VII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина

Финал. Первый день. 8 класс

Ратмино, 30 июля 2011 г.

1. В трапеции с перпендикулярными диагоналями высота равна средней линии. Докажите, что трапеция равнобокая.

2. Петя вырезал из бумаги прямоугольник, положил на него такой же прямоугольник и склеил их по периметру. В верхнем прямоугольнике он провёл диагональ, опустил на неё перпендикуляры из двух оставшихся вершин, разрезал верхний прямоугольник по этим линиям и отогнул полученные треугольники во внешнюю сторону, так что вместе с нижним прямоугольником они образовали прямоугольник.

   Как по полученному прямоугольнику восстановить исходный с помощью циркуля и линейки?

3. Около треугольника ABC описали окружность. A_1 — точка пересечения с нею прямой, параллельной BC и проходящей через A. Точки B_1 и C_1 определяются аналогично. Из точек A_1, B_1, C_1 опустили перпендикуляры на BC, CA, AB соответственно. Докажите, что эти три перпендикуляра пересекаются в одной точке.

4. В окружности радиуса 1 проведено несколько хорд, суммарная длина которых тоже равна 1. Докажите, что в окружность можно вписать правильный шестиугольник, стороны которого не пересекают этих хорд.

VII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 9 класс
Ратмино, 30 июля 2011 г.

1. Высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. Прямая CH пересекает полуокружность с диаметром AB, проходящую через A_1, B_1 в точке D. Отрезки AD и BB_1 пересекаются в точке M, BD и AA_1 — в точке N. Докажите, что описанные окружности треугольников B_1DM и A_1DN касаются.

2. В треугольнике ABC $\angle B = 2\angle C$. Точки P и Q на серединном перпендикуляре к CB таковы, что $\angle CAP = \angle PAQ = \angle QAB = \frac{\angle A}{3}$. Докажите, что Q — центр описанной окружности треугольника CPB.

3. Восстановите равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$) по точкам I, M, H пересечения биссектрис, медиан и высот соответственно.

4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Биссектрисы его углов образуют четырехугольник, вписанный в окружность с центром I, а биссектрисы внешних углов — четырехугольник, вписанный в окружность с центром J. Докажите, что O — середина IJ.

VII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 10 класс
Ратмино, 30 июля 2011 г.

1. В треугольнике ABC середины сторон AC, BC, вершина C и точка пересечения медиан лежат на одной окружности. Докажите, что она касается окружности, проходящей через вершины A, B и ортоцентр треугольника ABC.

2. Четырехугольник $ABCD$ описан вокруг окружности, касающейся сторон AB, BC, CD, DA в точках K, L, M, N соответственно. Точки A', B', C', D' — середины отрезков LM, MN, NK, KL. Докажите, что четырехугольник, образованный прямыми AA', BB', CC', DD', — вписанный.

3. Дано два тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$. Рассмотрим шесть пар ребер A_iA_j и B_kB_l, где (i, j, k, l) — перестановка чисел $(1, 2, 3, 4)$ (например, A_1A_2 и B_3B_4). Известно, что во всех парах, кроме одной, ребра перпендикулярны. Докажите, что в оставшейся паре ребра тоже перпендикулярны.

4. На стороне AB треугольника ABC взята точка D. В угол ADC вписана окружность, касающаяся изнутри описанной окружности треугольника ACD, а в угол BDC — окружность, касающаяся изнутри описанной окружности треугольника BCD. Оказалось, что эти окружности касаются отрезка CD в одной и той же точке X. Докажите, что перпендикуляр, опущенный из X на AB, проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC.