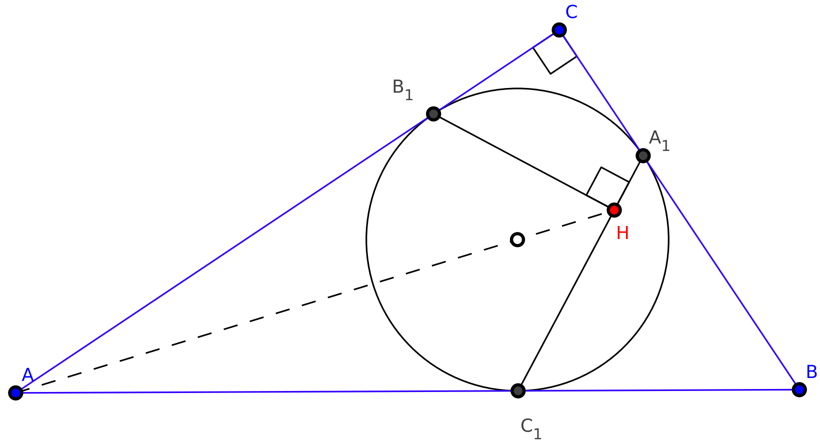
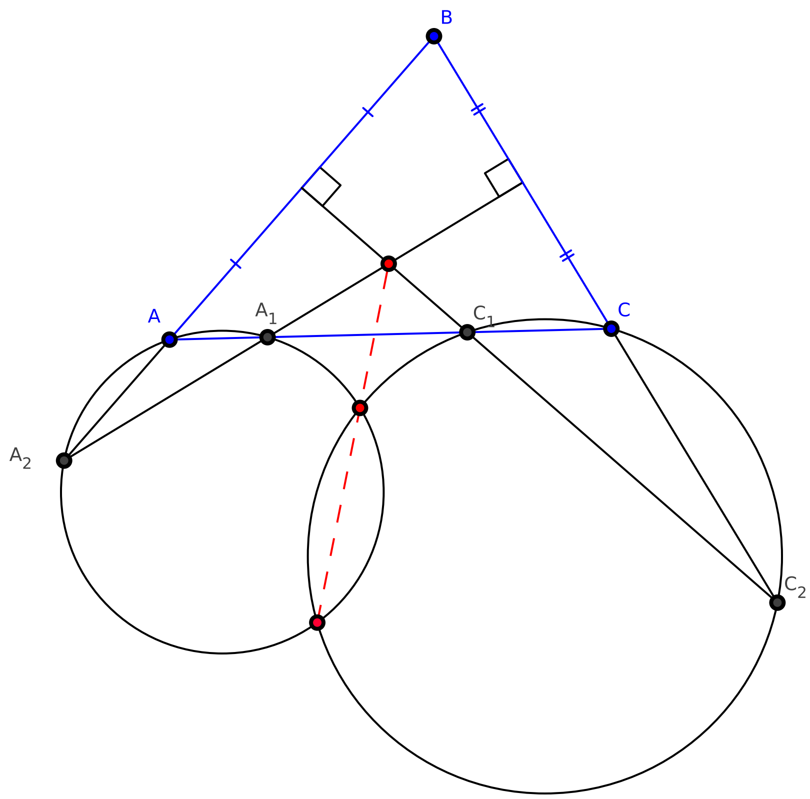
Геометрия регионального тура 2012-2013

9 класс.

Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, касается его сторон BC, AC, AB в точках A_1, B_1, C_1. Пусть B_1H — высота треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что точка H лежит на биссектрисе угла CAB.

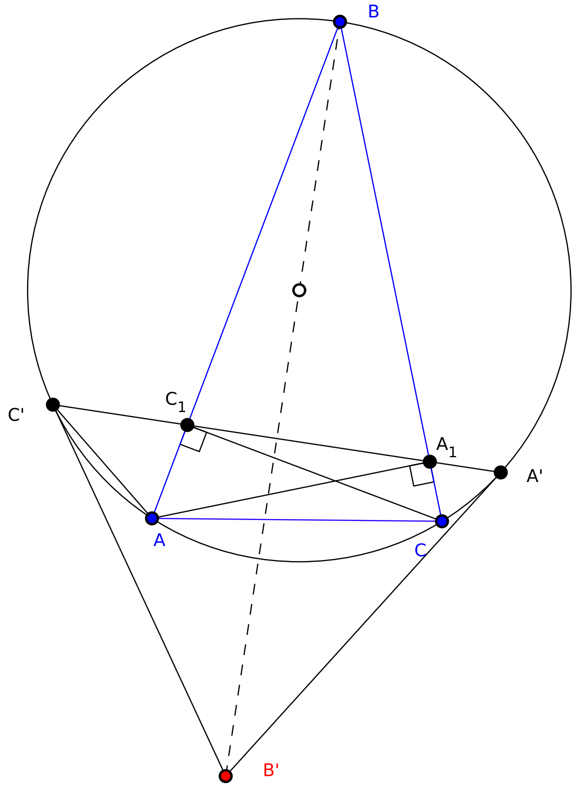


Серединный перпендикуляр к стороне AC остроугольного треугольника ABC пересекает прямые AB и BC в точках B_1 и B_2, а серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает прямые AC и BC в точках C_1 и C_2. Окружности, описанные около треугольников BB_1B_2 и CC_1C_2 пересекаются в точках P и Q. Доказать, что O, P и Q лежат на одной прямой(O — центр описанной ABC).

