг от друга*; пересечение этих множеств составляет множество правильных многоугольников. Подчеркнем, что в этих определениях ничего не говорится о выпуклости этих многоугольников. Примерами равноугольных многоугольников, расположенных на решетке, служат квадрат и восьмиугольник (рис. 2.9 а). Частные случаи равносторонних многоугольников изображены на рис. 2.9 б.

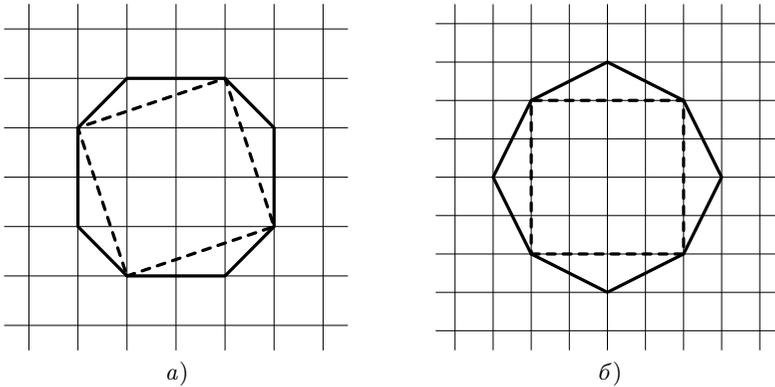


Рис. 2.9

Для этих двух классов также удастся полностью изучить вопрос об их расположении на решетке \mathbb{Z}^2 .

Теорема 2.8 (см. [29]). 1. Из всех возможных равноугольных многоугольников на решетке \mathbb{Z}^2 можно расположить только прямоугольник и восьмиугольник.

2. Среди всех равносторонних многоугольников на решетке \mathbb{Z}^2 можно расположить многоугольник с любым четным числом сторон и нельзя расположить ни одного многоугольника с нечетным числом сторон.

Доказательство. 1. Будем считать, что $n \geq 4$, так как случай правильного треугольника уже подробно рассматривался ранее. То, что квадрат и равноугольный восьмиугольник можно расположить на решетке, видно из рис. 2.9 а. Пусть теперь $n > 4$ и равноугольный n -угольник можно разместить на решетке \mathbb{Z}^2 . Тогда векторы, которые формируют его стороны, имеют целочисленные координаты (рис. 2.10) и угол между любыми двумя соседними векторами равен $2\pi/n$.

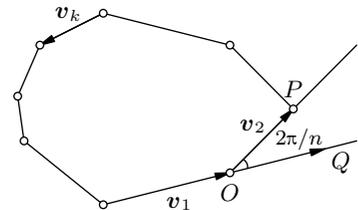


Рис. 2.10

Будем считать точку O началом координат; тогда угол между лучами $[OP]$ и $[OQ]$ равен $2\pi/n$ и $\operatorname{tg}(2\pi/n)$, как мы видели выше (указанные лучи проходят через узлы решетки), должен быть при $n > 4$ рациональным числом. А это, как установлено при доказательстве теоремы 2.6, возможно только в том случае, когда $n = 8$; этим доказательство п. 1 теоремы заканчивается.

Для доказательства второго утверждения будем поочередно делать две операции: добавлять к построенному многоугольнику квадрат и за-

менять квадрат на шестиугольник, равный исходному. Будем считать, что все дополнительные многоугольники пристраиваются с одной стороны (рис. 2.11 а). С каждым шагом общее число сторон увеличивается

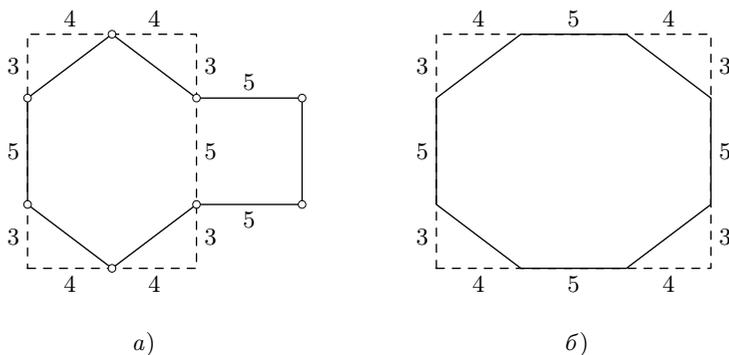


Рис. 2.11

на 2, поэтому будут получены многоугольники с любым четным числом сторон (о возможности поместить на решетку выпуклые равносторонние многоугольники см. задачу 2.12.).

Теперь предположим, что равносторонний многоугольник с нечетным числом сторон n можно расположить на решетке \mathbb{Z}^2 , и пусть \mathbf{v}_k , $k = 1, 2, \dots, n$, — векторы, которые составляют этот многоугольник. Тогда все эти векторы имеют целые декартовы координаты, которые мы обозначим соответственно через (x_k, y_k) . Так как эти векторы образуют многоугольник и имеют равные длины, то выполняются следующие равенства

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_n &= 0, \\ y_1 + y_2 + \dots + y_n &= 0, \\ x_1^2 + y_1^2 &= x_2^2 + y_2^2 = \dots = x_n^2 + y_n^2 = a^2, \end{aligned}$$

где через a обозначена длина стороны многоугольника (напомним, что a^2 — натуральное число). Можно считать, что a имеет наименьшее возможное значение среди всех равносторонних n -угольников, которые можно поместить на решетку (если это было не так, то мы выберем n -угольник именно таким; почему он существует?).

Возводя каждое из первых равенств в квадрат, а затем складывая полученные результаты (с учетом последующих n равенств), получаем соотношение

$$na^2 = -2 \sum_{i \neq j} (x_i x_j + y_i y_j).$$

Так как n нечетно, то a^2 — четное число. Предположим сначала, что a^2 делится на 4. Тогда из равенств $x_i^2 + y_i^2 = a^2$ ($i = 1, 2, \dots, n$) следует, что все x_i и y_i четные. Значит, на решетке можно нарисовать новый равносторонний n -угольник, сторонами которого будут векторы $\mathbf{v}_i/2$ длины $a/2$. Но это противоречит минимальности a .

Пусть теперь a^2 делится на 2, но не делится на 4. Тогда все числа x_i и y_i — нечетные, так как они удовлетворяют уравнению $x_i^2 + y_i^2 = a^2$. Таким образом, сумма

$$\sum_{i \neq j} (x_i x_j + y_i y_j)$$

является четным числом и поэтому a^2 делится на 4, что, как мы уже знаем, невозможно.

Теорема 2.8 полностью доказана.

Замечания. 1. Пункт 2 этой теоремы предлагался на Московской городской олимпиаде в 1964 году ([7]; см. также [21]).

2. Было бы интересно узнать, а какие из таких «полуправильных» многоугольников можно расположить хоть на какой-нибудь решетке \mathbb{L} .

§ 2.4. Правильные многогранники

А какие правильные многогранники можно поместить на целочисленной решетке \mathbb{Z}^3 в пространстве? Существуют пять различных правильных многогранников: тетраэдр, гексаэдр (куб), октаэдр, додекаэдр и икосаэдр (см. [1], [9]).

Правильный тетраэдр, гексаэдр и октаэдр, конечно, можно расположить на целочисленной решетке. Это следует из того, что правильный тетраэдр получается, если провести диагонали граней куба (рис. 2.12 а), а октаэдр — если соединить центры граней куба (рис. 2.12 б).

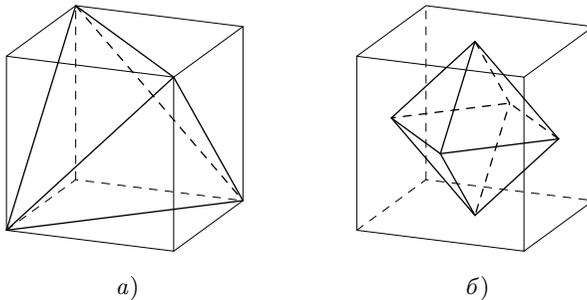


Рис. 2.12

Например, в качестве вершин правильного тетраэдра можно взять точки

$$(1, 1, 1), \quad (-1, -1, 1), \quad (1, -1, -1), \quad (-1, -1, -1),$$

а в качестве вершин октаэдра — точки

$$(\pm 1, 0, 0), \quad (0, \pm 1, 0), \quad (0, 0, \pm 1).$$

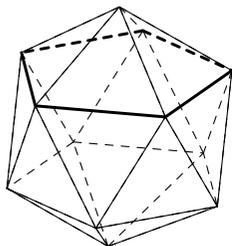


Рис. 2.13

Додекаэдр нельзя расположить на решетке \mathbb{Z}^3 , так как нами было доказано, что не существует правильного пятиугольника с вершинами в узлах решетки, а гранями додекаэдра являются именно правильные пятиугольники.

