V Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 8 класс. Решения.

1. (А.Блинков, Ю.Блинков) В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB равна меньшему основанию BC, а диагональ AC равна основанию AD. Прямая, проходящая через вершину B параллельно AC, пересекает прямую DC в точке M. Докажите, что AM — биссектриса угла BAC.

   Первое решение. Из условия следует, что $\angle BMC = \angle ACD = \angle CDA = \angle BCM$ (первое и третье равенство следуют из параллельности прямых BM и AC, BC и AD; второе из равенства $AC = AD$). Значит, $BM = BC = AB$, и $\angle BAM = \angle BMA = \angle MAC$ (рис.8.1).

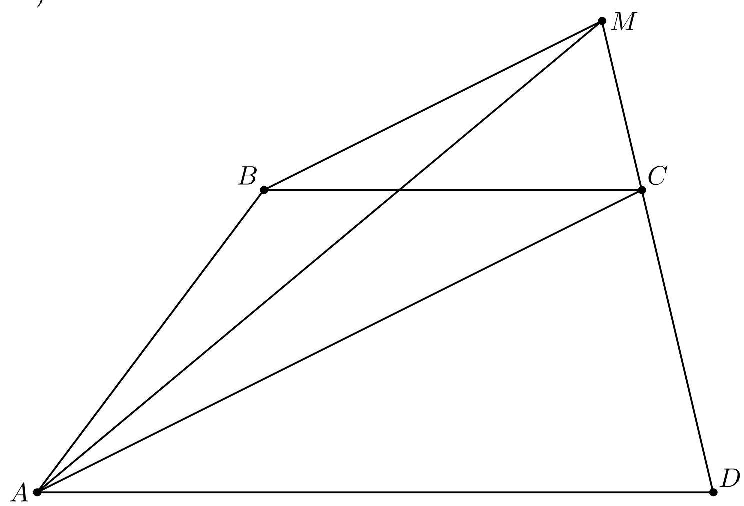

Рис.8.1

   Второе решение. На продолжении стороны AB (за точку B) отметим точку P, а на продолжении диагонали AC (за точку C) — точку K. Тогда $\angle MCK = \angle ACD = \angle ADC = \angle BCM$, то есть CM — биссектриса угла BCK. Так как AC — биссектриса угла BAD и $BM \parallel AC$, то BM — биссектриса угла PBC. Таким образом, M — точка пересечения биссектрис двух внешних углов треугольника ABC, следовательно, AM — биссектриса угла BAC.

2. (А.Блинков) Через точку внутри вписанного четырехугольника провели две прямые, делящие его на четыре четырехугольника. Три из этих четырехугольников — вписанные, причем радиусы описанных вокруг них окружностей равны. Докажите, что четвертая часть — четырехугольник, вписанный в окружность того же радиуса.

   Решение. Пусть части, прилегающие к вершинам A, B, C вписанного четырехугольника $ABCD$, — вписанные четырехугольники. Так как углы A и C четырехугольника противолежат равным углам в точке разреза L, то они равны, а значит $\angle A = \angle C = 90°$. Поэтому прямые, разрезающие четырехугольник, перпендикулярны. Но тогда угол B тоже прямой, т.е. $ABCD$ — прямоугольник, а четвертая часть тоже является вписанным четырехугольником. Кроме того, углы, опирающиеся на хорды AL, BL, CL, равны, а так как радиусы этих окружностей тоже равны, то равны и сами хорды. Следовательно, L — центр прямоугольника, и четвертая окружность имеет тот же радиус.

3. (А.Акопян, К.Савенков) Пусть AH_a и BH_b — высоты треугольника ABC, P и Q — проекции точки H_a на стороны AB и AC. Докажите, что прямая PQ делит отрезок H_aH_b пополам.

   Решение. Пусть CH_c — третья высота треугольника. Тогда $\angle H_aH_cB = \angle H_bH_cA = \angle C$, так как четырехугольники CBH_cH_b и CAH_cH_a вписаны в окружности с диаметрами BC и AC. Следовательно, точка, симметричная H_a относительно AB, лежит на прямой H_bH_c. Аналогично, на этой же прямой лежит точка, симметричная H_a относительно AC. Соответственно, точки P, Q лежат на средней линии треугольника $H_aH_bH_c$ (рис.8.3).

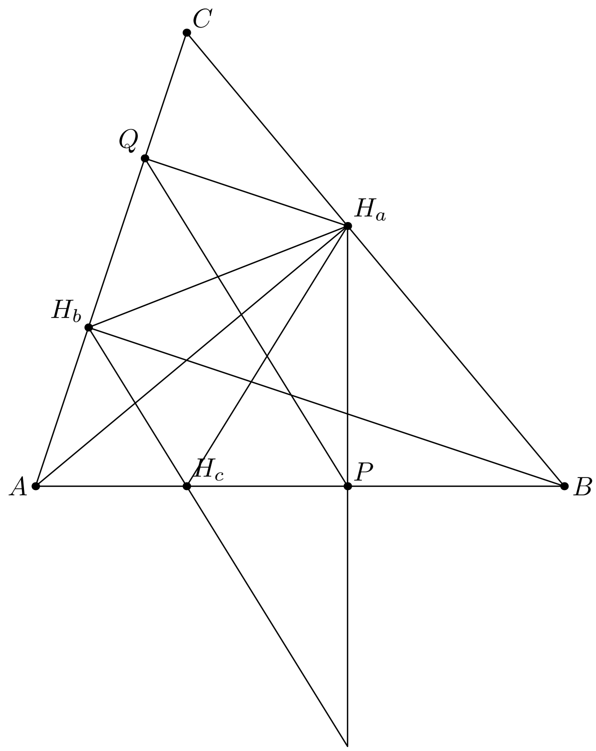

Рис.8.3

4. (Н.Белухов, Болгария) В треугольнике ABC $\angle A = 57°$, $\angle B = 61°$, $\angle C = 62°$. Какой из двух отрезков длиннее: биссектриса угла A или медиана, проведенная из вершины B?

   Первое решение. Пусть K — середина дуги ABC описанной окружности треугольника ABC, O — центр этой окружности; AL и BM — биссектриса и медиана. Пусть также N — точка пересечения AL и CK, а AH — высота треугольника AKC (рис.8.4.). Так как $\angle A < \angle C$, то B лежит внутри дуги KC, значит, N лежит на отрезке AL, и $AL > AN > AH$. Но $AH > KM$, так как это высоты меньшего и большего углов треугольника AKC. Следовательно, $KM = MO+OK = MO+OB > MB$, т.е. биссектриса угла A длиннее медианы из B.

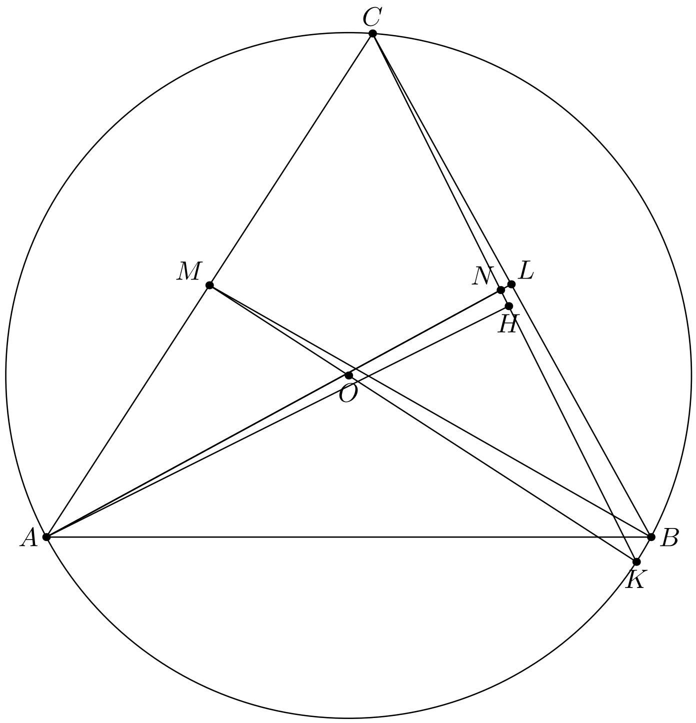

Рис.8.4

Второе решение. Так как $AB > BC$, то $\angle MBC > 30°$. Проведем из вершины A высоту AH, а из точки M перпендикуляр MK к стороне BC. Тогда $AL > AH = 2MK > BM$, так как $\sin\angle BMK = \frac{MK}{BM} > \frac{1}{2}$.

Третье решение. (К.Иванов, Москва). Построим правильный треугольник ABC'. Из условия задачи следует, что луч BC' лежит внутри угла ABC, следовательно, биссектриса угла A длиннее высоты правильного треугольника. Сдругой стороны, пусть M, N — середины AC и AC' соответственно. Так как луч AC лежит внутри угла $C'AB$, то $\angle BMN > \angle BMA$. Но $\angle BMA > 90°$, поскольку $AB > BC$. Значит, $BN > BM$, т.е. биссектриса угла A длиннее медианы из B.

V Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина

Финал. Второй день. 8 класс. Решения.

5. (В.Протасов) Из вершины B треугольника ABC опущен перпендикуляр BM на биссектрису угла C. Пусть K — точка касания вписанной окружности со стороной BC. Найдите угол MKB, если известно, что $\angle BAC = \alpha$

   Решение. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Тогда четырехугольник $BMIK$ — вписанный, так как $\angle BMI = \angle BKI = 90^\circ$ (рис.8.5). Значит, $\angle MKB = \angle MIB = \angle IBC + \angle ICB = \frac{\angle B + \angle C}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

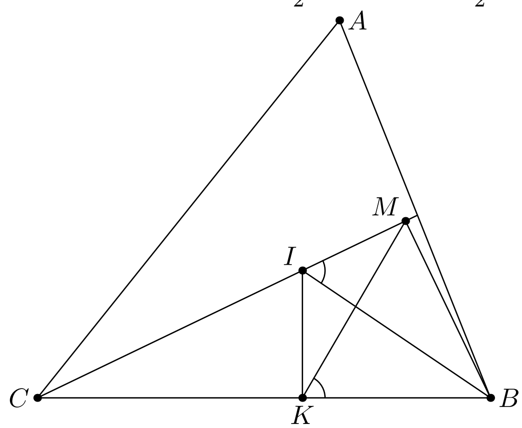

Рис.8.5

6. (С.Маркелов) Можно ли расположить на плоскости четыре равных многоугольника так, чтобы любые два из них не имели общих внутренних точек, но имели общий отрезок границы?

   Решение. Да, см. рис.8.6.

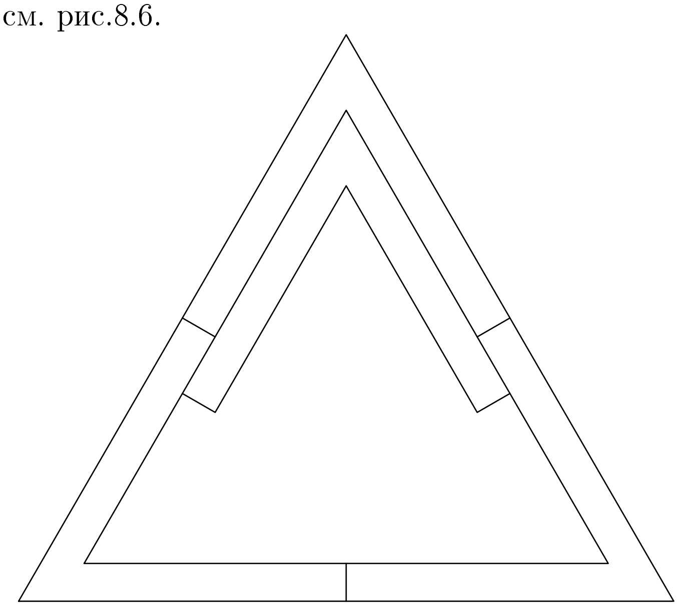

Рис.8.6

7. (Д.Прокопенко) Вокруг треугольника ABC описали окружность s. Пусть L и W — точки пересечения биссектрисы угла A со стороной BC и окружностью s соответственно. Точка O — центр описанной окружности треугольника ACL. Восстановите треугольник ABC, если даны окружность s и точки W и O.

Решение. Пусть O' — центр описанной окружности треугольника ABC. Тогда прямые $O'O$ и $O'W$ перпендикулярны сторонам AC и BC, т.е. направления этих сторон известны. Кроме того, $\angle COL = 2\angle CAL = 2\angle LCW$ и, значит, $\angle OCW = 90°$ (рис.8.7). Следовательно, C — точка пересечения окружности s и окружности с диаметром OW.

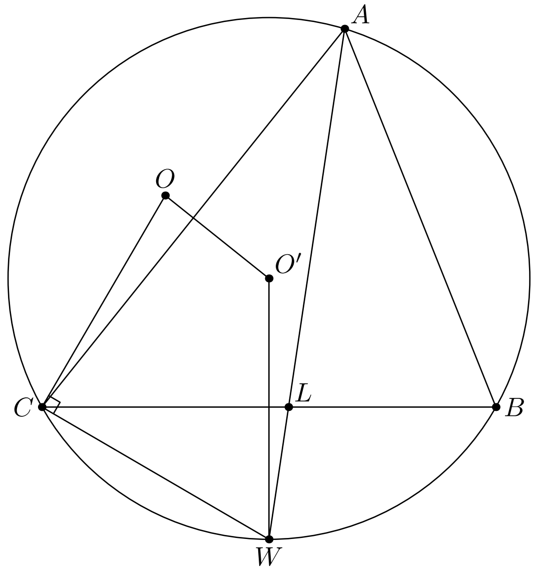

Рис.8.7

8. (Н.Белухов, Болгария) Вписанная и вневписанная окружности треугольника ABC касаются стороны BC в точках M и N. Известно, что $\angle BAC = 2\angle MAN$. Докажите, что $BC = 2MN$.

Решение. Будем считать, что $AB > AC$ и, значит, точки B, N, M, C располагаются на прямой именно в таком порядке. Заметим, что верна

Лемма. Пусть K — середина BC, а I и J — центры вписанной и вневписанной окружностей. Тогда $AN \parallel IK$ и $AM \parallel JK$.

