VIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Заочный тур. Решения

1. (М.Рожкова, Украина) (8) В треугольнике ABC точка M — середина AB, а точка D — основание высоты CD. Докажите, что $\angle A = 2\angle B$ тогда и только тогда, когда $AC = 2MD$.

   Решение. Пусть K — середина AC (рис.1). Так как DK — медиана прямоугольного треугольника ADC, то $AK = KD$ и $\angle ADK = \angle A$. С другой стороны, MK — средняя линия треугольника ABC, следовательно, $\angle DMK = \angle B$. Применяя к треугольнику DMK теорему о внешнем угле, получаем, что равенства $KD = DM$ и $\angle KDA = 2\angle KMD$ равносильны.

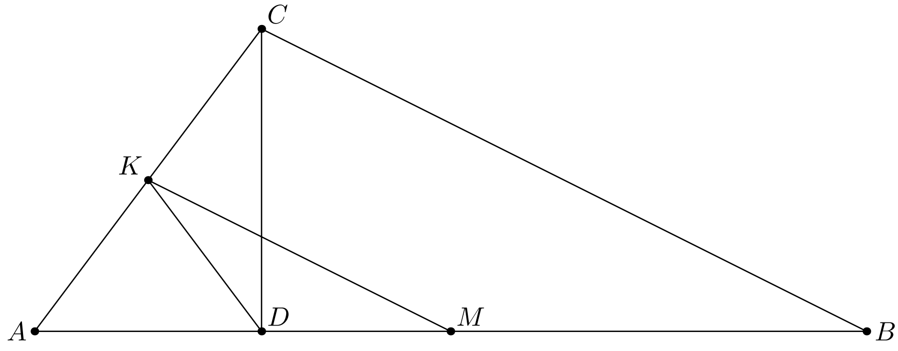

Рис.1

   Критерии. Предложенное доказательство работает только в одну сторону — 3 балла.

2. (Б.Френкин) (8) Вписанный n-угольник разбит непересекающимися (во внутренних точках) диагоналями на треугольники. Каждый из получившихся треугольников подобен хотя бы одному из остальных.

   При каких n возможна описанная ситуация?

   Ответ. При $n = 4$ и при $n > 5$.

   Решение. Очевидно, что $n > 3$. Ясно также, что при четном n можно разрезать правильный n-угольник на два равных многоугольника диагональю, проходящей через его центр, а потом разрезать эти два многоугольника одинаковым образом. Кроме того, можно на трех сторонах правильного $2k$-угольника построить равные треугольники с вершинами на описанной окружности. Поэтому при нечетном $n > 5$ искомая ситуация тоже возможна. Осталось доказать, что она невозможна при $n = 5$.

   Если центр описанной около пятиугольника окружности не лежит ни на одной из проведенных диагоналей, то треугольник, содержащий его, — остроугольный, а остальные — тупоугольные, т.е. описанная ситуация не может иметь места. Если же центр лежит на диагонали, то два треугольника, примыкающие к этой диагонали, — прямоугольные, а третий — тупоугольный. Следовательно, указанная ситуация также невозможна.

3. (Д.Швецов) (8) Окружность с центром I касается сторон AB, BC, CA треугольника ABC в точках C_1, A_1, B_1. Прямые AI, CI, B_1I пересекают A_1C_1 в точках X, Y, Z соответственно. Докажите, что $\angle YB_1Z = \angle XB_1Z$

   Решение. Так как $B_1I \perp AC$, достаточно доказать, что $\angle YB_1A = \angle XB_1C$. Так как CI — серединный перпендикуляр к A_1B_1, то $\angle YB_1A_1 = \angle C_1A_1B_1$, а поскольку $\angle A_1B_1C = \angle B_1A_1C$, то $\angle YB_1A = \angle C_1A_1B$ (рис.3). Аналогично $\angle XB_1C = \angle A_1C_1B = \angle C_1A_1B$.

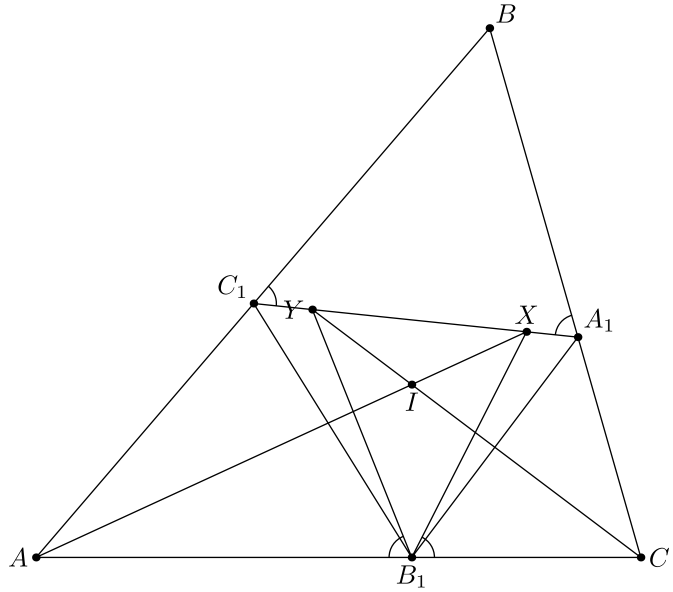

Рис.3

4. (А.Акопян) (8) Дан треугольник ABC. M — середина стороны BC, а P — проекция вершины B на серединный перпендикуляр к AC. Прямая PM пересекает сторону AB в точке Q. Докажите, что треугольник QPB равнобедренный

   Решение. Пусть точка D симметрична B относительно серединного перпендикуляра к AC, а T — точка пересечения AB и CD. Тогда $ACBD$ — равнобокая трапеция, и, значит, треугольник BDT — равнобедренный (рис.4). Так как прямая PM содержит среднюю линию этого треугольника, треугольник QPB тоже равнобедренный.

