VII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Заочный тур. Решения

1. (А.Заславский) (8) Существует ли выпуклый семиугольник, который можно разрезать на 2011 равных треугольников?

   Ответ. Да.

   Первое решение. Пусть T — прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 1003, а один из катетов — 1. Из двух таких треугольников составим прямоугольник, а из 1003 таких прямоугольников — прямоугольник со стороной 1003. Теперь приложим к одной из сторон этого прямоугольника равнобедренный треугольник, составленный из двух треугольников, равных T, а к противоположной стороне четырехугольник из трех таких треугольников (рис.1).

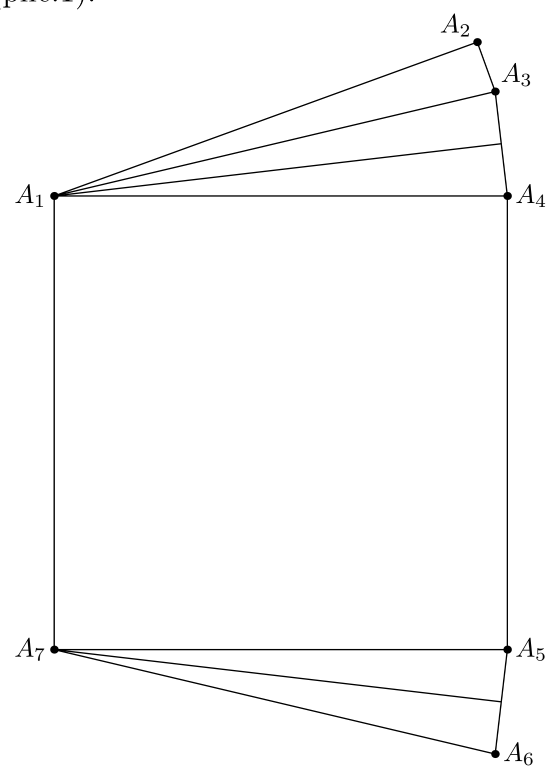

Рис. 1

   Второе решение. Возьмем квадрат со стороной 34 и отрежем от трех его углов равнобедренные прямоугольные треугольники с катетами 3, 6 и 16. Получится семиугольник, который можно разрезать на равнобедренные прямоугольные треугольники с катетом 1, причем число этих треугольников равно $2 \cdot 34^2 - 9 - 36 - 256 = 2011$.

   Вместо квадрата можно взять прямоугольник $m \times n$ и отрезать от него равнобедренные прямоугольные треугольники с катетами x, y, z такими, что $2mn - x^2 - y^2 - z^2 = 2011$. Участники олимпиады нашли несколько решений такого вида.

   Третье решение. (М.Аманжолов, Казахстан) Пусть T — равнобедренный треугольник с основанием 1 и углом при вершине 120°. Тогда правильный треугольник со стороной 1 можно разрезать на три треугольника, равных T. С другой стороны, из 335 правильных треугольников можно сложить равнобедренную трапецию с основаниями 168 и 167 и боковыми сторонами 1. Две таких трапеции, соединенные большими основаниями, образуют выпуклый шестиугольник, который можно разрезать на 2010 треугольников, равных T.

Приложив к его меньшей стороне еще один такой треугольник, получим искомый семиугольник.

2. (Из сингапурских олимпиад) (8) В треугольнике ABC со сторонами $AB = 4$, $AC = 6$ проведена биссектриса угла A. Из вершины B опущен на эту биссектрису перпендикуляр BH. Найдите MH, где M — середина BC.

   Решение. Пусть D — точка пересечения прямых BH и AC (рис.2). Тогда в треугольнике ABD AH — биссектриса и высота. Следовательно, этот треугольник равнобедренный, т.е. $AD = BD$ и $BH = HD$. Значит, MH — средняя линия в треугольнике BCD и $MH = CD/2 = (AC - AB)/2 = 1$.

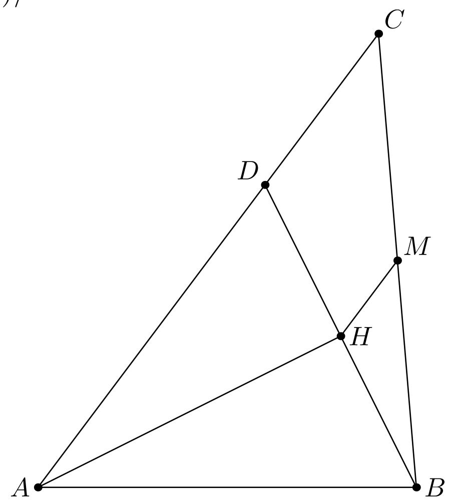

Рис. 2

3. (Д.Швецов) (8) В треугольнике ABC $\angle A = 60^\circ$. Серединный перпендикуляр к отрезку AB пересекает прямую AC в точке C_1. Серединный перпендикуляр к отрезку AC пересекает прямую AB в точке B_1. Докажите, что прямая B_1C_1 касается окружности, вписанной в треугольник ABC.

   Решение. Пусть B_0, C_0 — середины сторон AC, AB соответственно. Так как треугольники AB_0B_1, AC_0C_1 — прямоугольные с $\angle A = 60^\circ$, то $AB_1 = 2AB_0 = AC$ и $AC_1 = 2AC_0 = AB$. Следовательно, прямая B_1C_1 симметрична BC относительно биссектрисы угла A. Поскольку эта биссектриса проходит через центр вписанной окружности, а BC касается этой окружности, то и B_1C_1 тоже касается вписанной окружности.

4. (Б.Френкин) (8) В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA', BB', CC'. Известно, что в треугольнике $A'B'C'$ эти прямые также являются биссектрисами. Верно ли, что треугольник ABC равносторонний?

   Ответ. Да.

   Решение. Из условия следует, что в четырехугольнике $A'C'B'C$ диагональ CC' является биссектрисой углов C и C', а, значит, осью симметрии. Поэтому $A'C = B'C$, $A'C' = B'C'$, $\angle CB'A' = \angle CA'B'$ и $\angle AB'C' = \angle BA'C'$. Аналогично получаем, что $\angle BC'A' = \angle BA'C' = \angle AB'C' = \angle AC'B'$. Следовательно, треугольники $AB'C'$ и $BA'C'$ равны, т.е. $AB' = BA'$ и $AC = BC$. Равенство $AB = BC$ доказывается аналогично.

5. (Б.Френкин) (8) В треугольнике ABC проведен серединный перпендикуляр к стороне AB до пересечения с другой стороной в некоторой точке C'. Аналогично построены точки A' и B'. Для каких исходных треугольников треугольник $A'B'C'$ будет равносторонним?

Ответ. Для равносторонних и треугольников с углами 30, 30 и 120 градусов.

Решение. Пусть треугольник ABC — не равносторонний и AB — его наибольшая сторона. Тогда точки A', B' лежат на отрезке AB. Из условия следует, что $C'C_0$, где C_0 — середина AB, — серединный перпендикуляр к $A'B'$, значит, $CA' = A'B = AB' = CB'$, т.е. C' совпадает с C и треугольник ABC равнобедренный. Кроме того, $2\angle A = \angle A + \angle CAB' = \angle CB'B = 60°$, следовательно $\angle A = \angle B = 30°$.

Критерии.

Показано, что две из трех точек пересечения лежат на одной стороне — 1 балл.

Показано, что треугольник равнобедренный, но упущен случай неравностороннего треугольника — 3 балла.

6. (А.Акопян) (8) Даны две единичные окружности ω_1 и ω_2 пересекающиеся в точках A и B. На окружности ω_1 взяли произвольную точку M, а на окружности ω_2 точку N. Через точки M и N провели еще две единичные окружности ω_3 и ω_4. Обозначим повторное пересечение ω_1 и ω_3 через C, повторное пересечение окружностей ω_2 и ω_4 через D. Докажите, что $ACBD$ параллелограмм.

Решение. Пусть O_i — центр окружности ω_i. Из условия следует, что O_1AO_2B, O_1CO_3M, O_3MO_4N, O_4NO_2D — ромбы со сторонами 1. Значит, $\overrightarrow{O_1C} = \overrightarrow{MO_3} = \overrightarrow{O_4N} = \overrightarrow{DO_2}$ и $\overrightarrow{O_1A} = \overrightarrow{BO_2}$. Следовательно, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$, что равносильно утверждению задачи.

Критерии.

В решении используются равенства вписанных углов, которые для другой картинки могут выглядеть иначе — 4 балла

7. (А.Акопян) (8–9) На сторонах AB и AC треугольника ABC выбрали точки P и Q так, что $PB = QC$. Докажите, что $PQ < BC$.

Решение. Пусть T — четвертая вершина параллелограмма $CBPT$. Тогда $PT = BC$ и $CT = BP = CQ$ (рис.7). Следовательно, $\angle PQT > \angle TQC = \angle QTC > \angle QTP$, т.е. $PT > PQ$.

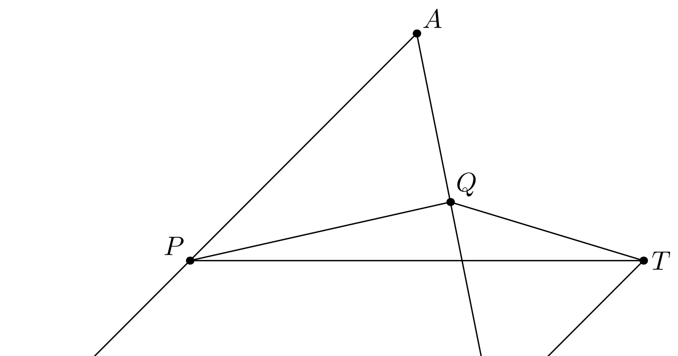

Рис. 7

Критерии.

