

## Геометрия устной математической олимпиады 6-7

---

1. Существует ли 10-угольник, который можно разрезать на 5 треугольников?
2. На клетчатой бумаге нарисован квадрат. Известно, что его можно разрезать на прямоугольники размером  $1 \times 6$  клеток. Докажите, что этот квадрат можно также разрезать на уголки из трёх клеток.
3. Существует ли 10-угольник, который одной прямой можно разбить на 6 частей?
4. Можно ли оклеить поверхность куба прямоугольниками, так чтобы любой прямоугольник граничил (по отрезку) ровно с пятью другими?
5. Можно ли так расположить на плоскости четыре прямоугольника, чтобы ни одна вершина не была общей для всех прямоугольников, но у любых двух прямоугольников была одна общая вершина? (Прямоугольники могут пересекаться.)
6. Нарисуйте шестиугольник, который жюри не сможет разрезать на два четырехугольника.
7. Можно ли из прямоугольников  $1 \times 1, 1 \times 2, \dots, 1 \times 13$  сложить какой-нибудь прямоугольник, стороны которого больше 1 (нужно использовать все прямоугольники)?
8. На стороне  $AB$  квадрата  $ABCD$  отмечена произвольная точка  $M$ . Отрезки  $BD$  и  $CM$  пересекаются в точке  $P$ . Докажите, что площадь треугольника  $CDP$  равна сумме площадей треугольников  $ADM$  и  $BMP$ .
9. Разрежьте по клеточкам квадрат  $5 \times 5$  на три части с равными периметрами.
10. В треугольнике  $ABC$  биссектриса угла  $C$  пересекает сторону  $AB$  в точке  $M$ , а биссектриса угла  $A$  пересекает отрезок  $CM$  в точке  $T$ . Оказалось, что отрезки  $CM$  и  $AT$  разбили треугольник  $ABC$  на три равнобедренных треугольника. Найдите углы треугольника  $ABC$ .
11. Через точку  $Y$  на стороне  $AB$  равностороннего треугольника  $ABC$  проведена прямая, пересекающая сторону  $BC$  в точке  $Z$ , а продолжение стороны  $CA$  за точку  $A$  — в точке  $X$ . Известно, что  $XY = YZ$  и  $AY = BZ$ . Докажите, что прямые  $XZ$  и  $BC$  перпендикулярны.
12. Пусть на плоскости отмечено несколько точек. Назовём прямую *нечестной*, если она проходит ровно через три отмеченные точки и по разные стороны от неё отмеченных точек не поровну. Можно ли отметить 7 точек и провести для них 5 нечестных прямых?
13. В треугольнике  $ABC$  на стороне  $AB$  выбрана точка  $K$  и проведена биссектриса  $KE$  треугольника  $AKC$  и высота  $KN$  треугольника  $BKC$ . Оказалось, что угол  $EKN$  — прямой. Найдите  $BC$ , если  $NC = 5$ .
14. Петя вырезал из пластмассы неравносторонний треугольник. Покажите, каким образом можно, пользуясь только этим инструментом как шаблоном, построить биссектрису какого-нибудь угла треугольника, равного вырезанному.<sup>1</sup>
15. В каждой вершине куба сидело по мухе. Потом все мухи разом взлетели и сели по одной в каждую вершину в каком-то другом порядке. Докажите, что найдутся три мухи, которые в начальном и конечном положении сидели в вершинах равных треугольников.
16. У листа бумаги только один ровный край. Лист согнули, потом разогнули обратно.  $A$  — общая точка ровного края и линии сгиба. Постройте перпендикуляр к этой линии в точке  $A$ . Сделайте это без помощи чертёжных инструментов, а лишь перегибая бумагу.

---

<sup>1</sup>В связи с этой задачей рекомендуем почитать статью: [http://geometry.ru/articles/blinkov\\_shablon.pdf](http://geometry.ru/articles/blinkov_shablon.pdf)