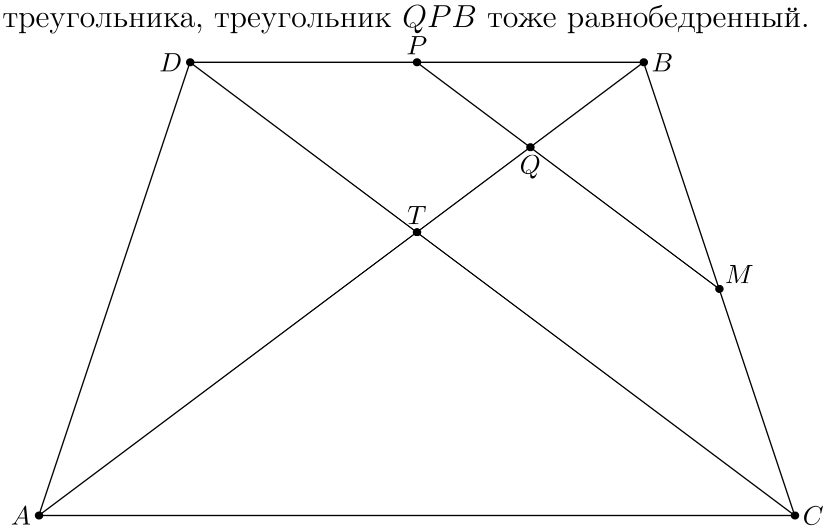

Рис.4

5. (Д.Швецов) (8) На стороне AC треугольника ABC произвольно выбрана точка D. Касательная, проведённая в точке D к описанной окружности треугольника BDC, пересекает сторону AB в точке C_1; аналогично определяется точка A_1. Докажите, что $A_1C_1 || AC$.

   Решение. Из условия задачи следует, что $\angle C_1DA = \angle DBC$ и $\angle A_1DC = \angle DBA$ (рис.5). Следовательно, четырехугольник A_1BC_1D — вписанный, т.е. $\angle C_1A_1D = \angle C_1BD = \angle CDA_1$.

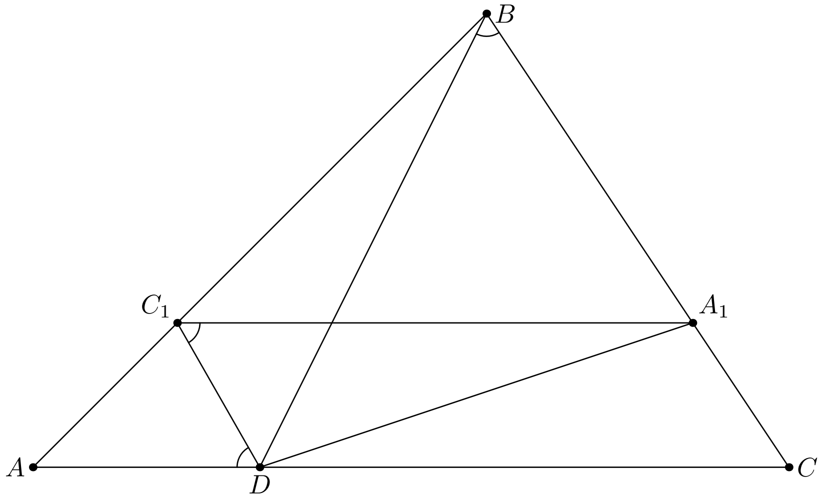

Рис.5

6. (Д.Швецов) (8–9) На гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC отметили точку C_1 такую, что $BC = CC_1$.Затем на катете AB отметили точку C_2 такую, что $AC_2 = AC_1$; аналогично определяется точка A_2. Найдите угол AMC, где M — середина отрезка A_2C_2.

   Ответ. $135°$.

   Решение. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Так как точка C_1 симметрична B относительно CI, а C_2 симметрична C_1 относительно AI, то $BI = IC_2$ и $\angle BIC_2 = 90°$. Аналогично $BI = IA_2$ и $\angle BIA_2 = 90°$ (рис.6). Следовательно, I — середина A_2C_2, а $\angle AIC = 135°$.

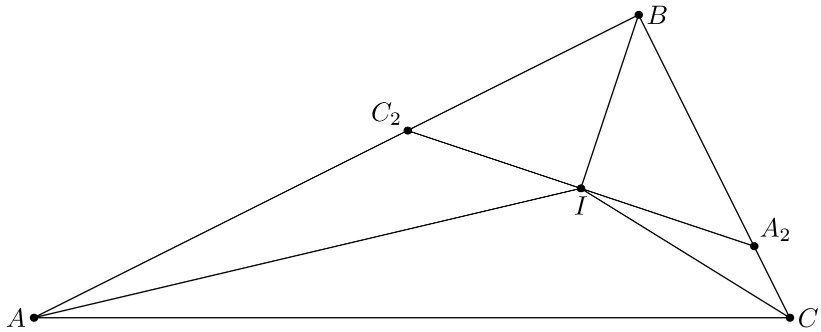

Рис.6

7. (Б.Френкин) (8–9) В неравнобедренном треугольнике ABC биссектрисы углов A и B обратно пропорциональны противолежащим сторонам. Найдите угол C.