Для доказательства, например, первого утверждения леммы достаточно заметить, что точка вписанной окружности, диаметрально противоположная M, лежит на прямой AN, а K является также серединой MN.

Пользуясь леммой, получаем, что условие задачи равносильно равенству $\angle IKJ = 180° - \frac{\angle A}{2}$. Покажем, что при $BC = 2MN$ это выполнено. Действительно, в этом случае M и N будут серединами отрезков KC и KB, соответственно, IM и NJ являются серединными перпендикулярами к этим отрезкам. Значит треугольники IKC и JKB равнобедренные (рис.8.8), и $\angle JKB = 90° - \frac{\angle B}{2}$, $\angle IKC = \frac{\angle C}{2}$, ч.т.д.

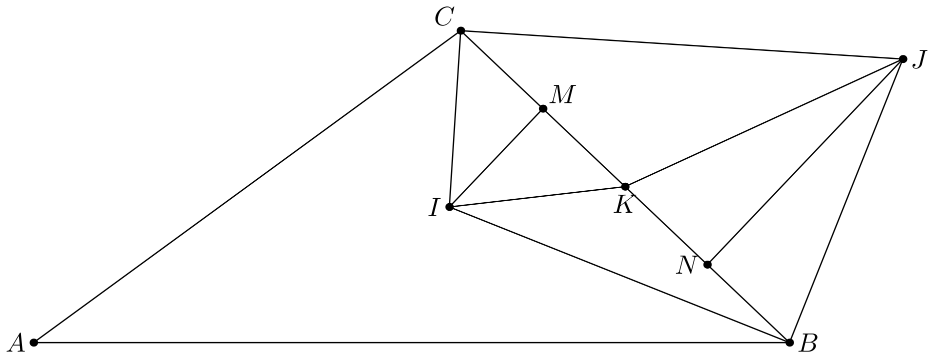

Рис.8.8

Рассмотрим теперь окружность $BICJ$. При фиксированном угле A отрезок IJ является ее диаметром, а дуга BC соответствует углу $90^\circ + A/2$. Когда хорда BC вращается внутри окружности, ее середина K описывает концентрическую окружность меньшего радиуса. С другой стороны, геометрическое место точек K', таких, что $\angle IKJ = 180^\circ - A/2$, состоит из двух дуг с концами I и J. Эти два ГМТ пересекаются в четырех точках, расположенных симметрично относительно отрезка IJ и серединного перпендикуляра к нему. Четыре четырехугольника $BICJ$, соответствующие этим точкам, равны, т.е. условие $\angle IKJ = 180^\circ - A/2$ определяет четырехугольник однозначно. Следовательно, оно равносильно равенству $BC = 2MN$.

V Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 9 класс. Решения.

1. (А.Блинков, Ю.Блинков) Середина стороны треугольника и основание высоты, проведенной к этой стороне, симметричны относительно точки касания этой стороны с вписанной окружностью. Докажите, что эта сторона составляет треть периметра треугольника.

   Первое решение. Пусть a, b — длины двух сторон треугольника, x, y — длины отрезков, на которые высота делит третью сторону (если основание высоты лежит вне стороны, длину одного из отрезков считаем отрицательной). Тогда по теореме Пифагора $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$. С другой стороны, точка касания вписанной окружности делит сторону на отрезки $p-a$ и $p-b$. Поэтому условие задачи равносильно равенству $x - y = 2(a - b)$. Разделив первое равенство на второе, получим, что длина третьей стороны $x + y = (a + b)/2 = 2p/3$.

   Второе решение. Пусть c — искомая сторона, тогда $r/r_c = (p-c)/p$. Пусть K и P — точки касания со стороной вписанной и вневписанной окружностей соответственно, I и Q — центры этих окружностей. Воспользуемся тем, что середина высоты CH лежит на прямой IP. Тогда из подобия двух пар треугольников получим, что $r = h/3$, $r_c = h$ (рис.9.1). Подставим в первое равенство и получим требуемое.

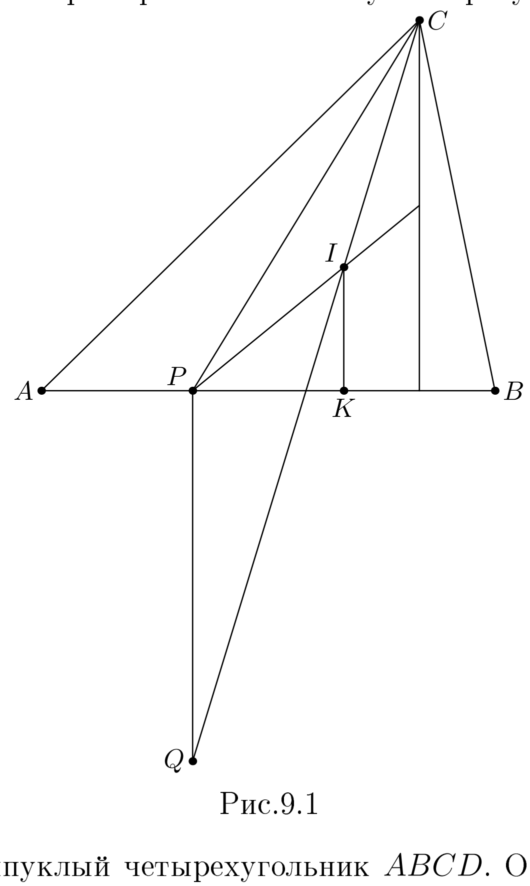

Рис.9.1

2. (О.Р.Мусин) Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Обозначим через R_a, R_b, R_c и R_d радиусы описанных окружностей треугольников DAB, ABC, BCD, CDA. Докажите, что неравенство $R_a < R_b < R_c < R_d$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$180^\circ - \angle CDB < \angle CAB < \angle CDB.$$

Решение. Пусть углы четырехугольника удовлетворяют указанному неравенству. Тогда $\sin\angle CAB > \sin\angle CDB$ и, значит, $R_b < R_c$. Поскольку угол CDB тупой, отсюда следует, что точка A лежит вне окружности CDB, т.е. $\angle CAD < \angle CBD$. Так как оба эти угла острые, то $\sin\angle CAD < \sin\angle CBD$ и, значит, $R_c < R_d$. Кроме того, поскольку $\angle ACB + \angle CBD = \angle CAD + \angle ADB < 90^\circ$, то $\angle ACB < \angle ADB < 90^\circ$, т.е. $R_a < R_b$.

Обратно, из неравенства $R_b < R_c$ следует, что угол CAB лежит между углами CDB и $180^\circ - \angle CDB$. Тогда, если угол CDB острый, то $\angle ABD < \angle ACD$, а так как $R_a < R_d$, то $\angle ABD > 180^\circ - \angle ACD$. Но тогда, повторяя приведенное выше рассуждение, получаем, что $R_b < R_a < R_d < R_c$.

3. (И.Богданов) Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности, лучи BA и CD пересекаются в точке E, лучи BC и AD — в точке F. Вписанная окружность треугольника, образованного прямыми AB, CD и биссектрисой угла B, касается прямой AB в точке K, а вписанная окружность треугольника, образованного прямыми AD, BC и биссектрисой угла B, касается прямой BC в точке L. Докажите, что прямые KL, AC и EF пересекаются в одной точке.