Строится параллелограмм со стороной PQ и без доказательства используется, сто его вершина лежит внутри треугольника — 5 баллов.

8. (Д.Швецов) (8–9) Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC ($\angle B = 90^\circ$), касается сторон AB, BC, CA в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. A_2, C_2 — точки, симметричные точке B_1 относительно прямых BC, AB соответственно. Докажите, что прямые A_1A_2, C_1C_2 пересекаются на медиане треугольника ABC.

   Решение. Пусть I — центр вписанной окружности, P — точка пересечения прямой A_1A_2 с медианой BB_0 (рис.8). Так как $\angle IA_1P = \angle IA_1B_1 = \angle C/2 = \angle PBA_1/2$, то $\angle BA_1P = \angle BPA_1$, т.е. $BP = BA_1$. Так как $BA_1 = BC_1$, прямая C_1C_2 тоже проходит через P.

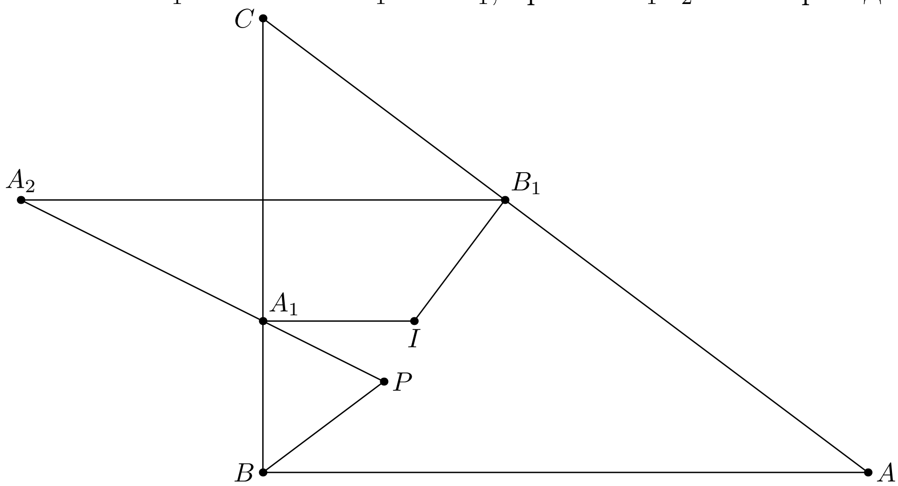

Рис. 8

9. (Д.Швецов) (8–9) Точка H – ортоцентр треугольника ABC. Касательные, проведённые к описанным окружностям треугольников CHB и AHB в точке H, пересекают прямую AC в точках A_1 и C_1 соответственно. Докажите, что $A_1H = C_1H$.

   Решение. Из условия следует, что $\angle AHC_1 = \angle ABH$. Значит, $\angle C_1HB' = \angle AHB' - \angle ABH = \angle HAB = \pi/2 - \angle ABC$ (B' — основание высоты). Аналогично $\angle B'HA_1 = \pi/2 - \angle ABC$, т.е. треугольник A_1HC_1 — равнобедренный.

10. (М.Волчкевич) (8–9) В трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. На боковой стороне CD выбрана точка M, а на основаниях BC и AD — точки P и Q так, что отрезки MP и MQ параллельны диагоналям трапеции. Докажите, что прямая PQ проходит через точку O.

    Решение. По теореме Фалеса $AQ/QD = AM/MB = CP/PB$. Значит, $AQ/PC = AD/BC = AO/CO$. Следовательно, треугольники AOQ и COP подобны и $\angle AOQ = \angle COP$.

11. (Д.Швецов) (8–10) Вневписанная окружность прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90^\circ$) касается стороны BC в точке A_1, а прямой AC в точке A_2. Прямая A_1A_2 пересекает (первый раз) окружность, вписанную в треугольник ABC в точке A'; аналогично определяется точка C'. Докажите, что $AC||A'C'$.

    Решение. Проведем через центр вписанной окружности I диаметр PQ, параллельный AC (рис.11). Так как $\angle PIC = \angle ACI = \angle BCI$ и $CA_1 = (AB + BC - AC)/2 = r = IP$, четырехугольник IPA_1C является равнобедренной трапецией. Значит, прямая A_1P параллельна IC, т.е. совпадает с A_1A_2. Соответственно, P совпадает с A', и, аналогично, Q совпадает с C'.