Икосаэдр также нельзя расположить на \mathbb{Z}^3 , так как он на своей поверхности содержит правильный пятиугольник (см. [1]), составленный из его ребер (рис. 2.13).

Таким образом, мы получили следующую теорему, которую впервые, видимо, отметил Э. Эрхарт в [32].

Теорема 2.9. *Куб, правильный тетраэдр и октаэдр можно расположить на пространственной решетке \mathbb{Z}^3 , а додекаэдр и икосаэдр на этой решетке расположить нельзя.*

Отметим еще один результат, который иллюстрирует разницу между плоскими и пространственными решетками. На решетке \mathbb{Z}^2 квадрат длины отрезка, соединяющего два узла, является (как это следует из теоремы Пифагора) натуральным числом, и на этой решетке можно расположить квадрат, сторона которого не является целым числом (как найти такой квадрат?). Для пространства же верно следующее утверждение.

Теорема 2.10. *Длина стороны куба с вершинами в узлах решетки \mathbb{Z}^n при $n > 2$ всегда выражается целым числом.*

Доказательство. Мы ограничимся случаем $n = 3$ (для больших размерностей доказательство во многом аналогично). Поскольку все равно, какой узел принять за начало координат O , примем за него одну из вершин куба; обозначим через (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , (x_3, y_3, z_3) координаты трех вершин куба, соседних с O . Тогда объем куба со стороной a , как известно, равен

$$a^3 = \pm \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

и, тем самым, является целым числом. С другой стороны, a^2 , как квадрат длины отрезка, соединяющего два узла решетки, также является

целым числом. Поэтому $a = a^3/a^2$ — рациональное число. Но число a (как длина отрезка, соединяющего два узла решетки \mathbb{Z}^3) имеет вид \sqrt{m} , где m — натуральное число; поэтому оно может быть рациональным только тогда, когда m — полный квадрат. Последнее означает, что a — целое число. Теорема 2.10 доказана.

Замечание. В связи с теоремой 2.10 отметим, что Э. Эрхарт [32] и И. Хорозов [39] предприняли интересное исследование и показали, что все тройки взаимно перпендикулярных векторов равной длины с целыми координатами (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , (x_3, y_3, z_3) могут быть найдены по формулам:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2k(ab - cd), & y_1 &= k(a^2 - c^2 + d^2 - b^2), & z_1 &= 2k(ab + cd), \\ x_2 &= 2k(ad + bc), & y_2 &= 2k(ab - cd), & z_2 &= k(b^2 - a^2 + d^2 - c^2), \\ x_3 &= k(c^2 - a^2 + d^2 - b^2), & y_3 &= 2k(ac + bd), & z_3 &= 2k(bc - ad), \end{aligned}$$

где a, b, c, d — целые числа, не равные нулю одновременно, k — натуральное число; при этом сторона куба равна $k(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$.

Упражнения и задачи

2.1. Найдите алгебраическую форму чисел $\sin(\pi/5)$ и $\cos(\pi/5)$.

2.2. Докажите, что $\operatorname{tg}(\pi/q)$ и $\operatorname{ctg}(\pi/q)$ — иррациональные числа при любом натуральном $q \geq 3$ и $q \neq 4$.

2.3. (См. [44].) Пусть α — наименьший угол параллелограмма, расположенного на решетке \mathbb{Z}^2 . Докажите, что имеется только три возможности: α/π — иррациональное число, $\alpha = \pi/2$ или $\alpha = \pi/4$.

2.4. (См. [50], [49].) Предположим, что плоский правильный n -угольник можно расположить на решетке \mathbb{Z}^k при некотором $k \geq 3$. Тогда $n = 3, 4$ или 6 .

2.5. а) Докажите, что если p и q взаимно простые натуральные числа и $\cos(p\pi/q)$ — рациональное число, то число $\cos(\pi/q)$ также рационально.

б) Докажите, что число $\cos(p\pi/q)$ при взаимно простых p и q , $q > 3$, рационально тогда и только тогда, когда рационально число $\cos(\pi/q)$.

в) Пусть p и q взаимно просты, $q \geq 3$. Докажите, что числа $\sin(p\pi/q)$ иррациональны при $q \neq 6$; то же для чисел $\operatorname{tg}(p\pi/q)$ при $q \neq 4$.

2.6. (Киев, 1975; [6].) На решетке \mathbb{Z}^2 расположен треугольник со сторонами a, b, c и радиусом описанной окружности R . Докажите, что $abc \geq 2R$.

2.7. (Студенческая олимпиада в США; [36].) Докажите, что на плоскости не существует такой рациональной точки P , для которой расстояния от P до всех рациональных точек прямой $y = 13x$ являются

рациональными числами. На самом деле, таких точек P в плоскости вообще нет (почему?).

2.8. (Всесоюзная олимпиада, 1986; [5].) Докажите, что на решетке \mathbb{Z}^2 нельзя расположить выпуклый четырехугольник, у которого одна диагональ вдвое длинней другой, а угол между диагоналями равен 45° .

2.9. (См. [21].) Докажите, что если число n не является степенью простого числа, то существует выпуклый равноугольный n -угольник со сторонами длиной $1, 2, \dots, n$.

2.10. Докажите, что, «перекатывая через сторону» правильный пятиугольник по плоскости, ее нельзя полностью покрыть конечное число раз (т.е. таким образом, чтобы каждая точка принадлежала одинаковому числу пятиугольников).

2.11. а) Докажите, что единственный узел решетки \mathbb{Z}^3 , принадлежащий плоскости $x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z = 0$, — начало координат.

б) Докажите, что плоскость $ax + by + cz + d = 0$ тогда и только тогда содержит три различных узла решетки \mathbb{Z}^3 , когда a, b, c, d — рациональные числа.

2.12. Докажите, что на решетке \mathbb{Z}^2 можно расположить *выпуклый* равносторонний многоугольник с любым четным числом сторон.

Глава 3

Две знаменитые формулы

§ 3.1. Формула Пика

Здесь речь пойдет об одной комбинаторной формуле Эйлера и формуле Пика для вычисления площадей многоугольников, которые расположены на решетках, а также связям между ними. Формула Пика была доказана более 100 лет назад, а формула Эйлера еще на 150 лет раньше.

Теорема 3.1 (Г. Пик [46]). *Для площади $[P]$ любого простого многоугольника P на решетке L имеет место формула:*

$$[P] = \left(N_i + \frac{1}{2}N_e - 1 \right) \Delta(L),$$

где N_i — число узлов решетки, расположенных строго внутри многоугольника, N_e — число узлов решетки, расположенных на его границе (включая и вершины), и $\Delta(L)$ — площадь фундаментального параллелограмма решетки.

Так, например, на рис. 3.1 мы имеем: $N_i = 9$, $N_e = 15$ и тем самым по формуле Пика $[P] = 9 + 15/2 - 1 = 31/2$.

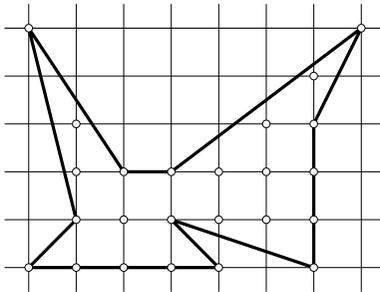


Рис. 3.1

Доказательство. Напомним, что в теореме рассматриваются только *простые многоугольники*, т. е. такие, у которых границей является простая замкнутая несамопересекающаяся ломаная, и к каждой вершине примыкает ровно две стороны. На рис. 3.2 показаны многоугольники, которые простыми не являются.

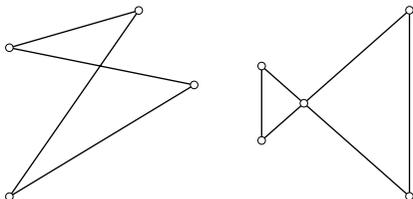


Рис. 3.2

Приступая к доказательству теоремы, во-первых, отметим, что любой простой многоугольник имеет по крайней мере одну диагональ, которая целиком расположена внутри многоугольника (почему? См. задачу 3.1). Отсюда и из принципа математической индукции следует, что простой многоугольник (не обязательно расположенный на решетке) можно разбить на $(n - 2)$ треугольника, все вершины которых являются вершинами исходного многоугольника; тем самым, если многоугольник

находится на решетке, то все вершины полученных треугольников являются узлами решетки. Простым следствием этого является то, что *сумма всех внутренних углов простого многоугольника равна $(n - 2)\pi$* .