Решение. Обозначим точки касания вписанной в четырехугольник $ABCD$ окружности со сторонами AB и BC через U и V. Имеем равенство двойных отношений:

$$(EB; KU) = \frac{EK}{BK} : \frac{EU}{BU} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\angle BEC}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\angle B}{4}} : \frac{\operatorname{ctg}\frac{\angle BEC}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\angle B}{2}} = (FB; LV).$$

Отсюда следует, что прямые KL, EF, UV пересекаются в одной точке. Аналогично доказывается, что AC, EF, UV пересекаются в одной точке (рис.9.3).

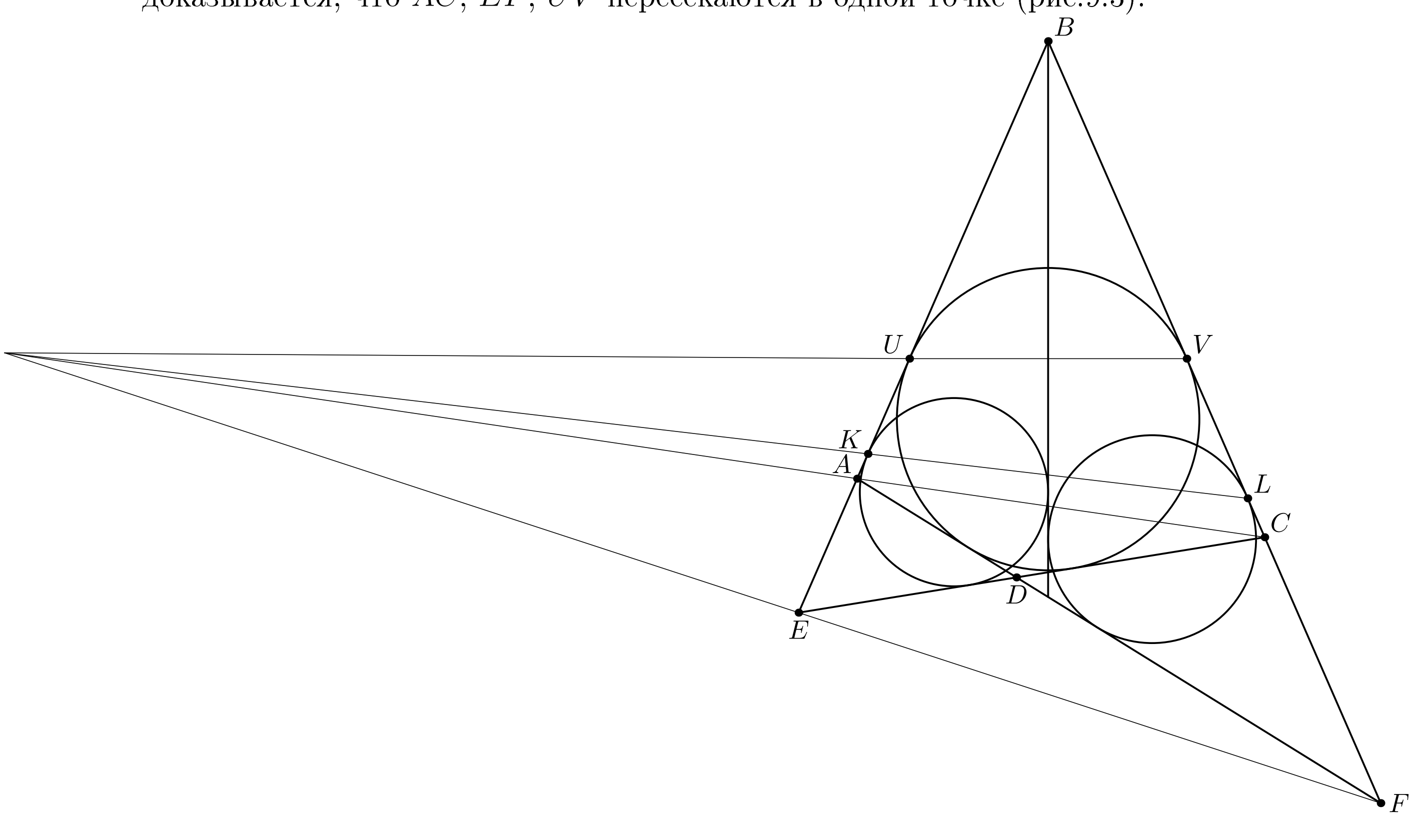

Рис.9.3

4. (Н.Белухов, Болгария) Дан правильный 17-угольник $A_1 \ldots A_{17}$. Докажите, что треугольники, образованные прямыми A_1A_4, A_2A_{10}, $A_{13}A_{14}$ и A_2A_3, A_4A_6 $A_{14}A_{15}$, равны.

Решение. Прежде всего отметим, что $A_1A_4 \parallel A_2A_3$, $A_2A_{10} \parallel A_{14}A_{15}$, $A_{13}A_{14} \parallel A_4A_6$. Поэтому надо доказать, что данные треугольники центрально симметричны.

Пусть A, B, C, D, E, F — середины хорд A_1A_2, A_3A_4, A_4A_{13}, A_6A_{14}, $A_{10}A_{14}$, $A_{15}A_2$ соответственно. Прямые BC, DE, FA как средние линии трех треугольников параллельны прямым $A_3A_{13} \parallel A_6A_{10} \parallel A_1A_{15}$. Прямые AD, BE, CF как оси симметрии трех равнобедренных трапеций пересекаются в центре семнадцатиугольника. По двойственной теореме Паппа прямые AB, CD, EF пересекаются в некоторой точке P (рис.9.4). Но эти прямые являются средними линиями трех полос, образованных парами параллельных сторон данных треугольников. Следовательно, эти треугольники симметричны относительно P.

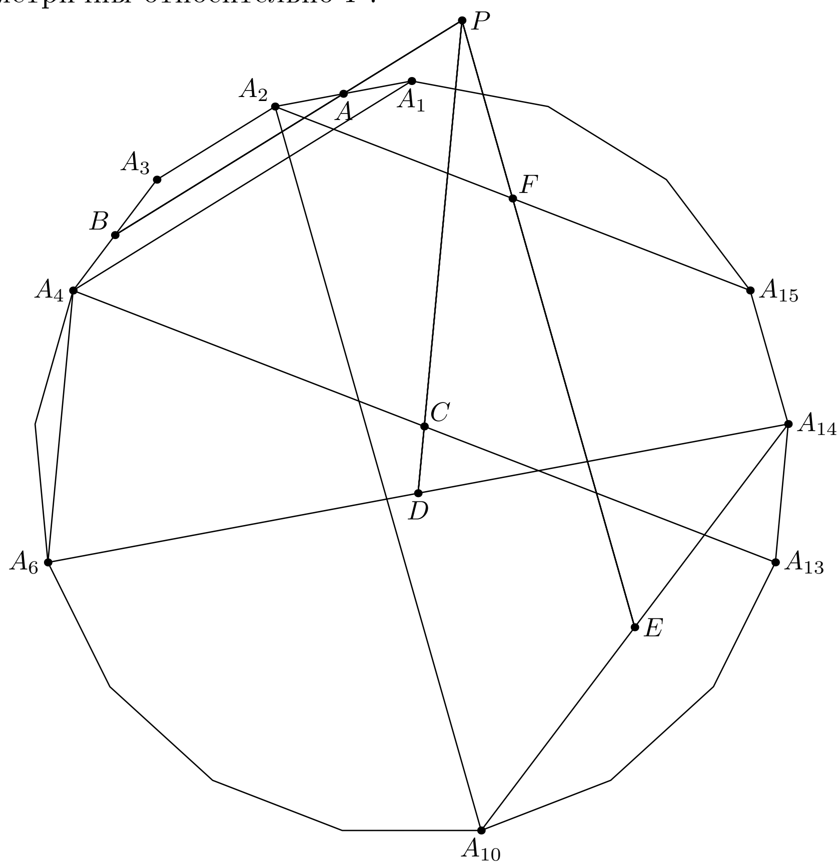

Рис.9.4

V Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 9 класс. Решения.

