10 класс
2010/11 уч. год
Геометрические неравенства

Сегодня вы займетесь доказательством некоторых геометрических неравенств. Простые неравенства у нас возникали на уроках как следствие неравенства треугольника, соотношений между сторонами и углами треугольника или некоторых формул. Например, из формулы для вычисления биссектрисы треугольника $l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{1}{2}\angle A$ следует неравенство $l_a < \frac{2bc}{b+c}$, из формулы $S = \frac{1}{2}ab\sin\angle C$ – неравенство $S \le \frac{1}{2}ab$. Из этих неравенств, привлекая алгебраические неравенства о средних, можно, в свою очередь, получать новые неравенства, например, $l_a < \sqrt{bc}$ или $S \le \frac{a^2+b^2}{4}$, а из полученных неравенств – новые, и так далее.

Для доказательства многих других геометрических неравенств полезно знать другие соотношения, а также уметь из одного неравенства получать другое.

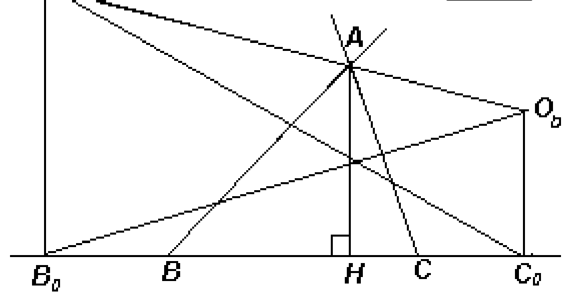
Сегодня мы рассмотрим несколько соотношений между элементами треугольника, а затем вы докажете неравенства, которые из них следуют.

Пример 1. Докажите, что в любом треугольнике $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$.

Доказательство. $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \Leftrightarrow \frac{2S}{h_a} = \frac{S}{r_b} + \frac{S}{r_c} \Leftrightarrow$ *a* = *p* – *b* + *p* – *c* ⇔ 2*p* = *a* + *b* + *c*.

Каковы а) алгебраическая; б) геометрическая интерпретации доказанного равенства?

Рис. 1

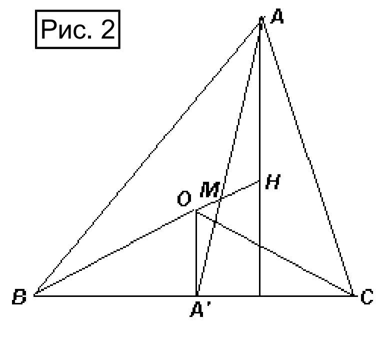


[а) $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \Leftrightarrow h_a = \frac{2r_br_c}{r_b + r_c}$, то есть, высота треугольника, проведенная к одной из сторон, является средним гармоническим радиусов вневписанных окружностей, касающихся двух других сторон треугольника; б) пусть в треугольнике *ABC*: O_b и O_c – центры вневписанных окружностей, касающихся сторон *AC* и *AB* соответственно, B_0 и C_0 – точки касания этих окружностей с прямой *BC*. Тогда прямые O_bB_0 и O_cC_0 пересекаются на середине высоты *AH* этого треугольника (см. рис. 1)]

Доказанное соотношение позволяет доказать ряд неравенств (см. задачи 1 – 4 для самостоятельного решения).

Пример 2. Докажите, что в треугольнике *ABC* $\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$, где *O* и *H* – центр его описанной окружности и ортоцентр соответственно.

Рис. 2



<u>Доказательство</u>. Пусть AA' – медиана треугольника, M – его центр тяжести (см. рис. 2). Тогда из теоремы о прямой Эйлера следует, что $\overline{OA'} = -\frac{1}{2}\overline{HA}$. Так как $\overline{OA'} = \frac{1}{2}\left(\overline{OB} + \overline{OC}\right)$, $\overline{HA} = \overline{OA} - \overline{OH}$, то $\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$, что и требовалось.

<u>Пример 3</u>. На стороне AB треугольника ABC построен равносторонний треугольник ABD (точки C и D – в одной полуплоскости относительно прямой AB). Докажите, что $CD^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - 2S\sqrt{3}$, где a, b и c – стороны треугольника, S – его площадь.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\angle CAB = \alpha$, тогда $\angle CAD = 60° - \alpha$ (см. рис. 3). Из треугольника ADC: $CD^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(60° - \alpha) = b^2 + c^2 - bc\cos\alpha - bc\sqrt{3}\sin\alpha$. Учитывая, что $bc\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$, $bc\sin\alpha = 2S$, получим требуемое равенство.

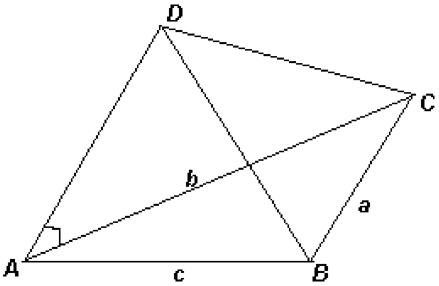


Рис. 3

Соотношения, полученные в примерах 2 и 3 помогут вам доказать еще одно вспомогательное тождество и остальные неравенства (см. задачи 5 – 8 для самостоятельного решения).

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что: а) $h_a \le \sqrt{r_b r_c}$; б) в любом треугольнике сумма радиусов вневписанных окружностей не меньше, чем сумма его высот. В каких случаях достигается равенство?

2. Докажите, что $\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{a+c-b} + \frac{1}{a+b-c} \ge \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, где a, b è c – стороны некоторого треугольника. В каких случаях достигается равенство?

3. Докажите, что $\frac{1}{r} < \frac{2}{h_a} + \frac{2}{h_b} < \frac{2}{r}$, где r – радиус окружности, вписанной в треугольник.

4. Докажите, что $\frac{r_a}{h_a} + \frac{r_b}{h_b} + \frac{r_c}{h_c} \ge 3$. В каких случаях достигается равенство?

5. Докажите, что в любом треугольнике выполняется равенство: $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$, где a, b è c – стороны треугольника, O и H – центр его описанной окружности и ортоцентр соответственно.

6. Докажите, что для любого треугольника выполняются неравенства: а) $4S\sqrt{3} \le a^2 + b^2 + c^2 \le 9R^2$; б) $a + b + c \le 3R\sqrt{3}$. В каких случаях достигаются равенства?

7. Докажите, что для любого треугольника ABC выполняются неравенства:

а) $abc \le 3R^3\sqrt{3}$; б) $\sin A \times \sin B \times \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$. В каких случаях достигаются равенства?

8. Докажите, что для любого треугольника выполняется неравенство $3r^2\sqrt{3} \le S \le \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. В каких случаях достигаются равенства?