Вторым шагом в нашем рассуждении является доказательство того, что любой простой многоугольник на решетке *можно разбить на примитивные треугольники*, т. е. на такие, которые на своей границе и внутри себя не содержат узлов решетки, отличных от своих вершин. Чтобы это показать, снова воспользуемся принципом математической индукции.

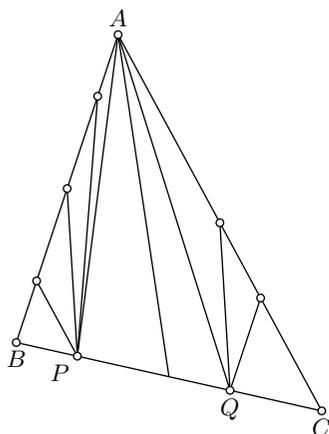


Рис. 3.3

Если треугольник является примитивным, то доказывать нечего. Если внутри треугольника ABC нет точек решетки, но имеются узлы решетки на его сторонах, то, выбрав любую вершину, например A , соединим ее со всеми узлами решетки, которые имеются на противоположной этой вершине стороне треугольника (рис. 3.3).

Тогда все треугольники, кроме ABP и AQC , окажутся примитивными, а у этих двух крайних треугольников имеется по две стороны, которые не содержат узлов решетки (рис. 3.3). Соединив точки P и Q с узлами решетки, находящимися соответственно на сторонах AB и AC , мы разобьем треугольники ABP и AQC на примитивные треугольники. Поэтому любой треугольник на решетке, не содержащий внутри себя узлов решетки, можно разбить на примитивные треугольники.

Общий случай сводится к предыдущему. Пусть внутри данного треугольника имеются узлы решетки. Выбрав один из них, соединим его отрезками с вершинами исходного треугольника ABC (рис. 3.4). Проведенные отрезки разобьют ABC на три треугольника, которые внутри себя содержат меньше внутренних узлов решетки, чем их имел треугольник ABC . Поэтому, поступая аналогично с внутренними узлами решетки для каждого из полученных трех треугольников, мы разобьем каждый из них на треугольники с еще меньшим числом узлов решетки, которые находились в их «внутренностях». Так как мы имеем дело с конечным числом узлов решетки, то в какой-то момент мы разобьем треугольник ABC на треугольники, каждый из которых внутри себя не содержит узлов решетки. Дальнейшее разбиение на примитивные треугольники теперь можно закончить, используя описанный выше процесс (рис. 3.3).

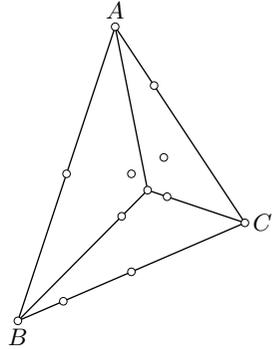


Рис. 3.4

Следующий шаг доказательства является центральным. Предположим, что многоугольник P имеет k вершин (по условию — узлов решетки). Тогда на его границе имеется $N_e - k$ узлов решетки, не являющихся вершинами многоугольника P ; через N обозначим число примитивных треугольников в каком-либо его разбиении на такие треугольники многоугольника P . Мы покажем, что *число N не зависит от способа разбиения (а они могут быть разными)*.

Каждый из узлов решетки, находящихся внутри P , участвует в разбиении на примитивные треугольники и сумма углов всех примитивных треугольников при каждом таком узле равна 360° (см. рис. 3.5 *a*). Поэтому сумма всех углов всех примитивных треугольников с вершинами во внутренних узлах решетки равна $360^\circ N_i$.

Каждый из узлов решетки, который находится на границе многоугольника P , но не является его вершиной, также участвует в раз-

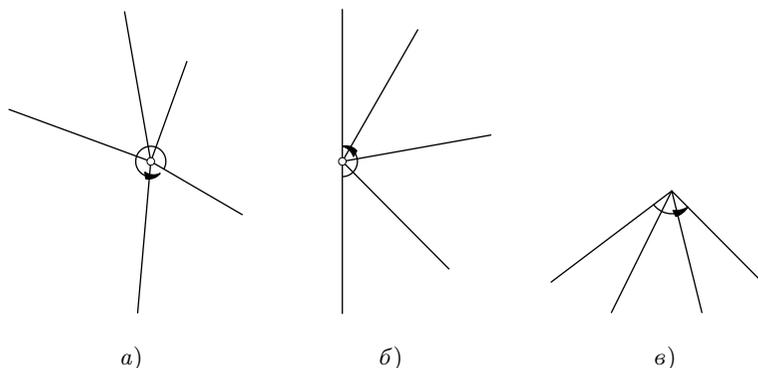


Рис. 3.5

биении и является вершиной некоторых примитивных треугольников (рис. 3.5 б); сумма всех углов всех примитивных треугольников при таких вершинах равна $180^\circ(N_e - k)$.

Наконец, сами вершины многоугольника также являются вершинами некоторых примитивных треугольников разбиения (рис. 3.5 в). Сумма всех углов всех примитивных треугольников при таких вершинах равна сумме внутренних углов многоугольника P и, тем самым, равна $180^\circ(k - 2)$.

Таким образом, для суммы всех углов всех примитивных треугольников, которая, с одной стороны, равна $180^\circ N$, получаем равенство

$$180^\circ N = 360^\circ N_i + 180^\circ(N_e - k) + 180^\circ(k - 2)$$

и, следовательно,

$$N = 2N_i + N_e - 2.$$

В правой части этого равенства (которое является одним из вариантов формулы Эйлера) стоит число, которое не зависит от способа разбиения многоугольника P на примитивные треугольники, что и утверждалось.

Более того, это соотношение завершает доказательство формулы Пика. Для этого достаточно заметить, что любой примитивный треугольник на решетке является половиной (почему?) ее фундаментального параллелограмма и, тем самым (по теореме 1.1), площадь любого примитивного треугольника на решетке \mathbb{L} равна $\Delta(\mathbb{L})/2$. Теорема 3.1 полностью доказана.

Следующий результат «расширяет» теорему Пика.

Теорема 3.2 (см. [30], [34], [35]). *Следующие утверждения эквивалентны:*¹

1. Для любого простого многоугольника M на решетке L имеет место формула Пика:

$$[M] = \left(N_i + \frac{1}{2}N_e - 1\right)\Delta(L).$$

2. Площадь примитивного треугольника на решетке L равна $\Delta(L)/2$.

3. В любом разбиении простого многоугольника на примитивные треугольники для их числа N выполняется равенство:

$$N = 2N_i + N_e - 2.$$

Доказательство. Докажем сначала, что из п. 3 следует п. 2. Чтобы это установить, заметим сначала, что площадь любого треугольника на решетке L (а тем самым и любого многоугольника на ней) выражается числом вида $n\Delta(L)/2$. Для этого частично повторим рассуждения, которые использовались при доказательстве теоремы 1.1. Параллелограмм, расположенный на решетке L , стороны которого параллельны линиям решетки, очевидно, имеет площадь кратную Δ . Значит, площадь треугольника, который является половиной такого параллелограмма, имеет вид $n\Delta/2$. То же самое можно сказать и про любой треугольник с вершинами в узлах решетки, поскольку он всегда может быть получен из параллелограмма отрезанием нескольких треугольников площади $n\Delta/2$ (см. рис. 3.6).

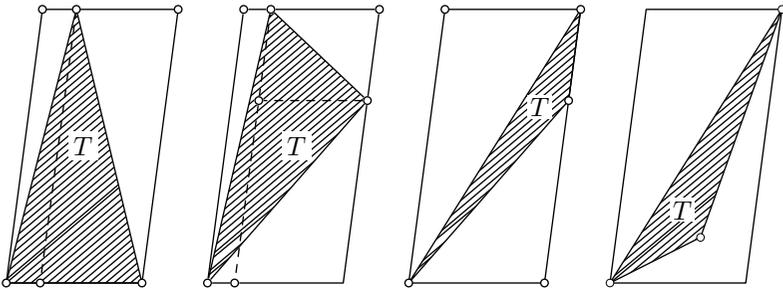


Рис. 3.6

Отсюда, в частности, следует, что площадь любого треугольника не меньше $\Delta(L)/2$.

¹Под эквивалентностью здесь понимается то, что каждое из утверждений теоремы может быть выведено из любого другого без привлечения дополнительных соображений. В дальнейшем в формулировках теорем эквивалентность будет пониматься именно в этом смысле.