5. (Б.Френкин) На окружности отметили n точек. Оказалось, что среди треугольников с вершинами в этих точках ровно половина остроугольных. Найдите все значения n, при которых это возможно.

   Ответ. $n = 4$ или $n = 5$.

   Решение. Очевидно, что $n > 3$. Рассмотрим произвольный четырехугольник с вершинами в данных точках. Если центр окружности лежит внутри четырехугольника и не на его диагонали (назовем такой четырехугольник хорошим), то из четырех треугольников, образованных вершинами четырехугольника, остроугольных ровно два. Во всех остальных случаях остроугольных треугольников меньше двух. Следовательно, условие задачи выполняется только тогда, когда все четырехугольники, образованные данными точками, хорошие. Очевидно, что при $n = 4$ и $n = 5$ это возможно (например, можно взять вершины правильного пятиугольника).

   Пусть $n > 5$. Рассмотрим какую-нибудь из данных точек A и проведем через нее диаметр AA'. Если точка A' отмечена, то четырехугольник, образованный A, A' и любыми двумя из остальных точек, не будет хорошим. В противном случае найдутся три отмеченные точки, лежащие по одну сторону от AA'. Четырехугольник, образованный этими точками и точкой A, не является хорошим.

6. (А.Акопян) Дан треугольник ABC такой, что $AB - BC = \frac{AC}{\sqrt{2}}$. Пусть M — середина стороны AC, а N — основание биссектрисы угла B. Докажите, что

$$\angle BMC + \angle BNC = 90^\circ.$$

   Решение. Пусть C' — точка, симметричная C относительно BN. Тогда $AC' = AB - BC$, и по условию $AM/AC' = AC'/AC$. Значит, треугольники $AC'M$ и ACC' подобны, и $\angle AC'M = \angle C'CA = 90^\circ - \angle BNC$. Кроме того, применяя формулу для медианы, получаем, что $BM^2 = AB \cdot BC$, т.е. $BC'/BM = BM/BA$. Поэтому треугольники $BC'M$ и BMA также подобны, и $\angle BMC' = \angle BAM$. Следовательно, $\angle BMC = 180^\circ - \angle BMC - \angle C'MA = \angle MC'A$, откуда и получаем требуемое равенство (рис.9.6).

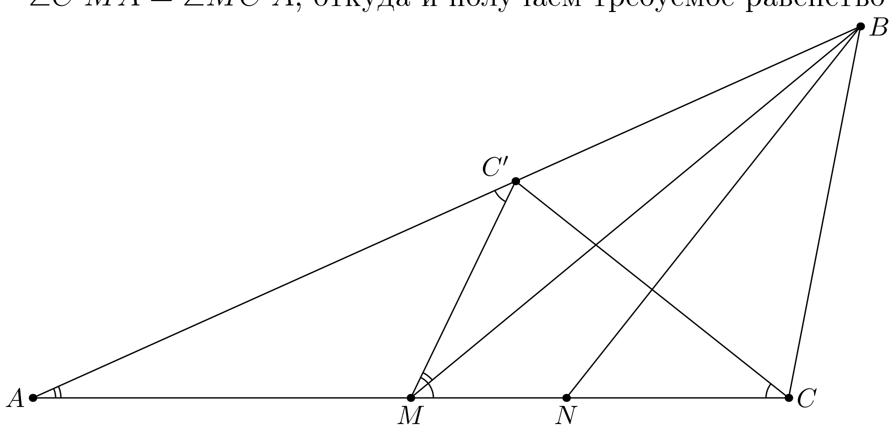

Рис.9.6

7. (М.Волчкевич) Даны две пересекающиеся окружности с центрами O_1, O_2. Постройте окружность, касающуюся одной из них внешним, а другой внутренним образом, центр которой удален от прямой O_1O_2 на наибольшее расстояние.

   Решение. Пусть O, r — центр и радиус некоторой окружности, касающейся данных; r_1, r_2 — радиусы данных окружностей. Тогда либо $OO_1 = r_1 - r$, $OO_2 = r_2 + r$, либо $OO_1 = r_1 + r$, $OO_2 = r_2 - r$, и в обоих случаях $OO_1 + OO_2 = r_1 + r_2$. Следовательно, среди всех точек, удовлетворяющих этому условию, надо найти наиболее удаленную от прямой O_1O_2. Известно, что из всех треугольников с данными основанием и высотой наименьший периметр имеет равнобедренный. Следовательно, наибольшую высоту среди всех треугольников с данными одной стороной и суммой двух других также имеет равнобедренный. Отсюда получаем, что центр искомой окружности лежит на равных расстояниях $(r_1 + r_2)/2$ от точек O_1 и O_2, а ее радиус равен $|r_1 - r_2|/2$.

8. (C.Pohoata, Румыния; А.Заславский) Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Известно, что четыре окружности, каждая из которых касается его диагоналей и описанной окружности изнутри, равны. Верно ли, что $ABCD$ квадрат?

   Ответ. Да.

   Первое решение. Пусть $AC \cap BD = P$, а окружности, вписанные в криволинейные треугольники ABP, BCP, CDP, DAP, касаются описанной окружности $ABCD$ в точках K, L, M, N.

   Рассмотрим сегмент ABC. Когда точка X движется по дуге ABC от A к C, радиус окружности, вписанной в сегмент и касающейся дуги в точке X, возрастает, пока X не достигнет середины дуги, и убывает после этого. Следовательно, равным радиусам соответствуют симметричные относительно середины дуги положения X.

   Таким образом, $\smile AK = \smile LC$. Аналогично, $\smile AN = \smile MC$. Значит, $\smile NK = \smile LM$, и $\smile KL = \smile MN$. Тогда $\smile NL = \smile NK + \smile KL = 180^\circ$ т.е. NL — диаметр окружности. Аналогично, KM тоже является диаметром.

   Симметрия относительно центра описанной окружности O переводит пару окружностей, касающихся ее в точках M и N, в пару окружностей, касающихся в точках K и L. Следовательно, общая внешняя касательная первой пары AC перейдет в CA. Поэтому AC и, аналогично, BD — диаметры окружности, т.е. $ABCD$ — прямоугольник. Его диагонали делят описанную окружность на четыре сектора, и радиусы окружностей, вписанных в эти секторы, равны. Значит равны и сами секторы, т.е. $ABCD$ — квадрат.

   Второе решение. Воспользуемся **теоремой Тебо**: пусть на стороне AC треугольника ABC взята точка M. Две окружности касаются луча MB, прямой AC и (изнутри) описанной окружности треугольника ABC. Тогда прямая, соединяющая центры этих окружностей, проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC.

   Доказательство теоремы Тебо можно прочитать в статье В.Ю.Протасова в "Кванте" №4, 2008.

   Применяя теорему Тебо к треугольникам ABC, BCD, CDA, DAB и точке пересечения диагоналей, получаем, что радиусы вписанных окружностей всех четырех треугольников равны. Вычислив площадь каждого из этих треугольников как произведение полупериметра на радиус вписанной окружности, и приравняв суммы площадей двух пар треугольников, получим, что $AC = BD$, т.е $ABCD$ — равнобедренная трапеция. Предположим, что AD, BC — ее основания и $AD > BC$. Тогда $S_{ABD}/S_{ABC} = AD/BC > (AD + BD + AB)/(BC + AB + AC)$, и радиусы вписанных окружностей этих треугольников не могут быть равными. Следовательно, $ABCD$ — прямоугольник. Аналогично предыдущему решению получаем, что $ABCD$ — квадрат.

V Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 10 класс. Решения.

1. (Д.Швецов) Пусть a, b, c — длины сторон произвольного треугольника; p — полупериметр; r — радиус вписанной окружности. Докажите неравенство
$$\sqrt{\frac{ab(p-c)}{p}}+\sqrt{\frac{ca(p-b)}{p}}+\sqrt{\frac{bc(p-a)}{p}}\geq 6r.$$

   Решение. Применив неравенство о средних, получаем, что левая часть не меньше, чем
$$3\sqrt[3]{\frac{abc}{p}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}}=3\sqrt[3]{4r^2R}.$$
   Поскольку $R\geq 2r$, отсюда следует искомое неравенство.

2. (Ф.Нилов) Дан четырёхугольник $ABCD$. Его противоположные стороны AB и CD пересекаются в точке K. Его диагонали пересекаются в точке L. Известно, что прямая KL проходит через центр тяжести четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что $ABCD$ - трапеция.

   Решение. Предположим, что прямые AD и BC пересекаются в точке M. Пусть X, Y — точки пересечения этих прямых с прямой KL. Тогда двойные отношения $(AD;MX)$ и $(BC;MY)$ равны единице. Следовательно, оба отношения AX/XD и BY/YC либо больше, либо меньше 1, и отрезок XY не пересекается с отрезком, соединяющим середины сторон AD и BC, на котором лежит центр тяжести четырехугольника. Поэтому условие задачи выполняется только при $AD\parallel BC$.

3. (А.Заславский, А.Акопян) Радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника ABC равны R и r; O, I — центры этих окружностей. Внешняя биссектриса угла C пересекает AB в точке P. Точка Q — проекция точки P на прямую OI. Найдите расстояние OQ.

   Решение. Пусть A', B', C' — центры вневписанных окружностей треугольника ABC. Тогда I — ортоцентр треугольника $A'B'C'$, A, B, C — основания его высот и, значит, описанная окружность ABC является окружностью Эйлера треугольника $A'B'C'$. Следовательно, радиус описанной окружности $A'B'C'$ равен $2R$, а ее центром является точка O', симметричная I относительно O. Кроме того, точки A, B, A', B' лежат на одной окружности. Прямая AB является общей хордой этой окружности и окружности ABC, а внешняя биссектриса угла C — общей хордой этой окружности и окружности $A'B'C'$. Поэтому точка P является радикальным центром трех окружностей, а прямая PQ — радикальной осью окружностей ABC и $A'B'C'$ (рис.10.3). Следовательно, $OQ^2-R^2=(OQ+OO')^2-4R^2$. Поскольку $OO'=OI=\sqrt{R^2-2Rr}$ как расстояние между центрами описанной и вписанной окружностей, получаем, что $OQ=R(R+r)/\sqrt{R^2-2Rr}$.

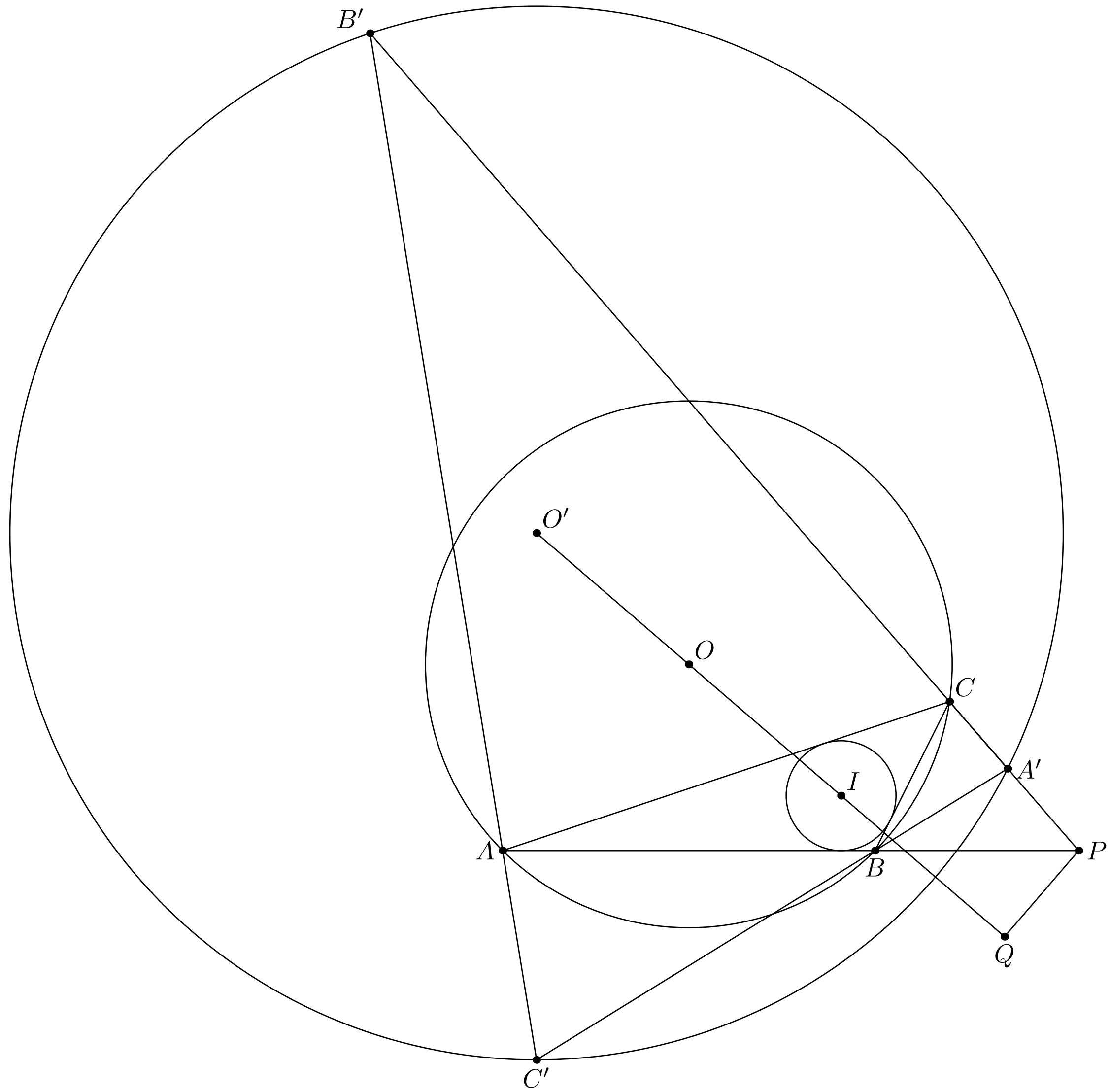

Рис.10.3

4. (C.Pohoata, Румыния) Через вершины треугольника ABC проводятся три произвольные параллельные прямые d_a, d_b, d_c. Прямые, симметричные d_a, d_b, d_c относительно BC, CA, AB соответственно, образуют треугольник XYZ. Найдите геометрическое место центров вписанных окружностей таких треугольников.

   Первое решение. Когда прямые d_a, d_b, d_c вращаются вокруг вершин треугольника, симметричные прямые вращаются с той же скоростью вокруг точек, симметричных вершинам относительно противоположных сторон. Поэтому, во-первых, углы треугольника XYZ не зависят от выбора прямых d_a, d_b, d_c, так что все эти треугольники подобны, во-вторых, точки X, Y, Z движутся с одинаковыми угловыми скоростями по трем окружностям. Значит, центр вписанной окружности тоже движется по некоторой окружности, и достаточно найти три ее точки.

   Возьмем прямые d_a, d_b совпадающими с прямой AB. Пусть A', B' — точки, симметричные A, B относительно противоположных сторон треугольника. Тогда Z — точка пересечения прямых AB' и BA', а Y и X — точки пересечения этих прямых с прямой, параллельной AB и лежащей вдвое дальше от точки C. Заметим, что C и центр O описанной окружности треугольника ABC равноудалены от прямых AB' и BA', т.е.

биссектриса угла XZY совпадает с прямой CO. Кроме того, нетрудно видеть, что биссектрисы углов ZXY и ZYX перпендикулярны AC и BC соответственно.

Рассмотрим проекции точки O и центра вписанной в треугольник XYZ окружности на прямую AC. Точка O проецируется в середину AC. Туда же проецируется точка пересечения прямых AB' и d_c, поскольку углы, образованные этими прямыми с AC, равны. Значит, X и центр вписанной окружности проецируются в точку, симметричную середине AC относительно A (рис.10.4). Следовательно, расстояние от O до центра вписанной окружности равно удвоенному радиусу описанной окружности треугольника ABC. Взяв прямые d_a, d_b, d_c параллельными другим сторонам ABC, получим тот же результат. Следовательно, искомое ГМТ — окружность, концентричная описанной окружности ABC, но вдвое большего радиуса.

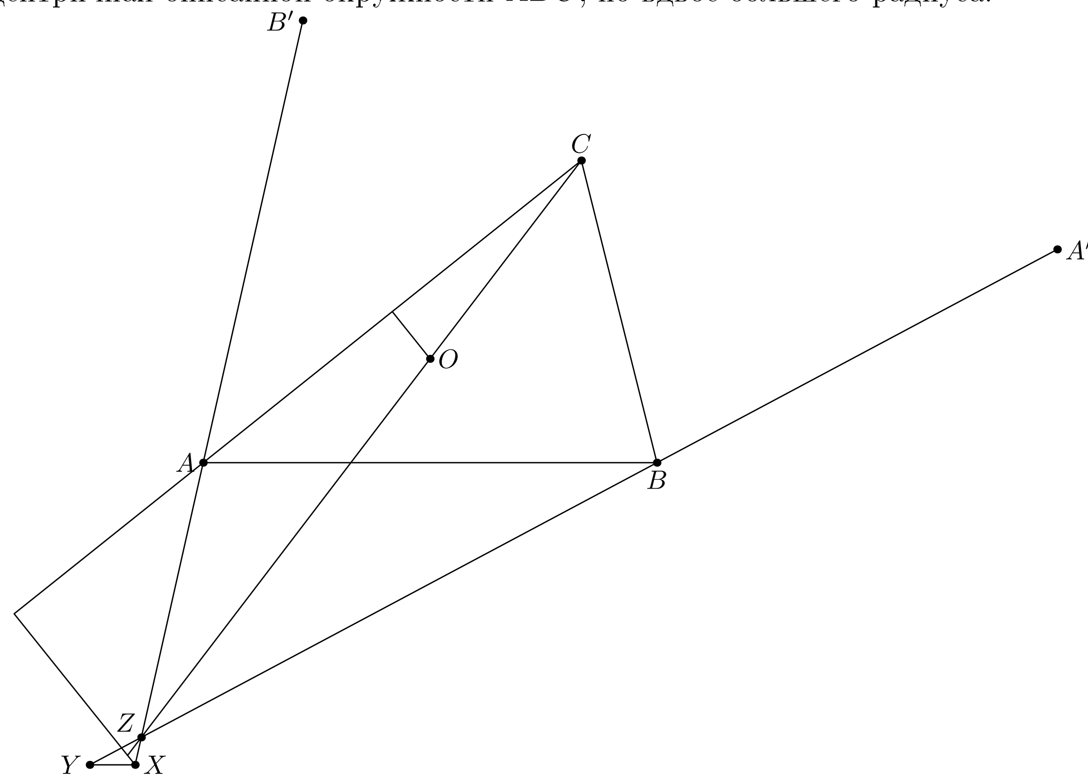

Рис.10.4

Второе решение. Рассуждая как в предыдущем решении, получаем, что когда прямые d вращаются с постоянной скоростью, прямые XY, YZ, ZX также вращаются спостоянной скоростью. Следовательно, вершина X треугольника XYZ описывает окружность с хордой $B'C'$, а биссектриса $\angle YXZ$ вращается вокруг середины W_a дуги $\smile B'C'$ также с постоянной скоростью. Аналогично биссектрисы углов $\angle Y$ и $\angle Z$ вращаются вокруг середин W_b, W_c соответствующих дуг $\smile A'C'$ и $\smile A'B'$.

Таким образом, центр вписанной окружности I одновременно движется по описанным окружностям треугольников IW_aW_b, IW_bW_c и IW_cW_a. Значит, эти окружности совпадают, и искомым ГМТ будет описанная окружность треугольника $W_aW_bW_c$.

Покажем, что каждая из точек W_a, W_b, W_c лежит на расстоянии $2R$ от O. Рассмотрим, например, точку W_a. Пусть BH_b, CH_c — высоты треугольника ABC, O_a — центр описанной окружности треугольника AH_bH_c, O' — точка, симметричная O относительно BC, M_a — середина BC. Треугольники BCO', $H_bH_cO_a$ и $B'C'W_a$ подобны (они все равнобедренные с углом при вершине $2C$), вырожденные треугольники BH_bB_1

и CH_cC_1 также подобны, следовательно, они подобны и "треугольнику"$O'O_aW_a$, т.е M_aO_a — средняя линия треугольника $O'OW_a$. Так как отрезок M_aO_a — диаметр окружности Эйлера, то его длина равна R.

V Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина

Финал. Второй день. 10 класс. Решения.

5. (Д.Прокопенко) В треугольник ABC вписан ромб $CKLN$ так, что точка L лежит на стороне AB, точка N — на стороне AC, точка K — на стороне BC. Пусть O_1, O_2 и O — центры описанных окружностей треугольников ACL, BCL и ABC соответственно. Пусть P — точка пересечения описанных окружностей треугольников ANL и BKL, отличная от L. Докажите, что точки O_1, O_2, O и P лежат на одной окружности.

   Решение. Очевидно, что L — основание биссектрисы угла C, а прямые LN, LK параллельны сторонам BC, AC. Поэтому $\angle AO_1L = 2\angle ACL = \angle C = \angle ANL$, т.е. точка O_1 лежит на описанной окружности треугольника ANL и является серединой дуги ANL этой окружности. Следовательно, $\angle O_1PL = \angle APL + \angle O_1PA = \angle C + \frac{\angle A+\angle B}{2} = \frac{\pi+\angle C}{2}$. Аналогично $\angle O_2Pl = \frac{\pi+\angle C}{2}$. Значит, $\angle O_1PO_2 = \pi - \angle C$. Но угол O_1OO_2 также равен $\pi - \angle C$, потому что прямые OO_1, OO_2 являются серединными перпендикулярами к AC и BC (рис.10.5).

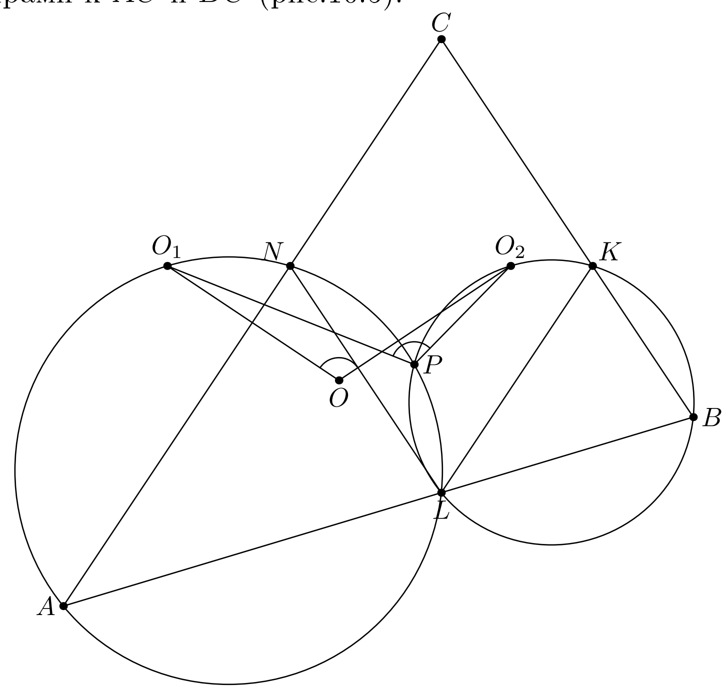

Рис.10.5

6. (А.Заславский) В треугольнике ABC M — точка пересечения медиан, I — центр вписанной окружности, A_1 и B_1 — точки касания этой окружности со сторонами BC и AC, G — точка пересечения прямых AA_1 и BB_1. Докажите, что угол CGI прямой тогда и только тогда, когда $GM \parallel AB$.

   Решение. Пусть C_1 — точка касания вписанной окружности со стороной AB, C_2 — вторая точка пересечения этой окружности с прямой CC_1. Тогда G лежит на отрезке CC_1. Кроме того, существует центральная проекция, переводящая вписанную окружность в окружность, а G — в ее центр. Треугольник ABC при этой проекции перейдет в правильный, так что двойное отношение $(CG; C_1C_2)$ для любого треугольника такое же, как для правильного, т.е. равно 3. Следовательно, получаем цепочку равносильных утверждений:

$\angle CGI = 90^\circ$;

G — середина C_1C_2;

$CC_1 = 3CC_2$;

$CC_1 = 3GC_1$;

$GM \parallel AB$.

Второе решение. Пусть $AC_1 = x, BA_1 = y, CB_1 = z$. По теореме Менелая

$$\frac{y+x}{x}.\frac{GC_1}{GC}.\frac{z}{y} = 1 \Rightarrow \frac{GC_1}{GC} = k = \frac{xy}{z(x+y)} = \frac{m}{z},$$

где $m = \frac{xy}{x+y}$.

Теперь,

$$\angle IGC = 90^\circ \Leftrightarrow CI^2 - r^2 = GC^2 - GC_1^2 \Leftrightarrow z^2 =$$

$$= CC_1^2(\frac{1}{(1+k)^2} - \frac{k^2}{(1+k)^2}) = CC_1^2(\frac{1-k}{1+k}) = CC_1^2(\frac{z-m}{z+m}).$$

Но по теореме Стюарта

$$CC_1^2 = \frac{x}{x+y}(z+y)^2 + \frac{y}{x+y}(z+x)^2 - xy = z(z+4m).$$

Из этих двух равенств получаем, что

$$z^2 = z(z+4m)(\frac{z-m}{z+m}) \Leftrightarrow z(z+m) = (z+4m)(z-m) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2zm = 4m^2 \Leftrightarrow z = 2m \Leftrightarrow k = \frac{1}{2},$$

ч.т.д.

7. (А.Глазырин) Дано множество точек O, A_1, A_2 ... A_n на плоскости. Расстояние между любыми двумя из этих точек является квадратным корнем из натурального числа. Докажите, что существуют такие векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$, что для любой точки A_i выполняется равенство $\vec{OA_i} = k\vec{x} + l\vec{y}$, где k и l — некоторые целые числа.

   Решение. Из условия задачи следует, что для любых i, j скалярное произведение $(\vec{OA_i}, \vec{OA_j})$ является половиной целого числа. Значит, для любых целых чисел $m_1, \ldots, m_n$ длина вектора $m_1\vec{OA_1} + \cdots + m_n\vec{OA_n}$ — корень из натурального числа. Отметим на плоскости точки, являющиеся концами всех таких векторов. Пусть X — ближайшая к O из отмеченных точек, Y — ближайшая к O из отмеченных точек, не лежащих на прямой OX. Разобьем плоскость на параллелограммы, образованные векторами $\vec{x} = \vec{OX}$ и $\vec{y} = \vec{OY}$. В силу выбора точек X, Y все отмеченные точки будут вершинами параллелограммов разбиения, следовательно, векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$ — искомые.

8. (Б.Френкин) Можно ли вписать правильный октаэдр в правильный додекаэдр так, чтобы каждая вершина октаэдра была вершиной додекаэдра?

   Ответ. Нет.

Решение. Если правильный октаэдр вписан в правильный додекаэдр, то описанная сфера у них одна и та же. Две противоположные вершины октаэдра являются концами диаметра этой сферы и, следовательно, противоположными вершинами додекаэдра, а остальные вершины октаэдра равноудалены от этих двух. Но у додекаэдра нет вершин, равноудаленных от двух противоположных.