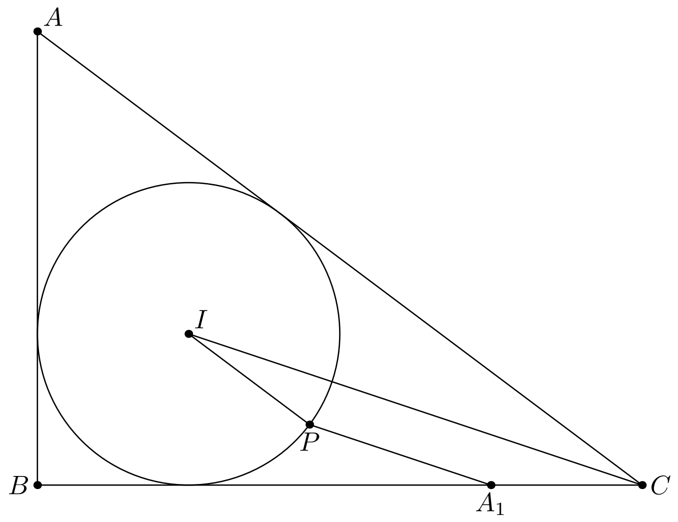

Рис.11

Критерии. Не объяснено, почему $IA'A_1A$ — параллелограмм, а не равнобедренная трапеция — 6 баллов.

12. (В.Ясинский) (8–10) Пусть AP и BQ — высоты данного остроугольного треугольника ABC. Постройте циркулем и линейкой на стороне AB такую точку M, чтобы $\angle AQM = \angle BPM$.

Решение. Так как точки P, Q лежат на окружности с диаметром AB, $\angle BPQ = 180° - \angle A$. Значит, $\angle MPQ = \angle BPQ - \angle BPM = 180° - \angle A - \angle AQM = \angle AMQ$. Следовательно, окружность, проходящая через точки P, Q, M, касается прямой AB (рис.12).

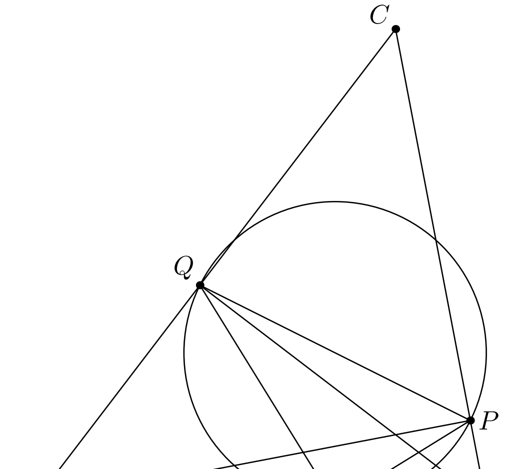

Рис.12

13. (Б.Френкин) а) (8–10) Найдите геометрическое место центров тяжести треугольников, вершины которых лежат на сторонах данного треугольника (по одной вершине внутри каждой стороны).

б) (11) Найдите геометрическое место центров тяжести тетраэдров, вершины которых лежат на гранях данного тетраэдра (по одной вершине внутри каждой грани).

Решение. а) Пусть точки A', B', C' лежат на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC. Так как середина C_0 отрезка $A'B'$ лежит внутри треугольника ABC, расстояние от нее до стороны AB меньше опущенной на эту сторону высоты треугольника. Поскольку центр тяжести M треугольника $A'B'C'$ делит отрезок $C'C_0$ в отношении $2:1$, то расстояние от M до AB меньше, чем $2/3$ этой высоты. Аналогично получаем, что расстояния от M до двух других сторон меньше, чем $2/3$ соответствующих высот, т.е. M лежит внутри шестиугольника, образованного сторонами данного треугольника и прямыми, симметричными им относительно точки пересечения его медиан. При этом, две вершины треугольника $A'B'C'$ приближаются к одной вершине треугольника ABC, то центр тяжести приближается к границе указанного шестиугольника, так что все его внутренние точки принадлежат искомому ГМТ.

б) Рассуждая аналогично п.а), получаем, что искомое ГМТ является телом, ограниченным гранями данного тетраэдра и параллельными им плоскостями, каждая из которых делит соответствующую высоту в отношении $1:3$, считая от вершины. Четыре из восьми граней этого тела являются треугольниками, а остальные — шестиугольниками.

Критерии. Ответ без объяснений — 1 балл.

Нестрогое рассуждение с стремлением двух точек к вершине — 4 балла.

Путаница с границей — 6 баллов.

14. (Б.Френкин) (9) В треугольнике ABC высота и медиана из вершины A образуют (вместе с прямой BC) треугольник, в котором биссектриса угла A является медианой, а высота и медиана из вершины B образуют (вместе с прямой AC) треугольник, в котором биссектриса угла B является биссектрисой. Найдите отношение сторон треугольника ABC.

    Ответ. $1 : 2\sqrt{2} : 3$.