Пусть теперь T — любой примитивный треугольник и P — описанный около него, так же, как и выше, минимальный параллелограмм. Кстати, из правила параллелограмма для решеток следует, что для примитивного треугольника T могут иметь место только две последних возможности из представленных на рис. 3.6. Тогда разобьем

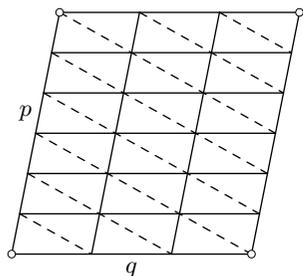


Рис. 3.7

многоугольники, дополняющие T до P , на примитивные треугольники; получим разбиение параллелограмма P на примитивные треугольники T_k , причем один из них совпадает с T .

Теперь разобьем P на примитивные треугольники каноническим способом (рис. 3.7), считая, что он состоит из pq маленьких фундаментальных параллелограммов решетки.

Тогда число примитивных треугольников в первом разбиении, по условию 3 равно $2pq$ и, тем самым, имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^{2pq} [T_k] = pq\Delta.$$

Каждое слагаемое в этой сумме не меньше $\Delta/2$. Поэтому оно возможно лишь тогда, когда все слагаемые в сумме, в том числе и $[T]$, равны $\Delta/2$, что и утверждается в п. 2.

Докажем теперь, что из п. 2 следует п. 1. Для этого рассмотрим функцию

$$F(M) = \left(N_i + \frac{1}{2}N_e - 1\right)\Delta(L),$$

определенную на простых многоугольниках, расположенных на решетке L . Тогда, если разбить многоугольник M при помощи какой-либо ломаной с вершинами в узлах решетки на два других многоугольника M_1 и M_2 (рис. 3.8; в этом случае мы пишем $M = M_1 + M_2$), то, как легко проверить, имеет место следующее аддитивное свойство

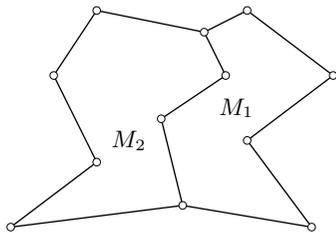


Рис. 3.8

$$F(M) = F(M_1) + F(M_2).$$

Но площадь также обладает свойством аддитивности. Поэтому если формула Пика верна для многоугольников M_1 и M_2 , то она верна и для многоугольника $M = M_1 + M_2$. Но так как любой многоугольник

можно разбить на примитивные треугольники, а формула Пика для таких треугольников имеет место (ибо $\Delta/2 = (0 + 3/2 - 1)\Delta$), то отсюда заключаем, что из п. 2 следует п. 1.

Тот факт, что из п. 1 следует п. 3, устанавливается так. Из формулы Пика следует, что площадь примитивного треугольника равна $\Delta/2$; поэтому число примитивных треугольников в разбиении на такие треугольники многоугольника M равно $[M]/(\Delta/2) = 2N_i + N_e - 2$. Теорема 3.2 полностью доказана.

Замечание. Интересная характеристика примитивных треугольников содержится в статье Н. Б. Васильева [4]. В ней изложено решение следующей задачи, тесно связанной с теоремой 3.2. *Три кузнечика (три точки) в начальный момент времени сидят в трех вершинах одной клетки, а затем начинают «играть в чехарду»: каждый может прыгнуть через одного из двух других, после чего оказывается в симметричной относительно него точке (рис. 3.9; ясно, что после любого числа таких прыжков кузнечики будут попадать в узлы клетчатой бумаги). В каких тройках точек могут через несколько прыжков оказаться кузнечики?*

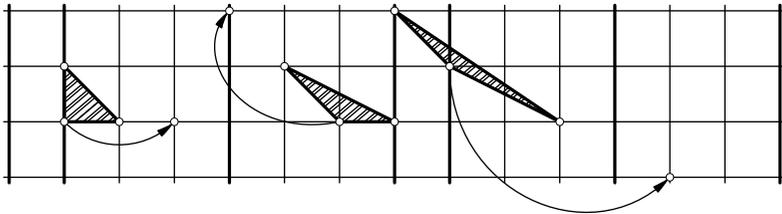


Рис. 3.9

Ответ на вопрос задачи дает следующий результат.

Теорема 3.3 (см. [4]). *Следующие три свойства треугольников на решетке \mathbb{Z}^2 эквивалентны друг другу:*

- 1) *треугольник имеет площадь $1/2$;*
- 2) *треугольник является примитивным;*
- 3) *треугольник достижим.*

При этом, треугольник называется *достижимым*, если в его вершинах могут одновременно оказаться три кузнечика, которые вначале находились в трех вершинах одной клетки. Достижимые треугольники рассматриваются с точностью до параллельного переноса.

В статье Н. Б. Васильева доказательство этой теоремы разбито на 12 более простых утверждений и предложена схема их доказательств.

§ 3.2. Формула Эйлера

Из теоремы 3.2 следует, что формула Пика — это не только утверждение о площади многоугольника, но является результатом и чисто комбинаторного характера о триангуляциях многоугольника (т. е. разбиениях на треугольники).

Мы будем рассматривать только *правильные* триангуляции простых многоугольников, т. е. такие разбиения на треугольники, когда любые два треугольника либо имеют общую сторону, либо имеют только одну общую вершину, либо вообще не имеют общих точек. Так, на рис. 3.10 *а* мы имеем правильную триангуляцию, а на рис. 3.10 *б* — нет.

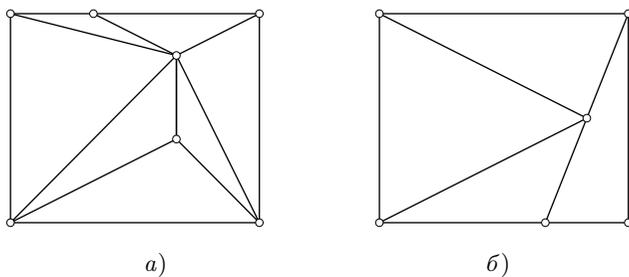


Рис. 3.10

Ясно, что любой простой многоугольник M может быть триангулирован бесконечным числом способов. Однако для числа N треугольников в триангуляции имеется также простая формула: $N = 2N_i + N_e - 2$, где через N_i и N_e обозначено соответственно число вершин треугольников, находящихся строго внутри M , и число вершин треугольников, находящихся на границе M . Доказательство этого факта проводится ровно так же, как и при доказательстве теоремы Пика.

Другое комбинаторное тождество связано с общим числом E всех сторон треугольников, входящих в рассматриваемую триангуляцию (на рис. 3.10 *а*: $E = 13$, $N = 7$, $N_i = 2$, $N_e = 5$). Так как имеется N_e вершин на границе M , то существует N_e треугольников, одна сторона которых находится на границе M , и $E - N_e$ сторон треугольников, которые находятся строго внутри M , причем каждая такая «внутренняя» сторона принадлежит ровно двум треугольникам. Следовательно, $3N$ сторон у N треугольников включают каждую из $E - N_e$ сторон дважды и каждую из N_e сторон по одному разу. Таким образом,

$$3N = 2(E - N_e) + N_e = 2E - N_e.$$

Значит,

$$2E = 3N + N_e = (2N_i + N_e - 2) + N_e,$$

т. е.

$$E = 3N_i + 2N_e - 3.$$

Наконец, самый важный результат комбинаторного характера для правильных карт (связанных графов) на плоскости (в частности, для триангуляций многоугольника) был обнаружен Л. Эйлером в 1750 г. (см. [13], [18]).

Правильная многоугольная карта — это такое разбиение простого многоугольника на другие простые многоугольники, которые удовлетворяют тем же требованиям, что и при правильной триангуляции. Тогда *формула Эйлера* утверждает, что

$$V + F - E = 1,$$

где V обозначает число вершин всех многоугольников, F — число всех многоугольников разбиения, E — общее число всех сторон многоугольников разбиения (рис. 3.11 а); при этом вершины и ребра учитываются по одному разу. Само слово «карта», в частности, подчеркивает, что формула Эйлера имеет место и для «криволинейных разбиений» (рис. 3.11 б) — важна не форма линий и не расположение точек на плоскости, а только манера соединения точек и выполнение требования «правильности» (типа разбиения на треугольники четырехугольника, показанного на рис. 3.10 б). Заменяя отрезки кривыми линиями, мы легко можем получить карту, которая правильной не является (см. рис. 3.11 в). Тем самым, можно сказать, что правильные карты, для которых формула Эйлера имеет место, — это система точек, которые «правильным» образом соединены некоторыми линиями. Точнее говоря, формула Эйлера верна для плоских многоугольных графов; при этом, говоря

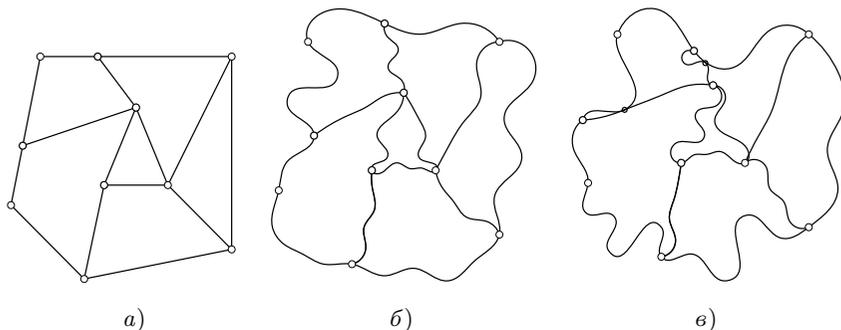


Рис. 3.11

о многоугольниках, мы не предполагаем, что их стороны непременно прямолинейны; см. [13].