   Ответ. $60°$.

   Решение. Пусть AA_1, BB_1 — биссектрисы треугольника, AA_2, BB_2 — его высоты. Из условия задачи следует, что $AA_1/AA_2 = BB_1/BB_2$ и, значит, $\angle A_1AA_2 = \angle B_1BB_2$. Но $\angle A_1AA_2 = |\angle B - \angle C|$, $\angle B_1BB_2 = |\angle A - \angle C|$. Так как треугольник неравнобедренный, равенство $\angle A - \angle C = \angle B - \angle C$ невозможно. Следовательно, $\angle C = (\angle A + \angle B)/2 = 60°$.

8. (Д.Швецов) (8–9) Пусть BM – медиана прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90°$). Окружность, вписанная в треугольник ABM, касается сторон AB, AM в точках A_1, A_2; аналогично определяются точки C_1, C_2. Докажите, что прямые A_1A_2 и C_1C_2 пересекаются на биссектрисе угла ABC.

Решение. Так как треугольники ABM, CBM — равнобедренные, точки A_1, C_1 — середины соответствующих катетов. Кроме того, прямая A_1A_2 перпендикулярна биссектрисе угла A и, значит, является биссектрисой угла AA_1C_1 (рис.8). Аналогично, C_1C_2 — биссектриса угла CC_1A_1. Следовательно, точка их пересечения — центр вневписанной окружности треугольника A_1BC_1 — лежит на биссектрисе угла B.

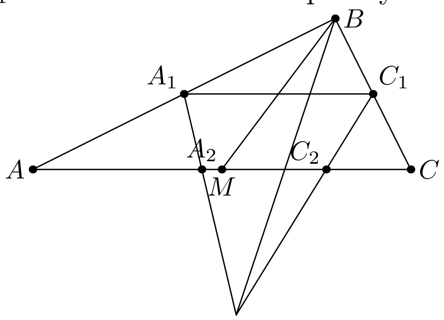

Рис.8

9. (А.Карлюченко) (8–9) Восстановите треугольник ABC по прямым l_b и l_c , содержащим биссектрисы углов B и C, и основанию биссектрисы угла A — точке L_1.

   Решение. Пусть I — точка пересечения l_b и l_c. Тогда IL_1 — биссектриса угла A. Поэтому нам известны углы между биссектрисами треугольника, а значит, и углы треугольника. Построим произвольный треугольник $A'B'C'$ с такими углами, найдем центр I' вписанной в него окружности, отложим на прямых l_b, l_c отрезки $IB'' = I'B'$, $IC'' = I'C'$ и проведем через L_1 прямую, параллельную $B''C''$. Эта прямая пересечет l_b, l_c в вершинах B, C искомого треугольника. После этого вершина A строится очевидным образом.

10. (Б.Френкин, А.Заславский) В выпуклом четырехугольнике все стороны и все углы попарно различны.

    а)(8–9) Может ли наибольший угол примыкать к наибольшей стороне, и при этом наименьший — к наименьшей?

    б)(9–11) Может ли наибольший угол не примыкать к наименьшей стороне, и при этом наименьший — к наибольшей?

    Ответ. а) Да. б) Нет.

    Решение. а) Рассмотрим треугольник ABC, в котором $AC > BC > AB$. Возьмем на отрезке AC такую точку P, что $AP = BC$, восставим из нее перпендикуляр к AC и возьмем на этом перпендикуляре точку D, лежащую вне треугольника и достаточно близкую к P. Тогда в четырехугольнике $ABCD$ AD — наибольшая сторона, CD — наименьшая, D — наибольший угол, C — наименьший (рис.10).

