**11 класс**
**2011/12 уч. год**
**Теорема Брианшона, ее связь с теоремой Паскаля.**
**Вырожденные случаи теорем Паскаля и Брианшона.**

Рассмотрим еще одну теорему, лежащую на стыке евклидовой и проективной геометрий, которая называется ***теоремой Брианшона***.

Теорема. В описанном шестиугольнике три главные диагонали пересекаются в одной точке.

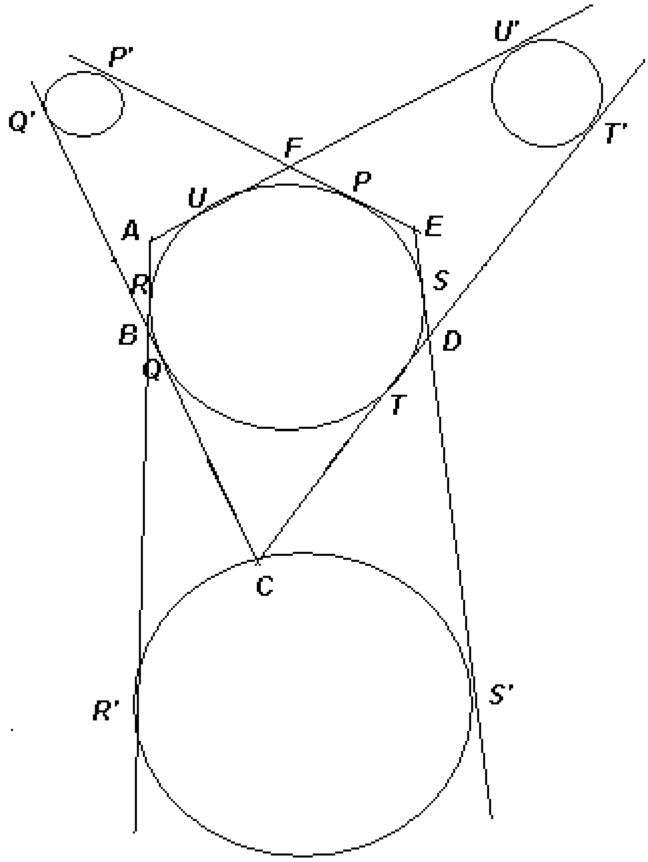


Рис. 1

Доказательство. Пусть шестиугольник *ABCDEF* описан около окружности. Обозначим точки касания через *R*, *Q*, *T*, *S*, *P* и *U* (см. рис. 1). Выберем произвольное положительное число *a* и построим на прямых *BC* и *EF* точки *Q*' и *P*' соответственно так, чтобы |*PP*'| = |*QQ*'| = *a* и построенные точки лежали в одной полуплоскости относительно (*PQ*). Затем построим окружность $\omega_1$, касающуюся выбранных прямых в точках *Q*' и *P*'. Аналогичным образом построим еще две пары точек: *R*' и *S*'; *T* и *U*' (на расстоянии *a* от точек *R* и *S*; *T*' и *U*) и две соответствующие им окружности $\omega_2$ и $\omega_3$.

Докажем, что (*BE*) является радикальной осью окружностей $\omega_1$ и $\omega_2$. Действительно, |*BQ*'| = |*QQ*'| – |*BQ*| = |*RR*'| – |*BR*| = |*BR*'| и |*EP*'| = |*EP*| + |*PP*'| = |*ES*| + |*SS*'| = |*ES*'|. Аналогично доказывается, что (*CF*) – радикальная ось окружностей $\omega_1$ и $\omega_3$, а (*AD*) – радикальная ось $\omega_2$ и $\omega_3$. Поскольку радикальные оси трех окружностей пересекаются в одной точке (если центры этих окружностей не лежат на одной прямой), то (*AD*), (*BE*) и (*CF*) пересекаются в одной точке (***конкурентны***).

Теорема Брианшона справедлива не только для окружности, но и для любого конического сечения. Справедлива и теорема, ей обратная, которая уже целиком относится к проективной геометрии: ***если три диагонали шестиугольника пересекаются в одной точке, то его стороны касаются некоторого конического сечения***.

Вспомним теперь ***принцип двойственности в геометрии***, который вытекает из ***полярного соответствия относительно окружности с центром О***. Напомню, что полярное соответствие является взаимно однозначным отображением плоскости с выколотой точкой *O* на себя, то есть каждой точке, кроме *O*, соответствует прямая (ее поляра), а каждой прямой, не проходящей через точку *O* – точка (ее полюс). Взаимная однозначность этого соответствия следует из закона взаимности: если поляра точки *A* проходит через точку *B*, то поляра точки *B* проходит через точку *A*.

Сам принцип двойственности состоит в следующем: ***для любой конфигурации из точек и прямых, в которой определенные точки лежат на определенных прямых, существует двойственная ей конфигурация из прямых и точек, в которой определенные прямые проходят через определенные точки***.

Таким образом, для любого утверждения, связанного с такой конфигурацией, существует ему двойственное, получаемое автоматической заменой слов:

| | |
|---|---|
| точка | прямая |
| полюс | поляра |
| лежит на | проходит через |
| коллинеарные точки | конкурентные прямые |
| трех вершинник (треугольник) | трех сторонник (треугольник) |
| точка окружности | касательная к окружности в этой точке |
| .... | ... |

При этом одно из утверждений верно т. и т. т., когда верно другое. Классический пример двойственных теорем: Менелая и Чевы. Действительно, в теореме Менелая утверждается, что три точки лежащие на сторонах треугольника коллинеарны т. и т. т., когда выполняется некоторое равенство, а в теореме Чевы – что три прямые, проходящие через вершины треугольника, конкурентны т. и т. т., когда выполняется аналогичное равенство.