    Решение. Так как биссектриса угла B делит пополам угол между высотой и медианой, то угол B — прямой. Значит, высота из вершины A совпадает со стороной AB, т.е. биссектриса угла A делит сторону BC в отношении $1:3$. Следовательно, отношение $AB:AC$ тоже равно $1:3$ и по теореме Пифагора $BC:AB = 2\sqrt{2}$.

    Критерии. Показано, что треугольник прямоугольный — 2 балла.

    Наряду с правильным ответом указаны равнобедренные треугольники — не снижать.

15. (В.Протасов) (9–10) Дана окружность с центром O и радиусом 1. Из точки A к ней проведены касательные AB и AC. Точка M, лежащая на окружности, такова, что четырехугольники $OBMC$ и $ABMC$ имеют равные площади. Найдите MA.

    Решение. Так как $S_{OBMC} - S_{ABMC} = S_{ABC} - S_{OBC} + 2S_{MBC}$, геометрическим местом точек, для которых $S_{OMBC} = S_{AMBC}$, является серединный перпендикуляр к отрезку OA. Поэтому $AM = OM = 1$.

16. (П.Долгирев) (9–10) Дан треугольник ABC и прямая l. Прямые, симметричные l относительно AB и AC пересекаются в точке A_1. Точки B_1, C_1 определяются аналогично. Докажите, что

    а) прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке;

    б) эта точка лежит на описанной около треугольника ABC окружности;

    в) точки, построенные указанным способом для двух перпендикулярных прямых, диаметрально противоположны.

Решение. Прежде всего заметим, что, когда прямая l движется параллельно себе с постоянной скоростью, прямые, симметричные l относительно AC и BC, также перемещаются параллельно себе с постоянной скоростью. Поэтому точка C_1 движется по прямой, проходящей через C, т.е. точка пересечения CC_1 с описанной окружностью зависит только от направления прямой l. Пусть теперь A', B' — точки пересечения l с BC и AC (рис.16). Тогда $\angle C_1B'C = \angle CB'A'$, $\angle C'AC = \angle BA'C_1$. Значит, C — центр вписанной или вневписанной окружности треугольника $A'B'C_1$, т.е. C_1C — биссектриса угла $A'C_1B'$ или смежного с ним. Но угол между прямыми $A'C_1$ и $B'C_1$ не зависит от l, значит не зависит от l и угол между CC_1 и C_1A'. Поэтому при вращении l с постоянной скоростью прямые AA_1, BB_1, CC_1 вращаются с той же скоростью, откуда следуют все три утверждения задачи.

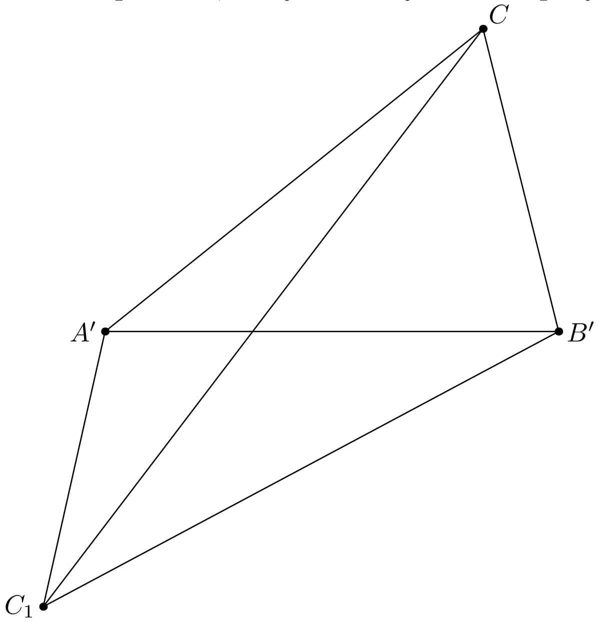

Рис.16

Критерии. Рассуждение в неориентированных углах, использующее конкретный чертеж, — 6 баллов (в каждом пункте).

17. (Б.Френкин) (9–11) а) Существует ли треугольник, в котором наименьшая медиана длиннее, чем наибольшая биссектриса?

б) Существует ли треугольник, в котором наименьшая биссектриса длиннее, чем наибольшая высота?

Решение. а) Нет. Пусть в треугольнике ABC длины сторон BC, AC, AB равны a, b, c соответственно, причём $a \leq b \leq c$. Далее, пусть CM — медиана, AL — биссектриса. Если угол C тупой или прямой, то $AL > AC$. Так как $BC \leq AC$, то $\angle CMA$ — тупой или прямой, поэтому $CM \leq AC$ и, значит, $AM < AL$.