Сказанное о триангуляциях можно объединить следующим образом.

Теорема 3.4 ([37], [42]). *Следующие три утверждения эквивалентны¹ между собой:*

1. Для триангуляции простого многоугольника $N = 2N_i + N_e - 2$.
2. Для триангуляции простого многоугольника $E = 3N_i + 2N_e - 3$.
3. Для правильной плоской карты имеет место формула Эйлера

$$V + F - E = 1.$$

Доказательство. Нами уже доказано, что из п. 1 следует п. 2. Установим (см. [42]), что п. 2 влечет п. 3. Пусть имеется простой многоугольник M , который разбит на другие простые многоугольники так, чтобы образовалась правильная многоугольная карта K (у которой V — число вершин, E — число сторон и F — число многоугольников). Выберем внутри каждого многоугольника разбиения точку и соединим ее, быть может кривыми линиями, с вершинами соответствующего ей многоугольника разбиения, но так, чтобы эти линии находились строго внутри этого многоугольника (см. пример на рис. 3.12).

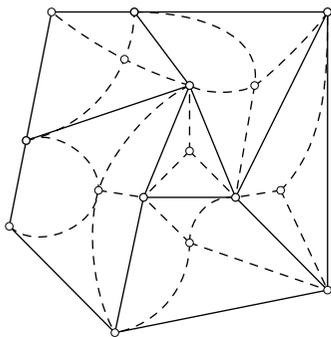


Рис. 3.12

Теперь покажем, что формула для триангуляции многоугольника, фигурирующая в п. 2, справедлива и для вновь полученной «криволинейной триангуляции» T карты K (сама эта формула не зависит от вида треугольников!).

Придерживаясь старых обозначений (N_i — число внутренних вершин треугольников, N_e — число вершин треугольников, расположенных на границе исходного многоугольника M , которое совпадает с числом вершин M), для триангуляции T , очевидно, имеем:

$$N_i + N_e = V + F.$$

У каждого треугольника в построенной триангуляции две стороны совпадают с проведенными отрезками, а третья — с одной из сторон первоначальных многоугольников.

Таким образом, удвоенное число новых сторон треугольников равно удвоенному числу треугольников. Поэтому для числа E' всех «сторон»

¹Эквивалентность здесь и в следующей теореме понимается как и в теореме 3.2.

треугольников в T имеем равенство

$$E' = E + N,$$

где N — число треугольников в T . Используя теперь еще и полученное выше равенство

$$3N = 2E' - N_e,$$

имеем:

$$\begin{aligned} V + F - E &= (N_i + N_e) - (E' - N) = N_i + N_e - (E' + N_e) = \\ &= N_i + N_e - (3N_i + 3N_e - 3)/3 = 1, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Осталось показать, что из п. 3 следует п. 1. Пусть имеется правильная триангуляция (N, N_i, N_e) — как и раньше). Эта триангуляция является правильной картой (V, E, F) — как и раньше). Тогда

$$V = N_i + N_e, \quad 2E = 3N + N_e, \quad F = N.$$

Следовательно,

$$1 = V + F - E = N_i + N_e + N - \frac{3}{2}N - \frac{1}{2}N_e = N_i + \frac{1}{2}N_e - \frac{1}{2}N,$$

и поэтому

$$N = 2N_i + N_e - 2.$$

Теорема 3.4 полностью доказана.

Теорема 3.5. *Формулы Эйлера и Пика эквивалентны.*

Доказательство. Докажем теорему только для случая, когда вершины рассматриваемой карты являются узлами некоторой решетки, например \mathbb{Z}^2 . В общем случае карту нужно немного «пошевелить» так, чтобы она «вписалась» в некоторую решетку. Попробуйте это самостоятельно объяснить.

Тот факт, что из формулы Эйлера следует формула Пика, вытекает из теоремы 3.3 и того утверждения, что площадь примитивного треугольника равна половине площади фундаментального параллелограмма решетки.

Для того чтобы из формулы Пика вывести формулу Эйлера, заметим следующее. Пусть правильная карта M (состоящая из простых многоугольников) расположена на решетке, т. е. вершины всех многоугольников карты находятся в узлах; пусть V, F, E обозначают, как и раньше, число ее вершин, число многоугольников и число сторон всех многоугольников. Проведем в каком-либо простом многоугольнике, составляющих карту M , внутреннюю диагональ. Для этой вновь полученной карты M' имеем: $V' = V, F' = F + 1, E' = E + 1$ и, следова-

тельно,

$$V + F - E = V' + F' - E'.$$

Таким образом, проводя последовательно внутренние диагонали во всех многоугольниках карты M , мы придем к некоторой новой карте, состоящей из треугольников, для которой линейная комбинация, фигурирующая в формуле Эйлера (она называется эйлеровой характеристикой), численно равна $V + F - E$.

Аналогично (как?) проверяется, что если теперь разбить каждый из треугольников этой новой карты на примитивные треугольники, то мы придем уже к карте, являющейся простым многоугольником, разбитым на примитивные треугольники с тем же значением эйлеровой характеристики. Завершается теперь доказательство ссылками: сначала на теорему 3.2, а затем на теорему 3.3.

§ 3.3. Обобщения формулы Пика

Связи формулы Пика с формулой Эйлера подсказывают, что существует аналог формулы Пика и в более общем случае (по этому поводу имеется несколько работ — см., например, [30], [32], [35], [38]).

Простейшим таким обобщением является распространение теоремы Пика на простые многоугольники с «лакунами» (отверстиями), которые сами являются простыми многоугольниками (рис. 3.13 а); будем их называть простыми лакунами.

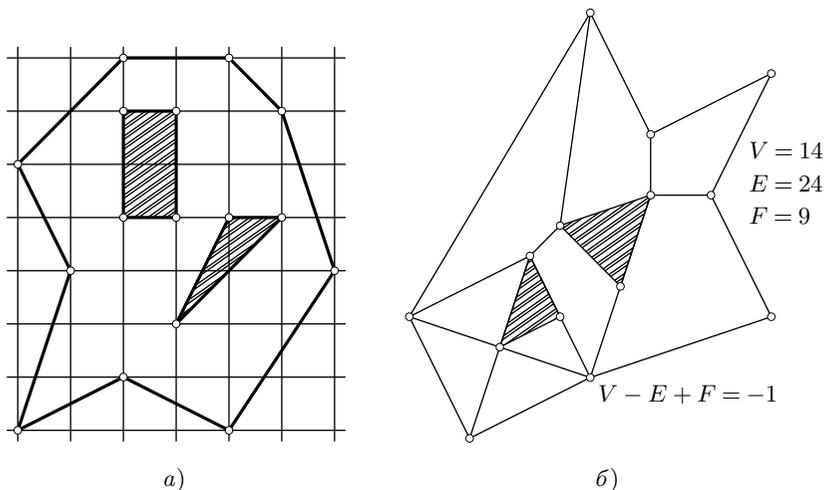


Рис. 3.13

Для таких многоугольников с лакунами имеет место следующий результат.

Теорема 3.6. *Для любого простого многоугольника M с n простыми лакунами на решетке L имеет место равенство*

$$[M] = \left(N_i + \frac{1}{2}N_e - 1 + n \right) \Delta,$$

где $\Delta = \Delta(L)$ — площадь фундаментального параллелограмма, N_i — число узлов решетки, расположенных внутри M , но не на границе лакун и не внутри лакун, а N_e — число узлов решетки, которые принадлежат границе M и границам всех лакун.

Доказательство. Отметим, что для простой многоугольной карты, из которой удалены n многоугольников (без их граничных ребер, расположенных внутри карты), ее составляющих (рис. 3.13 б), имеет место обобщенная формула Эйлера: $V - E + F = 1 - n$. Это следует из того, что, добавляя к такой карте ее лакуны, мы получим простую карту, для которой имеет место обычная формула Эйлера. При этом, число многоугольников увеличится на n по сравнению с F и либо число вершин, либо число ребер не изменится (по сравнению с исходной картой с лакунами).