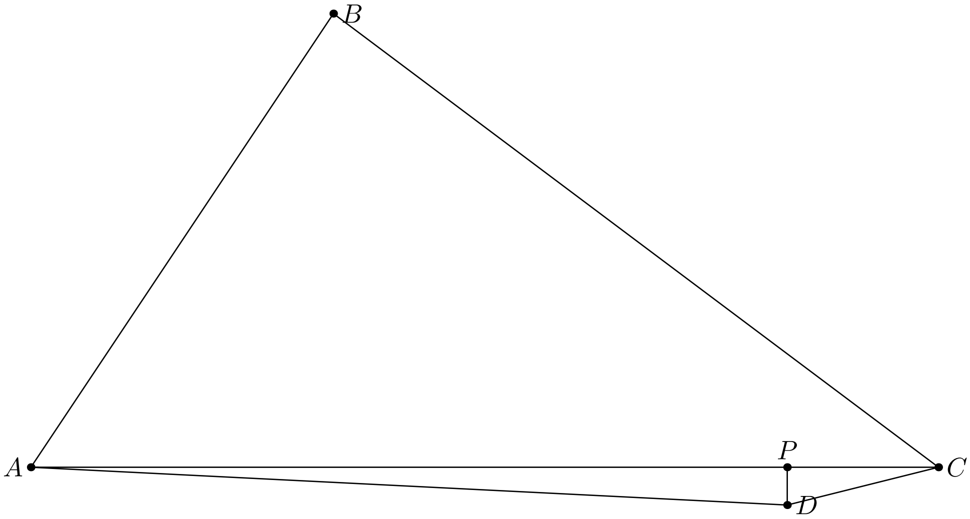

Рис.10

б) Предположим, что $ABCD$ — четырехугольник, удовлетворяющий условию. Без ограничения общности можно считать, что угол B наибольший, а сторона CD наименьшая. Тогда из равенства $AC^2 = AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B = AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cos D$ следует, что AD — наибольшая сторона и, значит, C — наименьший угол. Так как $\angle C+\angle D<\pi$, лучи CB и DA пересекаются в некоторой точке P. Так как угол C острый и $\angle C+\angle A<\pi$, то $\sin A>\sin C$. Поскольку $PB/\sin A = AB/\sin P > CD/\sin P = PD/\sin C$, из этого следует, что $PB>PD$. Но $PB=PC-BC<PC-CD<PD$ — противоречие.

Критерии. Неполный перебор — до 3 баллов.

11. (Tran Q.H., Вьетнам) Дан треугольник ABC и точка P. Точки A', B', C' — проекции P на BC, CA, AB. Прямая, проходящая через P и параллельная AB, вторично пересекает описанную окружность треугольника $PA'B'$ в точке C_1. Точки A_1, B_1 определены аналогично. Докажите, что

   а) (8-10) прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке;

   б) (9–11) треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны.

   Решение. Так как PC — диаметр описанной около треугольника $PA'B'$ окружности, угол PC_1C прямой, т.е. точка C_1 лежит на высоте треугольника ABC. Аналогично точки A_1, B_1 лежат на двух других высотах. Поэтому прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в ортоцентре H и утверждение а) доказано. Кроме того, точки A_1, B_1, C_1 лежат на окружности с диаметром PH, поскольку углы PA_1H, PB_1H, PC_1H прямые. Следовательно, угол между прямыми A_1C_1 и B_1C_1 равен углу между прямыми HA_1 и HB_1, который как угол между высотами треугольника ABC равен углу между его сторонами AC и BC. Таким образом, углы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны, т.е. эти треугольники подобны.

12. (Медет Жанбулатулы, Казахстан) (9–10) Пусть O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Прямая, проходящая через O и параллельная BC, пересекает AB и AC в точках P и Q соответственно. Известно, что сумма расстояний от точки O до сторон AB и AC равна OA. Докажите, что сумма отрезков PB и QC равна PQ.

   Решение. Из равенства $\cos A+\cos B+\cos C = 1+r/R$ следует, что в остроугольном треугольнике сумма расстояний от O до сторон равна сумме радиусов описанной и вписанной окружностей. Поэтому из условия задачи следует, что прямая PQ проходит через центр I вписанной окружности. Тогда $\angle PIB = \angle IBA = \angle IBP$ и $PB = IP$. Аналогично $QC = IQ$.

13. (А.Заславский) (9–10) Даны точки A, B. Найдите геометрическое место таких точек C, что C, середины отрезков AC, BC и точка пересечения медиан треугольника ABC лежат на одной окружности.

 Ответ. Окружность с центром в середине AB и радиусом, равным $AB\sqrt{3}/2$ без точек пересечения с прямой AB.

 Решение. Пусть медианы AA_0 и BB_0 треугольника пересекаются в точке M. Из условия задачи следует, что $AM \cdot AA_0 = AB_0 \cdot AC$, т.е. $AA_0^2 = \frac{3}{4}AC^2$. Аналогично, $BB_0^2 = \frac{3}{4}BC^2$. Поскольку в любом треугольнике отношение суммы квадратов медиан к сумме квадратов сторон равно $3/4$, из этих равенств следует, что медиана из вершины C равна $AB\sqrt{3}/2$. Нетрудно видеть, что любая точка окружности, кроме точек пересечения с прямой AB, входит в искомое ГМТ.

 Критерии. Предложенное доказательство работает только в одну сторону — 3 балла

14. (М.Волчкевич) (9–10) В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $AC \cap BD = O$ и M — середина BC. Пусть $MO \cap AD = E$. Докажите, что $\frac{AE}{ED} = \frac{S_{\triangle ABO}}{S_{\triangle CDO}}$.

 Решение. Пусть P — точка пересечения AB и MO. Применяя теорему Менелая к треугольникам ABC и ABD, получаем $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BO}{OD} \cdot \frac{DE}{AE} = \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CO}{OA} = 1$. Следовательно, $\frac{AE}{ED} = \frac{OA \cdot OB}{OC \cdot OD} = \frac{S_{\triangle ABO}}{S_{\triangle CDO}}$.

15. (А.Заславский) (9–11) Дан треугольник ABC. Рассматриваются прямые l, обладающие следующим свойством: три прямые, симметричные l относительно сторон треугольника, пересекаются в одной точке. Докажите, что все такие прямые проходят через одну точку.

 Решение. Пусть прямые, симметричные l, пересекаются в точке P. Тогда точки, симметричные P, лежат на l, а, значит, проекции P на стороны треугольника лежат на одной прямой. Следовательно, по теореме Симсона P лежит на описанной окружности треугольника ABC. Кроме того, так как прямая Симсона точки P делит пополам отрезок между P и ортоцентром H треугольника ABC, то l проходит через H.

