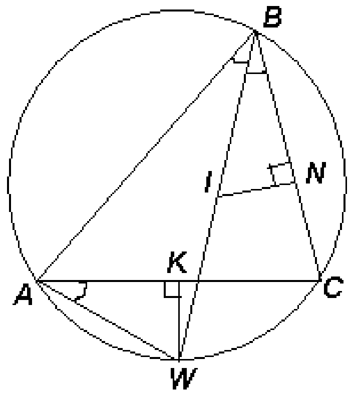
10 класс
2010/11 уч.год
Разностные треугольники

<u>Определение</u>. Треугольник, стороны которого составляют арифметическую прогрессию, называется ***разностным***.

Такие треугольники обладают рядом интересных свойств, которые мы и рассмотрим. Пусть в треугольнике *ABC*: $b=\frac{a+c}{2}$ (a < b < c), I – центр вписанной окружности, W – точка пересечения луча BI и окружности, описанной около треугольника *ABC* (см. рис. 1). Тогда: 1) $BI = IW$; 2) $r = \frac{1}{3}h_b$.



<u>Доказательство</u>. 1) Опустим из точки I перпендикуляр IN на сторону BC, а из точки W – перпендикуляр WK на сторону AC. Так как N — точка касания стороны треугольника и вписанной окружности, то $BN = p - b = \frac{1}{2}b = AK$. Кроме того, $\angle CBW = \angle CAW$. Тогда $\Delta BIN = \Delta AWK$ (по катету и острому углу), следовательно, $BI = AW$. По теореме «трилистника» $WA = WI$, то есть $BI = IW$; что и требовалось.

2) $r=\frac{S}{p}=\frac{bh_b}{a+b+c}=\frac{bh_b}{3b}=\frac{1}{3}h_b$

Рис. 1

Являются ли доказанные утверждения признаками ***разностного*** треугольника?

[**Да**; 1) равенство прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу;

2) $b=\frac{2S}{h_b}=\frac{(a+b+c)r}{h_b}=\frac{a+b+c}{3} \Leftrightarrow b=\frac{a+c}{2}$]

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что треугольник *ABC* является разностным т. и т. т., когда:

а) прямая IM, где M – центр тяжести треугольника, параллельна стороне AC;

б) сторона AC пересекает отрезок IW в его середине;

в) середина стороны и основание высоты, проведенной к этой стороне, симметричны относительно точки касания этой же стороны и вписанной окружности;

г) высота треугольника равна радиусу вневписанной окружности, касающейся той стороны, к которой проведена высота;

д) точка касания вневписанной окружности со стороной треугольника и основание высоты, проведенной к этой стороне, симметричны относительно основания биссектрисы, проведенной к этой же стороне.

2. Среди прямоугольных треугольников укажите все, являющиеся разностными, и докажите, что разностью арифметической прогрессии (a; b; c) является радиус r вписанной в этот треугольник окружности.

3. Докажите, что в разностном треугольнике *ABC*:

а) вершина B, центры O и I описанной и вписанной окружностей и середины сторон AB и BC лежат на одной окружности;

б) прямая IM, где M – центр тяжести треугольника, является касательной к этой окружности.

4. В египетском треугольнике *ABC* (угол *C* – прямой, *BC* – меньший катет) найдите угол *BOI* (точки *O* и *I* – центры описанной и вписанной окружностей соответственно).
5. Докажите, что в разностном треугольнике *ABC* центр *I* вписанной окружности является центром окружности, описанном около треугольника *A*'*LC*', где *L* – основание биссектрисы, проведенной из вершины *B*, *A*' и *C*' – середины сторон *BC* и *AB* соответственно.
6. В разностном треугольнике *ABC* продолжение биссектрисы *BL* пересекает описанную окружность в точке *W*, *T* – основание перпендикуляра, опущенного из точки *W* на сторону *AB*. Докажите, что: а) $BT = AC$; б) $AL = \frac{1}{2}AB$.