Провести теперь доказательство можно по привычной нам схеме. Для этого разобьем многоугольник M , без лакун, на примитивные треугольники и обозначим через f их число, через e — общее число их сторон, через v — общее число вершин. Тогда, как мы уже знаем, $3f = 2e - N_e$, N_e — число узлов решетки, расположенных на «полной границе» многоугольника M с лакунами. Значит,

$$\begin{aligned} \frac{[M]}{\Delta} &= \frac{1}{2}f = \frac{1}{2}(e - v + 1 - n) = \frac{1}{2} \left(\frac{3f + N_e}{2} - N_e - N_i + 1 - n \right) = \\ &= \frac{3}{4}f - \frac{1}{4}N_e - \frac{1}{4}N_i + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}n. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2}f = N_i + \frac{1}{2}N_e - 1 + n,$$

что и завершает доказательство теоремы.

Замечания. 1. В работе [51] отмечено, что формулу из теоремы 3.6 можно записать в виде

$$[M] = \left(N - \frac{1}{2}N_e - \chi(M) \right) \Delta,$$

где N — полное число точек решетки, расположенных как на границах всех многоугольников, так и внутри M (но вне лакун), и $\chi(M)$ — эйлерова характеристика такого многоугольника с лакунами.

В таком виде эта формула остается справедливой и для более сложных многоугольников, показанных, например, на рис. 3.14. Отметим, что доказательство этого утверждения проводится точно так же, как мы доказывали теорему 3.6.

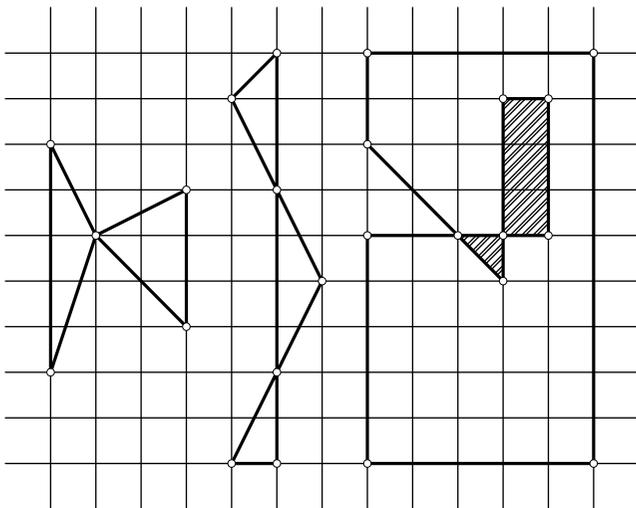


Рис. 3.14

Еще одно интересное обобщение формулы Пика получил Дж. Рив в [47], сильно расширив класс рассматриваемых многоугольных областей на решетке:

$$[M] = \left(N_i + \frac{1}{2}N_e + k\right)\Delta, \quad k = -\chi(M) + \frac{1}{2}\chi(\partial M),$$

где $\chi(M) = V - E + F$, $\chi(\partial M) = V - E$ — эйлеровы характеристики соответственно области и ее границы. Например, для многоугольных фигур, показанных на рис. 3.14, имеем: $k = 1$, $k = -2$, $k = -4$.

Дальнейшие обобщения содержатся в работе [38].

2. А. Кушниренко в работе [15] предпринял общее исследование в другом направлении. В ней построена небольшая теория, которая, по словам автора работы, «позволяет угадать и доказать все мыслимые аналоги формулы Пика на плоскости и в пространстве».

3. При поиске аналога формулы Пика для многогранников на пространственных решетках (если использовать схему проведенного выше доказательства для плоского случая) мы встречаемся с первой трудностью — существуют многогранники, которые нельзя разбить на тет-

раздры так, чтобы вершины всех таких тетраэдров были бы вершинами исходного многогранника. Такие многогранники называются *многогранниками Леннеса* (см. [33]).

Простейший многогранник Леннеса может быть получен следующим образом. Пусть два одинаковых равносторонних треугольника ABC и $A'B'C'$ расположены вначале «строго один под другим» в параллельных плоскостях. Затем треугольник ABC повернули относительно его центра на угол 30° . Тогда шесть вершин A, B, C, A', B', C' , двенадцать ребер $AB, BC, CA, A'B', B'C', C'A', AA', BB', CC', AB', BC', CA'$ и восемь граней $ABC, A'B'C', AA'C, CC'B, BB'A, AA'B', BB'C', CC'A'$ образуют, как нетрудно заметить, многогранник Леннеса (см. также задачу 3.2).

4. Следующий пример иллюстрирует еще одну трудность: не существует простого аналога формулы Пика для многогранников в пространстве. Рассмотрим тетраэдр (рис. 3.15) на решетке \mathbb{Z}^3 , вершины которого находятся в узлах $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$ и $(0, 0, k)$.

Для такого тетраэдра $N_i = 0$, $N_e = 4$ при любом k , но его объем зависит от k и может быть сделан сколь угодно большим; поэтому его объем не может быть линейной функцией только от N_i и N_e .

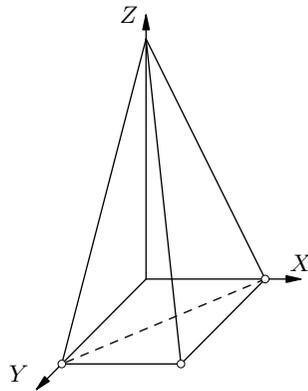


Рис. 3.15

§ 3.4. Приложения формулы Пика

Приведем некоторые примеры использования формулы Пика при решении задач.

1. *Шахматный король обошел доску 8×8 клеток, побывав на каждом поле ровно один раз и последним ходом вернувшись на исходное поле. Ломаная, соединяющая последовательно центры полей, которые проходил король, не имеет самопересечений. Какую площадь может ограничивать эта ломаная? (Сторона клетки равна 1.)*

Из формулы Пика сразу следует, что площадь, ограниченная ломаной, равна $64/2 - 1 = 31$; здесь узлами решетки служат центры 64 полей и, по условию, все они лежат на границе многоугольника. Таким образом, хотя таких «траекторий» короля достаточно много, но все они ограничивают многоугольники равных площадей.

2. *Средины сторон квадрата соединены отрезками с вершинами так, как это показано на рис. 3.16. Найдти отношение площади квадрата к площади восьмиугольника, образованного проведенными отрезками.*

Довольно стандартная и распространенная ошибка при решении этой задачи состоит в предположении, что «из симметричности ситуации следует, что восьмиугольник правильный». Однако это не так: он равносторонний, но углы у него не равны. Так как нам нужно найти отношение площадей, то размеры квадрата для нас роли не играют. Поэтому рассмотрим квадрат, расположенный на целочисленной решетке \mathbb{Z}^2 , размером 12×12 ; стороны квадрата лежат на прямых решетки. Тогда, как нетрудно заметить, все вершины восьмиугольника являются узлами решетки; более того, отсюда легко заметить, что этот восьмиугольник правильным не является (рис. 3.17) — он равносторонний, но не равноугольный.

Из формулы Пика теперь легко следует, что площадь восьмиугольника равна $21 + 8/2 - 1 = 24$. Поэтому искомое отношение площадей равно 6.

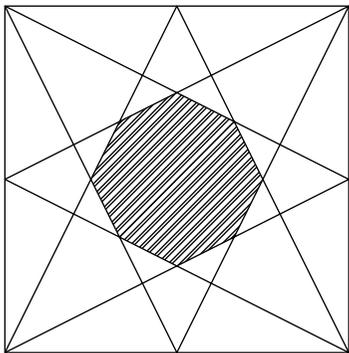


Рис. 3.16

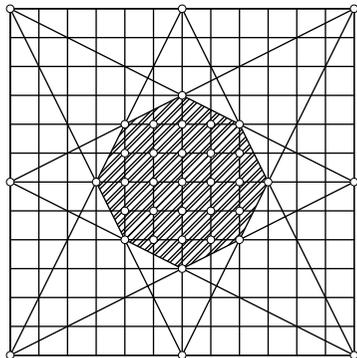


Рис. 3.17

Заметим, что если бы вместо квадрата мы взяли параллелограмм, то решение не изменилось бы.

Рассмотрим еще одну задачу на вычисление (сравнение) площадей.