16. (Ф.Ивлев) (9–11) Дан прямоугольный треугольник ABC, где AB — гипотенуза. Пусть M — середина AB, O — центр описанной окружности ω треугольника CMB. Прямая AC вторично пересекает окружность ω в точке K. Отрезок KO пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке L. Докажите, что отрезки AL и KM пересекаются на описанной окружности треугольника ACM.

 Первое решение. Так как четырехугольник $BMKC$ вписанный, то $\angle BMK = 90^\circ$ и O лежит на BK. Поэтому $\angle ABL = \angle MBK = \angle MCK = \angle A$. Значит, $\angle MAL = \angle B$, а угол между прямыми AL и KM равен углу A, т.е. углу ACM (рис.16).

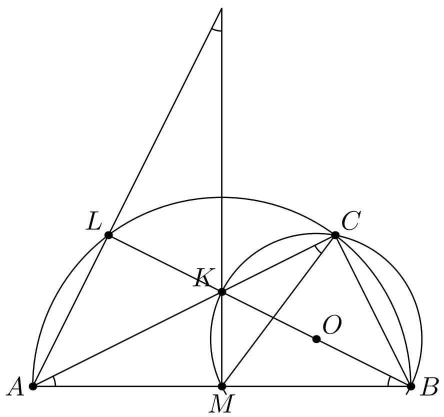

Рис.16

Второе решение. Так как угол KCB прямой, то O лежит на KB. Так как AB диаметр описанной около треугольника ABC окружности, то угол ALB также прямой. Угол KMB прямой, поскольку KCB прямой. А тогда K — точка пересечения высот треугольника из точек A, B и точки пересечения AL с MK. Значит два прямых угла с вершинами C и M опираются на один и тот же диаметр и все доказано.

17. (М.Рожкова, Украина) (9–11) Квадрат $ABCD$ вписан в окружность. Точка M лежит на дуге BC, прямая AM пересекает BD в точке P, прямая DM пересекает AC в точке Q. Докажите, что площадь четырёхугольника $APQD$ равна половине площади квадрата.

    Решение. Так как $\angle AMD = 45^\circ = \angle OAD = \angle ODA$, то $\angle AQD = \angle AMD + \angle MAQ = \angle PAD$. Аналогично, $\angle APD = \angle ADQ$ (рис.17). Следовательно, треугольники APD и QDA подобны, т.е. $AQ \cdot PD = AD^2$, что равносильно утверждению задачи.

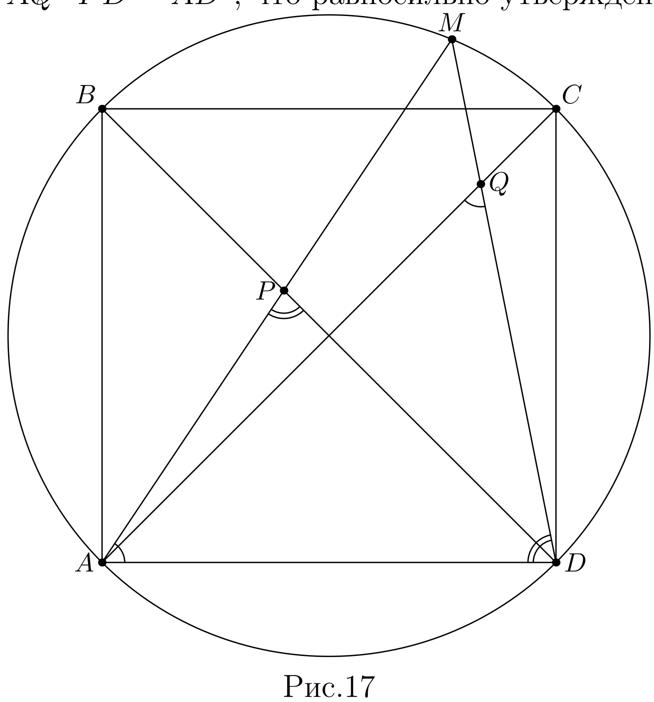

Рис.17

18. (Б.Френкин) (9–11) На плоскости начерчен треугольник и в нём отмечены две точки. Известно, что какой-то из углов равен 58°, какой-то из остальных 59°, какая-то из отмеченных точек является центром вписанной окружности, а другая — центром описанной. Используя только линейку без делений, определите, где какой угол и где какая точка.

Решение. Проведём прямую через отмеченные точки. Она пересечёт две стороны треугольника (скажем, AB и AC) и продолжение третьей (скажем, за вершиной C). Тогда AB — наибольшая сторона треугольника, BC — наименьшая и центром вписанной окружности является та из отмеченных точек, которая ближе к BC.

Докажем сделанные утверждения. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника, O — центр описанной. Соединим их с вершинами треугольника и вычислим углы. Получим, что O лежит в треугольнике, образованном наибольшей стороной и I, а I лежит в треугольнике, образованном наименьшей стороной и O. Значит, прямая OI пересекает наибольшую и наименьшую стороны треугольника и, следовательно, пересекает продолжение средней стороны. При этом O лежит ближе к наибольшей стороне, а I — к наименьшей.