Пусть теперь $\angle C$ острый. Так как сторона AB наибольшая, то $\angle C \geq 60^\circ$ и углы A, B острые. Тогда основание H высоты AH лежит на стороне BC, а не на её продолжении. Поэтому длина AH (а тогда и длина AL) не меньше, чем $AC\cos\, 60^\circ = b\sqrt{3}/2$. В то же время квадрат длины медианы CM равен $\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4} \leq \frac{2a^2+b^2}{4} \leq \frac{3b^2}{4}$. Поэтому длина CM не превосходит $b\sqrt{3}/2$ и, значит, не превосходит длины биссектрисы угла A.

б) Нет. Пусть опять $a \leq b \leq c$ и l — длина биссектрисы угла C. Тогда $(al + bl)\sin\frac{C}{2} = 2S_{ABC} = ab\sin C$, т.е. $l = \frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}$. С другой стороны, высота из вершины A равна $h =$

$b\sin C$. Так как $a+b\geq 2a$, а $C\geq 60^\circ$, $h/l=(a+b)\sin\frac{C}{2}/a\geq 1$.

Примечание. Нетрудно построить треугольник, в котором наименьшая медиана длиннее наибольшей высоты.

18. (А.Заславский) (9–11) На плоскости проведены n прямых общего положения, т.е. никакие две прямые не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Эти прямые разрезали плоскость на несколько частей. Какое

    а) наименьшее;

    б) наибольшее

    количество углов может быть среди этих частей?

    Решение. а) **Ответ.** 3. Рассмотрим выпуклую оболочку всех точек пересечения данных прямых. Две прямые, проходящие через вершину этой оболочки, делят плоскость на четыре угла, в одном из которых лежат все остальные тоски пересечения. Соответственно, угол, вертикальный этому, не пересекается остальными прямыми, так что количество углов не может быть меньше трех. Пример с тремя углами легко строится по индукции: очередную прямую надо проводить так, чтобы она пересекала все предыдущие внутри треугольника, являющегося выпуклой оболочкой точек пересечения.

    б) **Ответ.** n при нечетном n, $n-1$ при четном, большем 2. Построим окружность, внутри которой лежат все точки пересечения. Данные прямые разбивают ее на $2n$ дуг. Пусть AB, BC — две соседние дуги, X, Y — точки пересечения прямой, проходящей через B, с прямыми, проходящими через A и C. Тогда, если X лежит на отрезке BY, то часть плоскости, содержащая дугу BC, не является углом, т.е. из двух частей, содержащих соседние дуги, углом может быть только одна. Следовательно, количество углов не превосходит n, причем равенство возможно только тогда, когда углом является часть, содержащая каждую вторую дугу. Но при четном n это означает, что есть два угла, содержащие противоположные дуги, т.е. образованные одной и той же парой прямых. При $n>2$ это, очевидно, невозможно. При нечетном n прямые, содержащие стороны правильного n-угольника, разбивают плоскость на части, из которых n являются углами. Очевидно, что можно добавить к ним еще одну прямую так, чтобы количество углов не уменьшилось.

    Второе решение п.а) (А.Гончарук, Харьков) Рассмотрим многоугольник T, являющийся объединением всех ограниченных частей. Ясно, что все углы являются вертикальными к углам T, меньшим 180°. Из формулы для суммы углов сразу следует, что таких углов не меньше трех. Многоугольник с тремя углами можно построить следующим образом. Возьмем точку D внутри треугольника ABC, впишем в угол ADB окружность достаточно малого радиуса, возьмем на меньшей из ее дуг, образованных точками касания $n-4$ точки и проведем касательные в этих точках. Эти касательные вместе с прямыми AC, BC, AD, BD образуют искомый многоугольник.

    Критерии. Только ответ — 1 балл.

    Только оценка или только пример — 3 балла.

19. (А.Заславский) (9–11) Существует ли неравнобедренный треугольник, у которого медиана, проведенная из одной вершины, биссектриса, проведенная из другой, и высота, проведенная из третьей, равны?

    Решение. Да. Зафиксируем вершины A, B, построим точку D, симметричную A относительно B, и возьмем произвольную точку C такую, что $\angle BCD=150^\circ$. Тогда высота треугольника ABC из вершины A равна расстоянию DH от D до прямой BC, т.е. половине CD. С другой стороны, медиана BM из вершины B является средней линией в треугольнике ACD, т.е. тоже равна половине CD (рис.19). Будем теперь двигать точку C по дуге BD, вмещающей угол $150°$. Когда C стремится к B, биссектриса угла C стремится к нулю, а медиана из B — к $AB/2$. Когда C стремится к D, медиана из B стремится к нулю, а биссектриса не меньше, чем BC. Значит, существует положение точки C, при котором биссектриса равна двум другим отрезкам.