3. *В каждом из случаев, представленных на рис. 3.18, вычислить площадь указанного параллелограмма (как функцию от $[ABCD]$), если стороны параллелограмма $ABCD$ разделены на p и t равных частей.*

Обозначим через A_1 и A_2 искомые площади и проведем параллельные прямые, как это показано на рис. 3.19; другими словами, построим

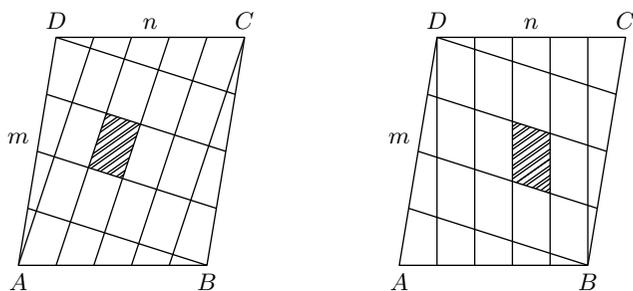


Рис. 3.18

решетку точек, в узлах которых находятся все вершины нужных нам параллелограммов.

Для параллелограмма $ABCD$ в первом случае имеем: $N_i = mn$, $N_e = 4$, и поэтому

$$[ABCD] = \left(nm + \frac{4}{2} - 1 \right) A_1 = (nm + 1) A_1.$$

Отсюда

$$A_1 = \frac{[ABCD]}{nm + 1}.$$

Во втором случае для параллелограмма $ABCD$ имеем: $N_e = 4$ и $N_i = 2(n - 1) + (m - 2)n = mn - 2$, так как две линии содержат по $n - 1$ узлов, а $m - 2$ оставшихся — по n узлов решетки. Из формулы Пика

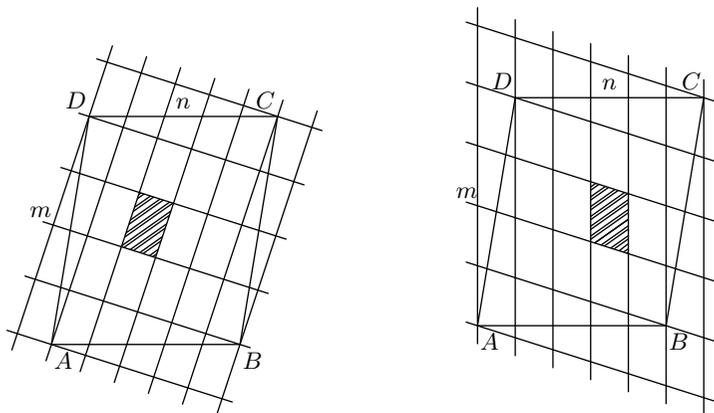


Рис. 3.19

следует, что

$$[ABCD] = \left(mn - 2 + \frac{4}{2} - 1 \right) A_2 = (mn - 1) A_2,$$

и, тем самым,

$$A_2 = \frac{[ABCD]}{mn - 1}.$$

Аналогично, построив подходящую решетку, решим следующую задачу (см. [25], [13]).

4. Каждая сторона треугольника ABC разделена на три равные части и по одной из точек деления соединены с вершинами так, как это показано на рис. 3.20. Сравните площадь треугольника, полученного в центре, с площадью треугольника ABC .

Построим решетку точек так, чтобы интересующие нас треугольники имели свои вершины в узлах этой решетки: для этого проведем параллельные прямые, как это показано на рис. 3.21. По теореме Фалеса

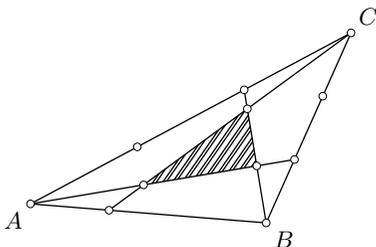


Рис. 3.20

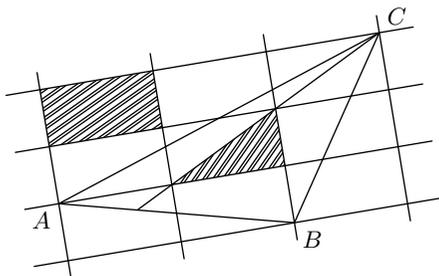


Рис. 3.21

проверяется, что построенные параллельные прямые лежат на равном расстоянии друг от друга, и, значит, точки их пересечения действительно образуют решетку.

Если $[T]$ — площадь треугольника T , то площадь фундаментального параллелограмма построенной решетки равна $2[T]$. По формуле Пика имеем:

$$[ABC] = \left(3 + \frac{3}{2} - 1 \right) 2[T] = 7[T];$$

поэтому $[T] = [ABC]/7$.

5. Еще одно применение формулы Пика позволяет установить интуитивно ожидаемый и интересный результат (см. [23]): при любом расположении на плоскости квадрата размером $n \times n$ он покроеет не более $(n + 1)^2$ узлов целочисленной решетки \mathbb{Z}^2 .

Пусть квадрат K расположен каким-либо образом на плоскости; он содержит узлы целочисленной решетки (быть может) внутри себя и на своей границе. Рассмотрим минимальную замкнутую ломаную с вершинами в узлах решетки, ограничивающую выпуклый многоугольник M , который содержит все узлы в квадрате и на его границе (другими словами, рассмотрим минимальную выпуклую оболочку указанных узлов решетки). Тогда M содержится в K и поэтому $[M] \leq n^2$. Из формулы Пика для M заключаем, что

$$N_i + \frac{1}{2}N_e - 1 \leq n^2,$$

т. е.

$$N_i + \frac{1}{2}N_e \leq n^2 + 1.$$

Кроме того, ясно, что периметр M не превосходит $4n$ — периметра квадрата K . Но никакие две целочисленные точки не могут находиться на расстоянии, меньшем единицы; следовательно, на границе M не более $4n$ узлов решетки, т. е. $N_e/2 \leq 2n$. Складывая это неравенство с предыдущим неравенством, заключаем, что общее число узлов решетки, которые покрывает K , не превосходит

$$N_i + N_e \leq n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2.$$

Упражнения и задачи

3.1. Докажите, что любой простой многоугольник имеет по крайней мере одну внутреннюю диагональ.

Это можно сделать разными способами (см. [3], [4], [33]). Имея в виду другие аспекты этого утверждения, можно воспользоваться, например, следующей схемой.

1. Вершину многоугольника назовем изолированной, если существует прямая, которая отделяет эту вершину от других вершин многоугольника, т. е. эта вершина и все остальные лежат в разных полуплоскостях, которые определяет такая прямая.

Докажите, что простой многоугольник имеет по крайней мере две изолированные вершины.

2. Более того, докажите, что простой многоугольник имеет не менее трех изолированных вершин.

3. Как следствие п. 1, докажите, что простой n -угольник можно разбить на $n - 2$ треугольника, чьи вершины являются вершинами многоугольника.

3.2. Докажите, что многогранник, развертка которого показана на рис. 3.22, также является многогранником Леннеса (см. [33]). При практическом изготовлении рёбра, показанные на этом рисунке пунктирными линиями, следует расположить «внутри» модели.

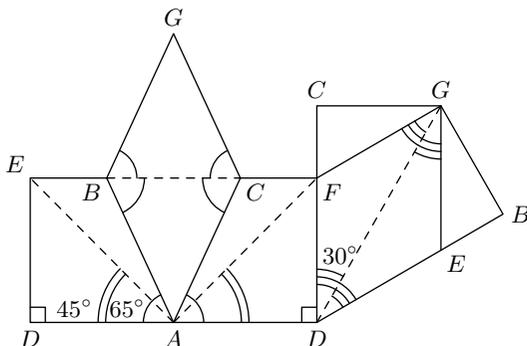


Рис. 3.22

3.3. (Международная олимпиада школьников.) На плоскости найти 1000 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой и такие, что расстояние между любыми двумя точками выражается иррациональным числом, а площадь любого треугольника, с вершинами в этих точках, выражается рациональным числом.

3.4. (Задачник «Кванта», М 1441, Квант № 4, 1994 г.) Четыре кузнечика сидят в вершинах квадрата. Каждую минуту один из них прыгает в точку, симметричную ему относительно другого кузнечика. Докажите, что кузнечики не могут в некоторый момент оказаться в вершинах квадрата большего размера.

3.5. (См. [45].) Пусть $f(M) = aN_i(M) + bN_e(M) + c$, где a, b, c — некоторые числа. Пусть эта функция, заданная на всех простых многоугольниках, расположенных на целочисленной решетке \mathbb{Z}^2 , такова, что $f(M) = f(M_1) + f(M_2)$, если M разбит некоторой ломаной с вершинами в узлах решетки на два простых многоугольника M_1 и M_2 (такие функции называются аддитивными).

Докажите, что $b = a/2$ и $c = -a$.

3.6. (См. [15].) Докажите, что для любого простого многоугольника на решетке \mathbb{Z}^2 имеет место равенство

$$2[M] = N(2M) - 2N(M) + 1,$$

где $N(M)$ обозначает полное число узлов решетки, расположенных как внутри, так и на границе многоугольника M ; $2M$ — многоугольник,

полученный из M растяжением в два раза относительно начала координат.