Остаётся узнать, с какой стороны OI пересекает продолжение средней стороны AC. Для этого надо сравнить длину перпендикуляров из O и I на прямую AC. Если r и R — радиусы вписанной и описанной окружности, то перпендикуляр из I равен r, а перпендикуляр из O равен $R\cos\ 59^\circ > R/2 > r$, откуда следует ответ.

Критерии. Правильное решение, опирающееся на недоказанные тригонометрические неравенства — 3 балла.

19. (А.Заславский) (10–11) Две окружности радиуса 1 пересекаются в точках X, Y, расстояние между которыми тоже равно 1. Из точки C одной окружности проведены к другой касательные CA, CB, вторично пересекающие первую окружность в точках B', A'. Прямые AA' и BB' пересекаются в точке Z. Найдите угол XZY.

Ответ. 150°.

Решение. Из условия следует, что расстояние между центрами окружностей равно $\sqrt{3}$, значит, по формуле Эйлера эти окружности для треугольника $A'B'C$ являются описанной и вневписанной, т.е. $A'B'$ касается второй окружности в точке C', лежащей на прямой CZ (рис.19).

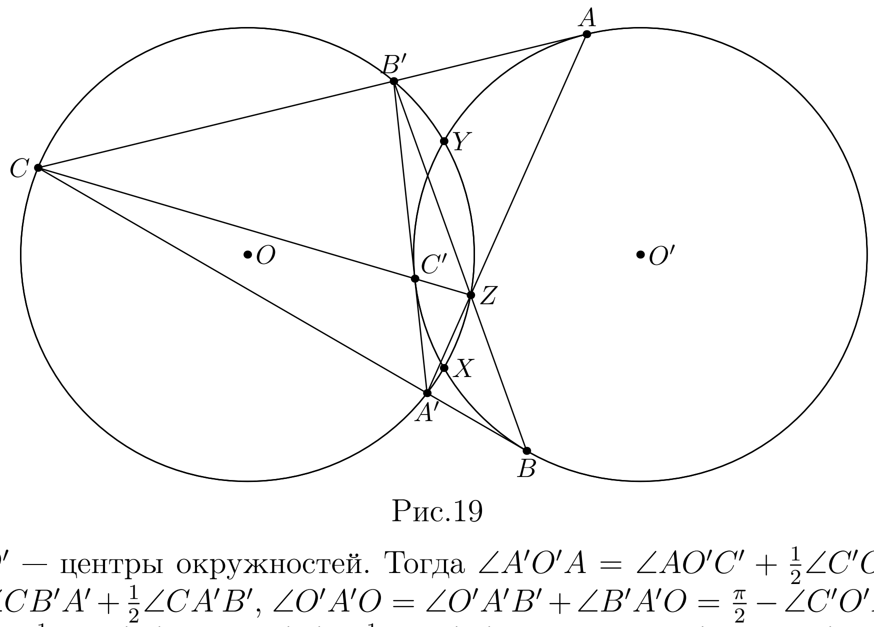

Рис.19

Пусть O, O' — центры окружностей. Тогда $\angle A'O'A = \angle AO'C' + \frac{1}{2}\angle C'O'B = 2\angle ABC' + \angle C'AB = \angle CB'A' + \frac{1}{2}\angle CA'B'$, $\angle O'A'O = \angle O'A'B' + \angle B'A'O = \frac{\pi}{2} - \angle C'O'A' + \frac{\pi}{2} - \angle BCA = \pi - \angle BCA - \frac{1}{2}\angle CA'B' = \angle CB'A' + \frac{1}{2}\angle CA'B'$, и, так как $O'A = OA'$, то $AO'A'O$ — равнобедренная трапеция. Поэтому $\angle O'AA' = \angle A'OO'$ и, аналогично, $\angle O'BB' = \angle B'OO'$.

Следовательно, $\angle A'ZB' = 2\pi - \angle AO'B - \angle A'OB' = \pi - \angle C$, т.е. точка Z лежит на описанной окружности треугольника и $\angle XZY = 150^\circ$.

Примечание. Доказать, что Z лежит на окружности, можно и по-другому. При изогональном сопряжении относительно треугольника $A'B'C$ Z перейдет в центр гомотетии окружностей, который в силу равенства их радиусов является бесконечно удаленным.

Критерии. Без доказательства утверждается, что Z лежит на окружности — 2 балла.

20. (Г.Фельдман) (10–11) В треугольнике ABC на стороне AB отметили точку D. Пусть ω_1 и Ω_1, ω_2 и Ω_2 — соответственно вписанные и вневписанные (касающиеся AB во внутренней точке) окружности треугольников ACD и BCD. Докажите, что общие внешние касательные к ω_1 и ω_2, Ω_1 и Ω_2 пересекаются на прямой AB.

Первое решение. Пусть I_1, J_1, I_2, J_2 — центры ω_1, Ω_1, ω_2, Ω_2, а K_1, K_2 — точки пересечения прямых I_1J_1, I_2J_2 с AB (рис.20). Тогда $I_1K_1/I_1C = J_1K_1/J_1C$, $I_2K_2/I_2C = J_2K_2/J_2C$ и, дважды применив к треугольнику CK_1K_2 теорему Менелая, получим, что прямые I_1I_2 и J_1J_2 пересекают AB в одной и той же точке. Через эту точку проходят и общие внешние касательные.

