IV Всероссийская олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. 8 класс. Первый день

30 июля 2008 года *«Ратмино», Дубна*

1. Существует ли выпуклый четырехугольник без параллельных сторон, который можно разрезать на четыре равных треугольника?

2. Дан прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC и $\angle A = 50^\circ$. Точки K и L на катете BC таковы, что $\angle KAC = \angle LAB = 10^\circ$. Найдите CK/LB.

3. В выпуклом четырехугольнике с перпендикулярными диагоналями равны два противолежащих угла. Докажите, что в него можно вписать окружность.

4. Пусть CC_0 — медиана треугольника ABC, серединные перпендикуляры к AC и BC пересекают CC_0 в точках A', B', прямые AA' и BB' пересекаются в точке C_1. Докажите, что $\angle C_1CA = \angle C_0CB$.

5. Даны два треугольника ABC, $A'B'C'$. Обозначим через α угол между высотой и медианой треугольника ABC, проведенными из вершины A. Аналогично определим углы β, γ, α', β', γ'. Известно, что $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$. Обязательно ли треугольники подобны?

IV Всероссийская олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. 8 класс. Первый день

30 июля 2008 года *«Ратмино», Дубна*

1. Существует ли выпуклый четырехугольник без параллельных сторон, который можно разрезать на четыре равных треугольника?

2. Дан прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC и $\angle A = 50^\circ$. Точки K и L на катете BC таковы, что $\angle KAC = \angle LAB = 10^\circ$. Найдите CK/LB.

3. В выпуклом четырехугольнике с перпендикулярными диагоналями равны два противолежащих угла. Докажите, что в него можно вписать окружность.

4. Пусть CC_0 — медиана треугольника ABC, серединные перпендикуляры к AC и BC пересекают CC_0 в точках A', B', прямые AA' и BB' пересекаются в точке C_1. Докажите, что $\angle C_1CA = \angle C_0CB$.

5. Даны два треугольника ABC, $A'B'C'$. Обозначим через α угол между высотой и медианой треугольника ABC, проведенными из вершины A. Аналогично определим углы β, γ, α', β', γ'. Известно, что $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$. Обязательно ли треугольники подобны?

IV Всероссийская олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. 9 класс. Первый день

30 июля 2008 года *«Ратмино», Дубна*

1. Выпуклый многоугольник можно разрезать на 2008 равных четырехугольников. Обязательно ли у него есть центр или ось симметрии?

2. На плоскости дан четырёхугольник $ABCD$. Для произвольной точки P на плоскости обозначим через K, L, M, N ее проекции на прямые AB, BC, CD, DA, соответственно. Найдите ГМТ P таких, что $KM \perp LN$.

3. Докажите неравенство
$$\frac{1}{\sqrt{2\sin A}}+\frac{1}{\sqrt{2\sin B}}+\frac{1}{\sqrt{2\sin C}} \leqslant \sqrt{\frac{p}{r}},$$
где p — полупериметр, а r — радиус вписанной окружности треугольника ABC.

4. Пусть CC_0 — медиана треугольника ABC, серединные перпендикуляры к AC и BC пересекают CC_0 в точках A_c, B_c, прямые AA_c и BB_c пересекаются в точке C_1. Аналогично определим точки A_1, B_1. Докажите, что описанная окружность треугольника $A_1B_1C_1$ проходит через центр описанной окружности треугольника ABC.

5. Можно ли оклеить поверхность правильного тетраэдра одинаковыми правильными шестиугольниками в один слой?

IV Всероссийская олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. 9 класс. Первый день

30 июля 2008 года *«Ратмино», Дубна*

1. Выпуклый многоугольник можно разрезать на 2008 равных четырехугольников. Обязательно ли у него есть центр или ось симметрии?

2. На плоскости дан четырёхугольник $ABCD$. Для произвольной точки P на плоскости обозначим через K, L, M, N ее проекции на прямые AB, BC, CD, DA, соответственно. Найдите ГМТ P таких, что $KM \perp LN$.

3. Докажите неравенство
$$\frac{1}{\sqrt{2\sin A}} + \frac{1}{\sqrt{2\sin B}} + \frac{1}{\sqrt{2\sin C}} \leqslant \sqrt{\frac{p}{r}},$$
где p — полупериметр, а r — радиус вписанной окружности треугольника ABC.

4. Пусть CC_0 — медиана треугольника ABC, серединные перпендикуляры к AC и BC пересекают CC_0 в точках A_c, B_c, прямые AA_c и BB_c пересекаются в точке C_1. Аналогично определим точки A_1, B_1. Докажите, что описанная окружность треугольника $A_1B_1C_1$ проходит через центр описанной окружности треугольника ABC.

5. Можно ли оклеить поверхность правильного тетраэдра одинаковыми правильными шестиугольниками в один слой?