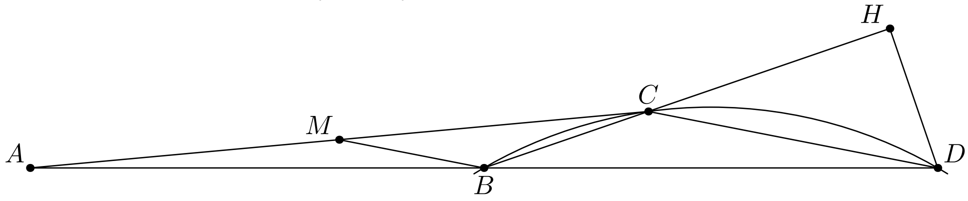

Рис.19

Примечание. Нетрудно видеть, что при движении C от B к D биссектриса возрастает, а высота и медиана убывают. Следовательно, углы искомого треугольника определяются однозначно.

20. (Н.Белухов, А.Заславский) (9–11) Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I. Точки M и N — середины диагоналей AC и BD. Докажите, что $ABCD$ вписанный тогда и только тогда, когда $IM : AC = IN : BD$.

Решение. Будем считать, что $ABCD$ не является трапецией. Противный случай требует лишь незначительных изменений решения.

По теореме Ньютона I лежит на MN. Пусть $\lambda = MI : IN$. Возьмем на сторонах четырехугольника точки P, Q, R и S такие, что $AP : PB = CQ : QB = CR : RD = DS : SA = \lambda$. Покажем, что I — середина отрезков PR и QS.

Это можно сделать, например, методом масс: поместим единичные массы в точки A и C, а массы λ в B и D. Две первые массы можно заменить массой 2 в точке M, две вторые — массой 2λ в точке N, следовательно, I — центр всех четырех масс . С другой стороны, можно заменить массы в A и B на массу $1 + \lambda$ в точке P, а две оставшихся на такую же массу в точке R.

Теперь, так как I — середина PR, а прямые AB и CD — не параллельные касательные к окружности с центром I, то они образуют равные углы с PR, т.е. PR параллельна биссектрисе одного из образованных этими прямыми углов. Аналогично, QS параллельна биссектрисе одного из углов между AD и BC. Следовательно, $ABCD$ вписанный тогда и только тогда, когда $PR \perp QS$. Так как $PQRS$ — параллелограмм (со сторонами, параллельными AC и BD), это равносильно тому, что $PQRS$ — ромб. Но $PQ = QR \Leftrightarrow \frac{1}{1+\lambda}AC = \frac{\lambda}{1+\lambda}BD \Leftrightarrow \lambda = AC : BD$, ч.т.д.

Критерии. Доказано только в одну сторону — 3 балла.

21. (В.Ясинский) (10–11) На окружности с диаметром AC выбрана произвольная точка B, отличная от A и C. Пусть M, N — середины хорд AB, BC, а P, Q — середины меньших дуг, стягиваемых этими хордами. Прямые AQ и BC пересекаются в точке K, а прямые CP и AB — в точке L. Докажите, что прямые MQ, NP и KL пересекаются в одной точке.

Решение. Прямые PM и QN пересекаются в центре окружности O. Поэтому утверждение задачи следует из теоремы Дезарга, примененной к треугольникам PML и NQK.

22. (Г.Фельдман) (10–11) Из вершины C треугольника ABC проведены касательные CX, CY к окружности, проходящей через середины сторон треугольника. Докажите, что прямые XY, AB и касательная в точке C к окружности, описанной около треугольника ABC, пересекаются в одной точке.

Решение. При гомотетии с центром C и коэффициентом $1/2$ прямая XY перейдет в радикальную ось точки C и окружности, проходящей через середины A', B', C' сторон BC, CA, AB. С другой стороны, касательная в точке C к описанной окружности касается также окружности $A'B'C'$, т.е. является радикальной осью этой окружности и точки C. Следовательно, точка пересечения этих радикальных осей лежит на прямой $A'B'$. Сделав обратную гомотетию, получим утверждение задачи.

23. (Н.Белухов, М.Маринов, Болгария) (10–11) Дан треугольник ABC и прямая l, пересекающая BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Точка A' — середина отрезка, соединяющего проекции A_1 на AB и AC. Аналогично определяются точки B' и C'.

а) Докажите, что A', B' и C' лежат на некоторой прямой l'.

б) Докажите, что, если l проходит через центр описанной окружности $\triangle ABC$, то l' проходит через центр его окружности девяти точек.

Решение. Пусть P_a, P_b, P_c — середины высот AH_a, BH_b, CH_c. Очевидно, что точки A', B', C' лежат на сторонах треугольника $P_aP_bP_c$ и делят их в тех же отношениях, в каких точки A_1, B_1, C_1 делят стороны треугольника ABC. Поэтому п.а) сразу следует из теоремы Менелая. Кроме того, если l проходит через некоторую фиксированную точку, то l' также проходит через некоторую фиксированную точку, так что для доказательства п.б) достаточно проверить его для каких-то двух прямых, проходящих через центр O описанной окружности. Например, для прямых, проходящих через какую-нибудь вершину треугольника.