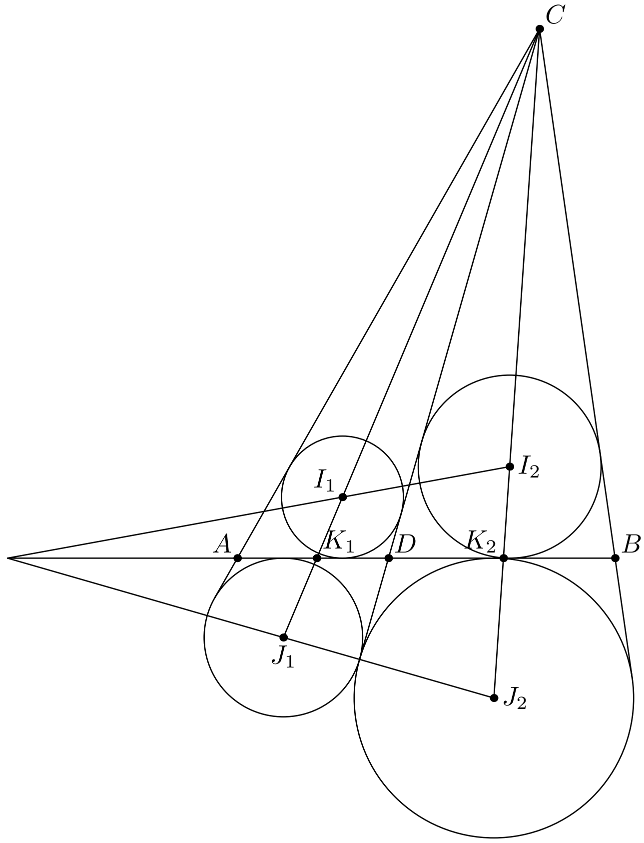

Рис.20

Второе решение. Возьмем пересечение общих внешних касательных к окружностям ω_1 и Ω_2 — точку P. Тогда, применяя теорему о трех колпаках для троек окружностей ω_1, Ω_1, Ω_2 и ω_1, ω_2, Ω_2, получаем, что точки пересечения общих внешних касательных сначала к окружностям Ω_1 и Ω_2, а потом к ω_1 и ω_2 являются точкой пересечения прямой PC с прямой AB, т.е. совпадают и лежат на AB.

21. (Н.Белухов, Э.Колев, Болгария) (10–11) Через ортоцентр остроугольного треугольника проведены две перпендикулярные прямые. Стороны треугольника высекают на каждой

из этих прямых два отрезка: один, лежащий внутри треугольника, второй — вне его. Докажите, что произведение двух внутренних отрезков равно произведению двух внешних.

Решение. Пусть одна из прямых пересекает BC, CA, AB в точках X_a, X_b, X_c, а другая — в точках Y_a, Y_b, Y_c (рис.21). Тогда $\angle HY_aB = \angle X_bHA$ и $\angle HX_bA = \angle Y_aHB$, так как стороны этих углов перпендикулярны. Поэтому треугольники HBY_a и X_bAH подобны. Аналогично, подобны треугольники HX_aB и Y_bAH. Значит, $AX_b \cdot BY_a = AH \cdot BH = AY_b \cdot BX_a$. С другой стороны, применив теорему Менелая к треугольникам CX_aX_b, CY_aY_b и прямой AB, получим $\frac{CA}{AX_b} \cdot \frac{X_bX_c}{X_cX_a} \cdot \frac{X_aB}{BC} = \frac{CA}{AY_b} \cdot \frac{Y_bY_c}{Y_cY_a} \cdot \frac{Y_aB}{BC} = 1$. Из этих трех равенств следует утверждение задачи.

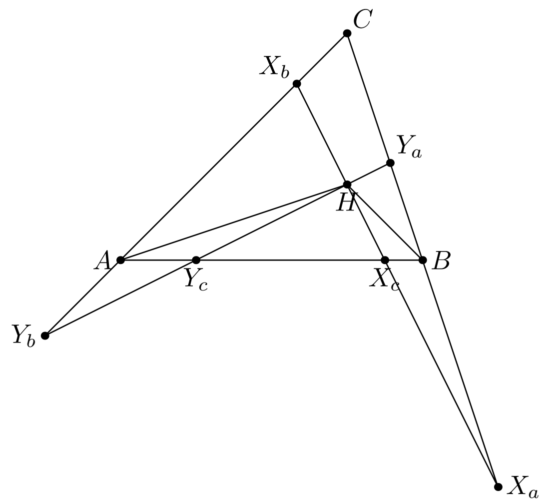

Рис.21

22. (Ф.Нилов) (10–11) В сегмент, ограниченный хордой и дугой AB окружности, вписана окружность ω с центром I. Обозначим середину указанной дуги AB через M, а середину дополнительной дуги через N. Из точки N проведены две прямые, касающиеся ω в точках C и D. Противоположные стороны AC и BD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке X, диагонали $ABCD$ пересекаются в точке Y. Докажите, что точки X, Y, I и M лежат на одной прямой.

Решение. Пусть K, L — точки касания ω с AB и большой окружностью. Так как L — центр гомотетии окружности, а касательные к ним в точках K и N параллельны, точки L, K, N лежат на одной прямой. При этом $\angle KAN = \angle NLA$, так как эти углы опираются на равные дуги. Значит, треугольники KAN и ALN подобны и $AN^2 = NK \cdot NL = NC^2$, т.е. четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром N (рис.22). Относительно этой окружности прямая XY является полярой точки пересечения AB и CD. При этом, поскольку $\angle NAM = \angle NBM = \angle NCI = \angle NDI = 90°$, точки M и I являются полюсами прямых AB и CD и, следовательно, лежат на XY.