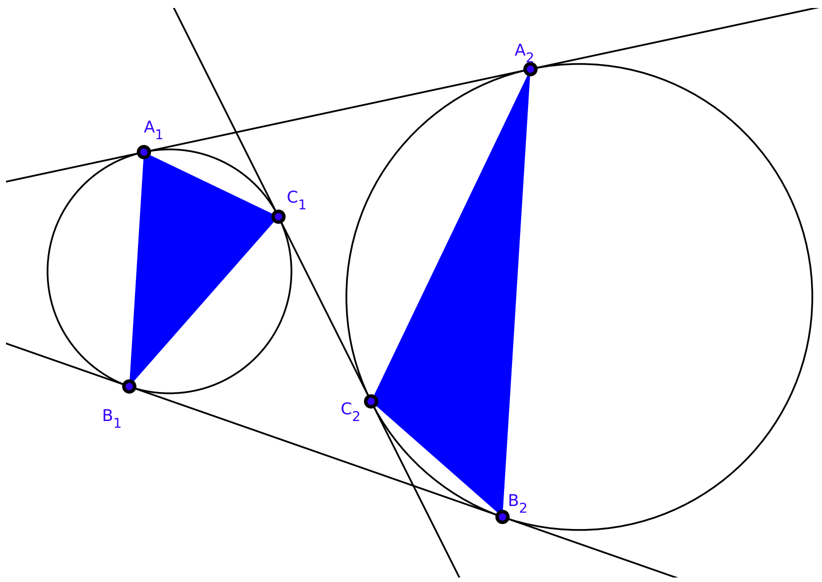


10 класс.

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Окружность ω, описанная около треугольника ABC, пересекает прямую A_1C_1 в точках A' и C'. Касательные к ω, проведённые в точках A' и C', пересекаются в точке B'. Докажите, что прямая BB' проходит через центр окружности ω.

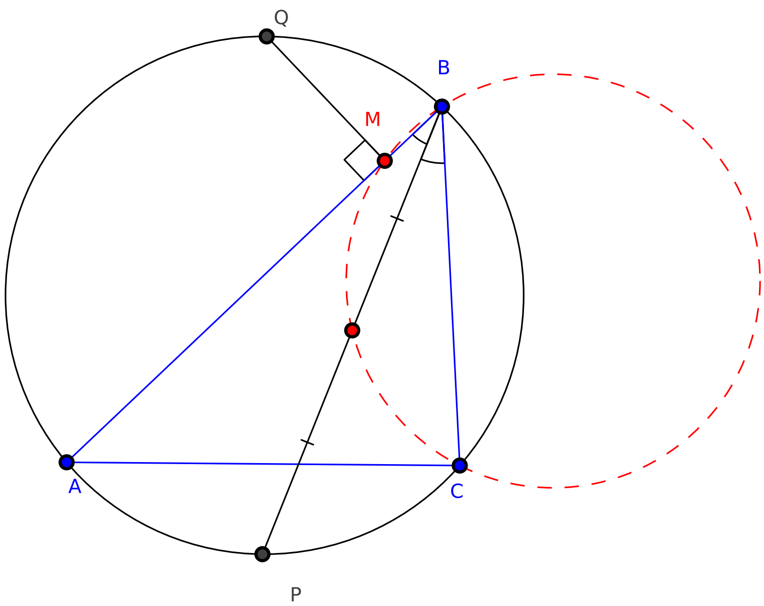


К двум непересекающимся окружностям ω_1 и ω_2 проведены три общие касательные — две внешние, a и b, и одна внутренняя, c. Прямые a, b, c касаются окружности ω_1 в точках A_1, B_1, C_1 соответственно, а окружности ω_2 - в точках A_2, B_2, C_2 соответственно. Докажите, что отношение площадей треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равно отношению радиусов ω_1 и ω_2.



11 класс.

В окружность вписан остроугольный треугольник ABC в котром $AB > AC$. Пусть P и Q — середины меньшей и большей дуг AC соответственно. Пусть M — основание перпендикуляра, опущенного из точки Q на отрезок AB. Докажите что окружность, описанная около треугольника BMC, делит пополам отрезок BP.



Три попарно непересекающиеся окружности ω_x, ω_y, ω_z радиусов r_x, r_y, r_z соответственно лежат по одну сторону от прямой t и касаются её в точках X, Y, Z соответственно. Известно, что Y — середина отрезка XZ, $r_x = r_z = r$, а $r_y > r$. Пусть p — одна из общих внутренних касательных к окружностям ω_x и ω_y, а q — одна из общих внутренних касательных к окружностям ω_y и ω_z. В пересечении прямых p, q, t образовался неравнобедренный треугольник. Докажите, что радиус вписанной в него окружности равен r.