Пусть C_1 — точка пересечения CO и AB; X, Y — проекции C_1 на AC и BC; A_0, B_0, C_0 — середины BC, CA, AB, U, V середины XY и A_0B_0, Q — точка пересечения серединного перпендикуляра к A_0B_0 с UP_c (рис.23). Так как $XY \parallel AB$, точки C, V, U лежат на одной прямой. Значит, $VQ/CP_c = UV/UC = C_1O/CC_1$, т.е. $VQ = OC_0/2$ и Q — центр окружности $A_0B_0C_0$.

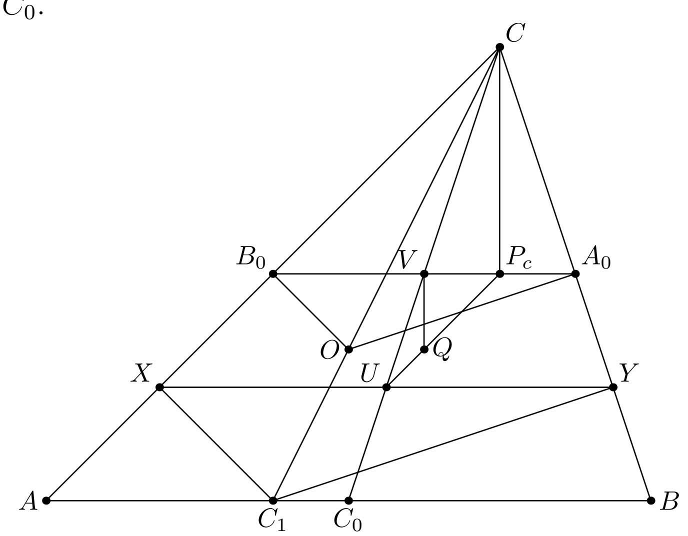

Рис.23

24. (А.Заславский) (10–11) Дан остроугольный треугольник ABC. Найдите на сторонах BC, CA, AB такие точки A', B', C', чтобы наибольшая сторона треугольника $A'B'C'$ была минимальна.

Решение. Докажем сначала, что искомый треугольник — педальный, т.е. перпендикуляры, восставленные из его вершин к соответствующим сторонам ABC, пересекаются в одной точке. Действительно, для произвольного треугольника $A'B'C'$ окружности $AB'C'$, $BC'A'$ и $CA'B'$ пересекаются в некоторой точке P. Пусть A'', B'', C'' — проекции P на BC, CA, AB. Так как $\angle A'PB' = \angle A''PB'' = \pi - \angle C$ и т.д., то $\angle A''PA' = \angle B''PB' = \angle C''PC'$, и, значит, треугольник $A''B''C''$ получается из $A'B'C'$ поворотной гомотетией с коэффициентом, меньшим 1.

Рассмотрим теперь точку T, педальный треугольник которой правильный, и докажем, что педальный треугольник любой другой точки P имеет хотя бы одну сторону большей длины. Пусть A', B' — проекции P на BC и AC. Тогда $A'B' = PC\sin C$, т.е. $A'B'$ не превосходит стороны педального треугольника T тогда и только тогда, когда $PC \leq TC$. Аналогично должны выполняться неравенства $PB \leq TB$, $PA \leq TA$. Очевидно, что три эти неравенства выполнены только для точки T.

Осталось описать построение точки T. Из ее определения следует, что $TA \cdot BC = TB \cdot AC = TC \cdot AB$. Геометрическим местом точек, удовлетворяющих первому равенству является окружность Аполлония, проходящая через C и основания внешней и внутренней биссектрис угла C. Аналогично строится окружность — геометрическое место точек, удовлетворяющих второму равенству. Точка T будет общей точкой этих окружностей, лежащей внутри треугольника ABC.

Критерии. Указано только, что вписанный треугольник равносторонний — 2 балла.

25. (Н.Белухов, Болгария) (10–11) Три равных правильных тетраэдра имеют общий центр. Могут ли все грани многогранника, являющегося их пересечением, быть равны?

Решение. Да. Пусть A, B, C, D — точки касания правильного тетраэдра с вписанной сферой. Повернув их на $120°$ относительно общего перпендикуляра к отрезкам AB и CD, получим точки A', B', C', D', а повернув на $240°$, — точки A'', B'', C'', D''. Плоскости, касающиеся сферы в этих двенадцати точках, образуют три искомых тетраэдра.

Действительно, для любых двух из этих точек существует движение, переводящее все множество из двенадцати точек в себя, а одну из выбранных точек в другую. Такими движениями можно перевести любую грань полученного многогранника в любую другую.