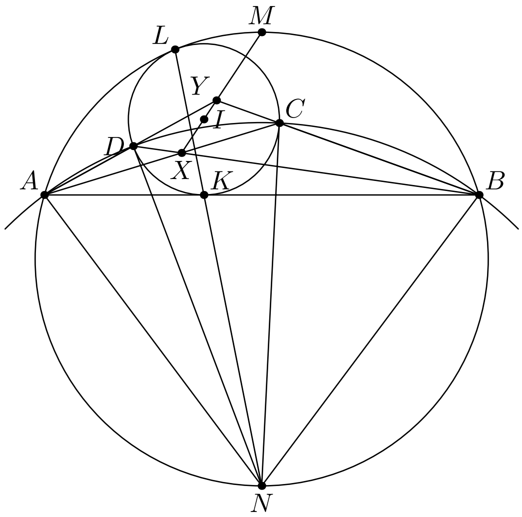

Рис.22

23. (А.Канель) (10–11) На каждой из двенадцати диагоналей граней куба выбирается произвольная точка. Определяется центр тяжести этих двенадцати точек. Найдите геометрическое место всех таких центров тяжести.

    Решение. Прежде всего заметим, что множеством середин отрезков, концы которых лежат на двух диагоналях квадрата, будет квадрат с вершинами в серединах сторон исходного. Поэтому множеством центров тяжести четырех точек, лежащих на диагоналях двух противоположных граней куба, будет квадрат с вершинами в центрах четырех остальных граней. Таким образом, задача равносильна определению ГМТ — центров тяжести трех точек, каждая из которых выбирается в одном из трех таких квадратов. Очевидно, что все такие центры тяжести лежат в октаэдре, образованном центрами граней куба. Кроме того, если одна из точек лежит в центральной плоскости этого октаэдра, а две другие удалены от этой плоскости на расстояние, не превышающее половины ребра куба, то расстояние от центра тяжести до плоскости не может быть больше трети ребра. Значит, все центры тяжести лежат в многограннике, полученном в результате отсечения от октаэдра шести четырехугольных пирамидок с ребрами, равными одной трети ребра октаэдра. С другой стороны, все вершины этого многогранника, а, значит и все его внутренние точки принадлежат искомому ГМТ.

24. (В.А.Ясинский, Украина) (10–11) На плоскости даны n $(n > 2)$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколькими различными способами это множество точек можно разбить на два непустых подмножества так, чтобы выпуклые оболочки этих подмножеств не пересекались?

    Ответ. $n(n-1)/2$.

    Решение. Так как выпуклые оболочки двух подмножеств не пересекаются, они лежат по разные стороны от некоторой прямой. Таким образом требуется узнать, сколькими способами данное множество точек можно разделить прямой на два подмножества. Возьмем в плоскости точку O, не лежащую ни на одной из прямых, соединяющих данные точки, и рассмотрим полярное соответствие с центром O. Данным точкам будут соответствовать n прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. По индукции легко доказать, что эти прямые делят плоскость на $n(n+1)/2+1$ частей, из которых $2n$ неограниченных.

Лемма. Пусть поляры a, b точек A, B делят плоскость на 4 угла. Тогда полюса прямых, пересекающих отрезок AB, лежат в двух вертикальных углах, а полюса прямых, не пересекающих отрезок AB, — в двух других углах.

Действительно, пусть прямая l пересекает прямую AB в точке X. Тогда поляра X проходит через точку пересечения a и b. Если вращать l вокруг X, то ее полюс будет двигаться по этой прямой, т.е. внутри пары вертикальных углов, образованных a и b. При движении точки X по AB ее поляра вращается вокруг точки пересечения a и b, переходя из одной пары вертикальных углов в другую в моменты прохождения X точки A или B. Лемма доказана.

Вернемся к задаче. Из леммы следует, что две прямые разбивают данное множество точек одинаковым образом тогда и только тогда, когда их полюсы либо лежат в одной из частей, на которые плоскость разбивается полярами данных точек, либо лежат по разные стороны от всех n прямых. Но второй случай возможен тогда и только тогда, когда обе точки лежат в неограниченных областях. Действительно, если точки P, Q лежат по разные стороны от всех прямых, то каждая из этих прямых пересекает отрезок PQ. Значит, каждый из продолжающих этот отрезок лучей целиком лежит в одной части. Обратно, если точка P лежит в неограниченной части, то возьмем луч с началом в ней, целиком лежащий в этой части и не параллельный ни одной из n прямых. Точки противоположного луча, лежащие дальше от P, чем все точки пересечения с прямыми, лежат по разные стороны с P от этих прямых.

Таким образом, $2n$ неограниченных областей разбиваются на пары, каждой из которых соответствует один способ разбиения данного множества точек, а каждой из остальных областей соответствует свой способ разбиения. Всего получаем $n(n-1)/2+1$ способов, при одном из которых все n точек попадают в одно подмножество.

Критерии. Решение по индукции с недостаточно обоснованным переходом — 5-6 баллов.