IV Всероссийская олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. 10 класс. Первый день

30 июля 2008 года *«Ратмино», Дубна*

1. Вписанно-описанный $\boldsymbol{n}$-угольник разрезан прямой линией на два вписанно-описанных многоугольника с разным количеством сторон. При каких $\boldsymbol{n}$ это возможно?

2. Пусть $\boldsymbol{A_1B_1C_1}$ — треугольник, симметричный треугольнику $\boldsymbol{ABC}$ относительно центра окружности, вписанной в его серединный треугольник. Докажите, что ортоцентр треугольника $\boldsymbol{A_1B_1C_1}$ совпадает с центром окружности, описанной около треугольника, образованного центрами вневписанных окружностей треугольника $\boldsymbol{ABC}$.

3. Две окружности $\boldsymbol{\omega_1}$ и $\boldsymbol{\omega_2}$ пересекаются в двух точках $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$, а третья окружность $\boldsymbol{\omega}$ касается внутренним образом окружностей $\boldsymbol{\omega_1}$ и $\boldsymbol{\omega_2}$ в точках $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ соответственно. Отрезок $\boldsymbol{XY}$ пересекает окружность $\boldsymbol{\omega}$ в двух точках $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{N}$. Лучи $\boldsymbol{PM}$ и $\boldsymbol{PN}$ пересекают $\boldsymbol{\omega_1}$ в точках $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{D}$, а лучи $\boldsymbol{QM}$ и $\boldsymbol{QN}$ пересекают $\boldsymbol{\omega_2}$ в точках $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ соответственно.
   Докажите, что $\boldsymbol{AB = CD}$.

4. На прямой $\boldsymbol{l}$ даны три точки $\boldsymbol{C_0}$, $\boldsymbol{C_1}$, $\boldsymbol{C_2}$. Найдите геометрическое место центров окружностей вписанных в треугольники $\boldsymbol{ABC}$, у которых сторона $\boldsymbol{AB}$ лежит на прямой $\boldsymbol{l}$, а основания медианы, биссектрисы и высоты, проведенных из вершины $\boldsymbol{C}$, совпадают с $\boldsymbol{C_0}$, $\boldsymbol{C_1}$, $\boldsymbol{C_2}$.

5. Сечение правильной четырехугольной пирамиды является правильным пятиугольником. Найдите отношение его стороны к стороне основания пирамиды.

IV Всероссийская олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. 10 класс. Первый день

30 июля 2008 года *«Ратмино», Дубна*

1. Вписанно-описанный $\boldsymbol{n}$-угольник разрезан прямой линией на два вписанно-описанных многоугольника с разным количеством сторон. При каких $\boldsymbol{n}$ это возможно?

2. Пусть $\boldsymbol{A_1B_1C_1}$ — треугольник, симметричный треугольнику $\boldsymbol{ABC}$ относительно центра окружности, вписанной в его серединный треугольник. Докажите, что ортоцентр треугольника $\boldsymbol{A_1B_1C_1}$ совпадает с центром окружности, описанной около треугольника, образованного центрами вневписанных окружностей треугольника $\boldsymbol{ABC}$.

3. Две окружности $\boldsymbol{\omega_1}$ и $\boldsymbol{\omega_2}$ пересекаются в двух точках $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$, а третья окружность $\boldsymbol{\omega}$ касается внутренним образом окружностей $\boldsymbol{\omega_1}$ и $\boldsymbol{\omega_2}$ в точках $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ соответственно. Отрезок $\boldsymbol{XY}$ пересекает окружность $\boldsymbol{\omega}$ в двух точках $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{N}$. Лучи $\boldsymbol{PM}$ и $\boldsymbol{PN}$ пересекают $\boldsymbol{\omega_1}$ в точках $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{D}$, а лучи $\boldsymbol{QM}$ и $\boldsymbol{QN}$ пересекают $\boldsymbol{\omega_2}$ в точках $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ соответственно.
   Докажите, что $\boldsymbol{AB = CD}$.

4. На прямой $\boldsymbol{l}$ даны три точки $\boldsymbol{C_0}$, $\boldsymbol{C_1}$, $\boldsymbol{C_2}$. Найдите геометрическое место центров окружностей вписанных в треугольники $\boldsymbol{ABC}$, у которых сторона $\boldsymbol{AB}$ лежит на прямой $\boldsymbol{l}$, а основания медианы, биссектрисы и высоты, проведенных из вершины $\boldsymbol{C}$, совпадают с $\boldsymbol{C_0}$, $\boldsymbol{C_1}$, $\boldsymbol{C_2}$.

5. Сечение правильной четырехугольной пирамиды является правильным пятиугольником. Найдите отношение его стороны к стороне основания пирамиды.