3.7. (Всесоюзная студенческая олимпиада.) Все вершины выпуклого многогранника M являются узлами решетки \mathbb{Z}^3 . Обозначим через $[M]$ объем многогранника M , а через kM — многогранник, радиус-векторы точек которого получаются умножением на k радиус-векторов точек из M . Докажите, что

$$6[M] = N(3M) - 3N(2M) + 3N(M) - 1.$$

3.8. Докажите, что простой семиугольник нельзя разрезать на выпуклые шестиугольники.

3.9. (Студенческая олимпиада, Москва.) Докажите, что на целочисленной решетке \mathbb{Z}^2 любой выпуклый многоугольник площади A можно заключить в параллелограмм площади не более $4A$ (все вершины многоугольников — узлы решетки).

3.10. (Студенческая олимпиада, Москва.) На целочисленной решетке \mathbb{Z}^2 расположено p различных треугольников, которые примыкают к общей стороне AB ; при этом AB не меньше всех других сторон. Докажите, что сумма площадей треугольников не меньше $p^2/8$.

3.11. (Студенческая олимпиада, мехмат МГУ.) В пространстве дан параллелепипед с вершинами в узлах целочисленной решетки \mathbb{Z}^3 . Внутри параллелепипеда расположено a узлов, на внутренней части граней (исключая ребра) — b узлов, на ребрах (исключая вершины) — c узлов. Докажите, что объем параллелепипеда равен $a + b/2 + c/4 + 1$.

Л и т е р а т у р а ¹

- [1] Многоугольники и многогранники // Энциклопедия элементарной математики. Т. 4. — М.: Физматгиз, 1963.
- [2] Бореви́ч З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. — М.: Наука, 1972.
- [3] Вавилов В.В. Избранные лекции по геометрии. — Алматы: Дарын, 2000.
- [4] Васильев Н.Б. Вокруг формулы Пика // Квант. — 1974. — № 12. С. 39–43.
- [5] Васильев Н.Б., Егоров А.А. Задачи всесоюзных математических олимпиад. — М.: Наука, 1988.
- [6] Вышенский В.А., Карташов Н.В., Михайловский В.И., Ядренко М.И. Сборник задач киевских математических олимпиад. — Киев: Вища школа, 1984.
- [7] Гальперин Г.А., Толпыго А.К. Московские математические олимпиады. — М.: Просвещение, 1986.
- [8] Гарднер М. От мозаик Пенроуза к надежным шифрам. — М.: Мир, 1993.
- [9] Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. — М.: Наука, 1981.
- [10] Гутенмахер В.Л. Косоугольные координаты и области Дирихле // Квант. — 1972. — № 4. С. 19–22.
- [11] Егоров А.А. Решетки и правильные многоугольники // Квант. — 1974. — № 12. С. 26–33.

¹Журнал «Квант» и большинство русскоязычных книг из списка литературы доступны в электронном виде по адресам: kvant.mccme.ru, ilib.mccme.ru.

-
- [12] Зарубежные математические олимпиады / Под ред. И. Н. Сергеева. — М.: Наука, 1987.
- [13] Коксетер Г. С. М. Введение в геометрию. — М.: Наука, 1966.
- [14] Колмогоров А. Н. Паркеты из правильных многоугольников // Квант. — 1986. — № 8. С. 3–7.
- [15] Кушниренко А. Г. Целые точки в многоугольниках и многогранниках // Квант. — 1977. — № 4. С. 13–20.
- [16] Конвей Дж., Слоэн Н. Упаковки шаров, решетки и группы: В 2 т. М.: Мир, 1990.
- [17] Корепин В. Узоры Пенроуза и квазикристаллы // Квант. — 1987. — № 6.
- [18] Лакатос И. Доказательства и опровержения. — М.: Наука, 1967.
- [19] Никулин В. В., Шафаревич И. Р. Геометрии и группы. — М.: Наука, 1983.
- [20] Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Т. 2. — М.: Наука, 1978.
- [21] Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. — М.: МЦНМО, 2006.
- [22] Рид К. Гильберт. — М.: Наука, 1977.
- [23] Хонсбергер Р. Математические изюминки. — М.: Наука, 1992.
- [24] Штейнгауз Г. Задачи и размышления. — М.: Наука, 1974.
- [25] Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп. — М.: Наука, 1981.
- [26] Яковлев Г. Н., Купцов Л. П., Резниченко С. В., Гусятников П. Б. Всероссийские математические олимпиады школьников. — М.: Просвещение, 1992.
- [27] Araujo J., Keilhauer G., Pietrocola N., Vavilov V. Area y Volumen en la geometria elemental. — Buenos Aires: Red Olimpica, 2000.
- [28] Beeson M. Triangles with vertices on lattice points // Amer. Math. Monthly. — 1992. — V. 99. P. 243–252.
- [29] Ball D. G. The constructability of regular and equilateral polygons on square pinboard // Math. Gaz. — 1973. — V. 57. P. 119–122.
- [30] DeTemple D., Robertson J. M. The equivalence of Euler's and Pick's theorems // Math. Teacher. — 1974. — V. 67. P. 222–226.
- [31] DeTemple D. Pick's formula: a retrospective // Math. Notes from Washington State University. — 1989. — V. 32. P. 115–120.

- [32] Ehrhart E. Sur les polygones et les polyèdres réguliers entiers // L'Enseignement Math. — 1959. — P. 81–85.
- [33] Eves H. Estudio de las geometrias: T. 1–2. — Mexico: Centro Regional de Ayuda Tecnica, 1969.
- [34] Funkenbusch W.W. From Euler's formula to Pick's formula using an edge theorem // Amer. Math. Monthly. — 1974. — V. 81. P. 647–648.
- [35] Gaskel R.W., Klamkin M.S., Watson P. Triangulations and Pick's theorem // Math. Mag. — 1976. — V. 49. P. 35–37.
- [36] Gilbert G.T., Krusemeyer M.I., Larson L.C. The Wohascum county problem book // The Dolciani mathematical expositions № 14, The Mathematical Association of America, 1993.
- [37] Grunbaum B., Shephard G.S. Pick's Theorem // Amer. Math. Monthly. — 1993. — V. 3. P. 150–161.
- [38] Hadwiger H., Debrunner H. Kombinatorische Geometrie in der Ebene // Monographies de «L'Enseignement Mathématique». — 1960. — № 2.
- [39] Horozov I. Cubes in integer lattice // Math. and Inf. Quarterly. — 1993. — V. 3, № 3. P. 85–89.
- [40] Klamkin M., Chrestenson H.E. Polygon Imbedded in a Lattice // Amer. Math. Monthly. — 1963. — V. 70. P. 447–448.
- [41] Klamkin M. Problem 709 // Elemente der Math. — 1975. — V. 30. P. 14–15.
- [42] Liu A.C.F. Lattice points and Pick's theorem // Math. Mag. — 1979. — V. 52. P. 232–235.
- [43] Lucas E. Theoreme sur la geometrie des quinconces // Bull. Soc. Math. France. — 1878. — V. 6. P. 9–10.
- [44] Makowski A. Angles of parallelogram with in lattice points // Elemente der Mathematik. — 1962. — V. 1. P. 114–115.
- [45] Niven I., Zuckerman H.S. Lattice points and polygonal area // Amer. Math. Monthly. — 1967. — V. 74. P. 1195–1200.
- [46] Pick G. Geometrisches zur Zahlenlehre // Sitzungber. Lotos (Prague). — 1899. — V. 19. P. 311–319.
- [47] Reeve J.E. On the volume of lattice polyhedra // Proc. London Math. Soc. (3) — 1957. — V. 7. P. 378–395.
- [48] Reeve J.E. On further note on the volume of lattice polyhedra // J. London Math. Soc. — 1959. — V. 34. P. 57–62.

-
- [49] Scherrer W. Die Einlagerung eines regulären Vielecks in ein Gitter // Elemente der Mathematik. — 1946. — V. 1. P. 97–98.
- [50] Schenberg I. J. Regular simplices and quadratic forms // J. London Math. Soc. — 1937. — V. 12. P. 48–55.
- [51] Varberg D. E. Pick's theorem revisited // Amer. Math. Monthly. — 1985. — V. 92. P. 584–587.

Валерий Васильевич Вавилов
Алексей Владимирович Устинов

Многоугольники на решетках

Редакторы: Коробкова Т. Л., Шитова И. М.

Подписано в печать 1.11.2006 г. Формат 60 × 90 1/16. Печ. л. 4,5.

Тираж 2000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. 241-74-83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУП «Полиграфические ресурсы».

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга», Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. 241-72-85. E-mail: biblio@mcsme.ru