А вот, казалось бы, контрпример: через любые две различные точки проходит единственная прямая. Постройте двойственное утверждение [Любые две различные прямые пересекаются в одной точке]. Понятно, что это не так. Почему?

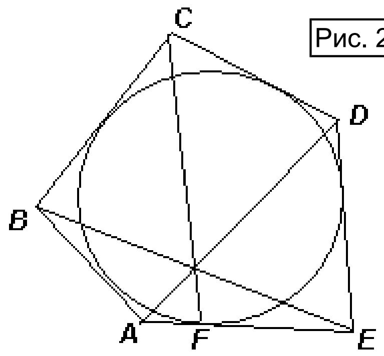
Если мы хотим задействовать параллельные прямые, то должны рассматривать проективную плоскость, на которой они пересекаются в бесконечно удаленной точке. При этом, на проективной плоскости полярой точки *O* является бесконечно удаленная прямая, а полюсом прямых, проходящих через точку *O*, являются точки этой прямой. Тем самым обеспечивается взаимная однозначность полярного соответствия и на проективной плоскости.

***Теоремы Паскаля и Брианшона являются проективно двойственными***, то есть, если в теореме Паскаля заменить точки, лежащие на окружности, на прямые, касающиеся окружности, то коллинеарность точек пересечения трех пар прямых заменяется конкурентностью трех прямых, проходящих через три пары точек. Условно это можно выразить в таблице:

| Теорема Паскаля | Теорема Брианшона |
|---|---|
| $\{A, B, C, D, E, F\} \subset \omega$ | $a, b, c, d, e, f$ – касательные к $\omega$ |
| **Три точки**: (*AB*) I (*DE*), (*BC*) I (*EF*) è (*CD*) I (*FA*) **лежат на одной прямой** | **Три прямые**: *a* I *b* – *d* I *e*, *b* I *c* – *e* I *f* и *c* I *d* – *f* I *a* **проходят через одну точку** |

И последнее. Из теорем Паскаля и Брианшона можно получать верные утверждения для пятиугольников, четырехугольников и треугольников, если рассматривать их как вырожденные шестиугольники.

Рис. 2а




<u>Пример 1</u>. Пусть в теореме Брианшона совпали две стороны описанного шестиугольника *ABCDEF*: (*EF*) и (*FA*). Это означает, что точка *F* становится точкой касания окружности и

(*EA*) (см. рис. 2а). Конкурентность (*AD*), (*BE*) и (*CF*) означает, что ***прямые, соединяющие концы не соседних сторон описанного пятиугольника и прямая, проходящая через пятую вершину и точку касания противолежащей стороны с окружностью, пересекаются в одной точке***.

<u>Пример 2</u>. Пусть в теореме Паскаля совпали две пары вершин вписанного шестиугольника *ABCDEF*: *F* и *A*; *C* и *D* (см. рис. 2б). Тогда, ***во вписанном четырехугольнике ABCE точки M и P попарного пересечения противолежащих сторон и точка N пересечения касательных, проведенных в вершинах A и C, лежат на одной прямой***.

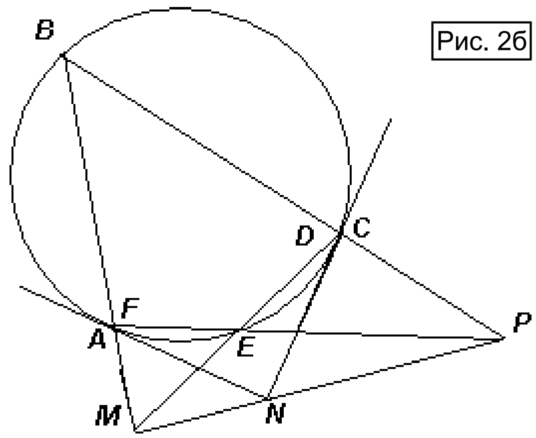


Рис. 2б

Какая еще точка лежит на этой же прямой? [Точка пересечения касательных, проведенных в вершинах *B* и *E* (*изобразить*)]

### Задачи для самостоятельного решения

**1.** Объясните, как получить следствия теорем Брианшона и Паскаля для треугольников, и сформулируйте эти утверждения.

**2.** Четырехугольник *ABCD* – описанный, *E*, *F*, *P* и *Q* – точки касания .вписанной окружности со сторонами *AB*, *BC*, *CD* и *DA* соответственно. Докажите, что: а) точки пересечения (*AF*) и (*CE*), (*AP*) и (*CQ*) лежат на (*BD*); б) диагонали четырехугольников *ABCD* и *EFPQ* пересекаются в одной и той же точке.

**3.** а) Объясните, как получить следствие теоремы Паскаля для пятиугольника, и сформулируйте это утверждение.

б) Объясните, как построить касательную к окружности в данной ее точке, пользуясь только линейкой.

**4.** В шестиугольнике *ABCDEF*: $|AB| = |BC|$ , $|CD| = |DE|$, $|EF| = |FA|$ и $\angle A = \angle C = \angle E$.
Докажите, что главные диагонали шестиугольника пересекаются в одной точке.