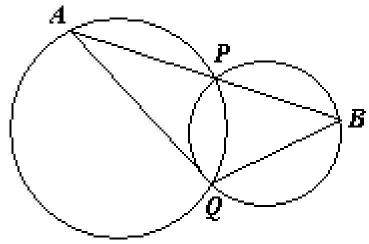
8 класс
2008/09 уч. год
Две пересекающиеся окружности.

Вспомним основные теоремы, которые потребуются на этом занятии (*чертежи на доске*):
1) теорему о вписанном угле и ее следствие;
2) теорему об угле между касательной и хордой;
3) Н. и Д. условие того, чтобы четырехугольник был вписанным в окружность и два утверждения, ему равносильных;
4) ГМТ, из которых данный отрезок виден под заданным углом.

Базовая задача. Две окружности пересекаются в точках P и Q (*см. рисунок*). Через точку P проведена секущая, которая пересекает окружности в точках A и B. Докажите, что величина угла AQB не зависит от выбора секущей.



Решение. Из треугольника AQB: $\angle AQB = 180° - (\angle PAQ + \angle PBQ)$. Величины углов PAQ и PBQ не зависят от положения точек A и B соответственно, так как каждый этих углов вписан в окружность и опирается на дугу PQ этой окружности. Следовательно, величина угла AQB не зависит от выбора секущей.

Задачи для самостоятельного решения

1. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через точку P проведена секущая, которая пересекает окружности в точках A и B, а через точку Q – секущая, которая пересекает окружности в точках C и D соответственно. Докажите, что:
а) $\angle AQB = \angle$ *ÑPD*;
б) $(AC) \parallel (BD)$;
в) $|AC| = |BD|$ тогда и только тогда, когда $(AB) \parallel (CD)$.

2. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена секущая, которая пересекает окружности в точках C и D. Через точки C и D проведены касательные к окружностям, которые пересекаются в точке E. Докажите, что:
а) четырехугольник $BCED$ – вписанный;
б) величина угла CED не зависит от выбора секущей.

3. На хорде AB окружности с центром O взята произвольная точка C. Через точки A, O и C проведена окружность, которая пересекает данную окружность в точке D. Докажите, что треугольник BCD – равнобедренный.

4. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Прямая пересекает эти окружности последовательно в точках A, B, C и D. Докажите, что $\angle APB = \angle CQD$.

5. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через точку P проведена секущая, которая пересекает окружности в точках A и B. Найдите геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольника AQB.

6. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через произвольную точку X первой окружности проведена прямая XA, которая пересекает вторую окружность в точке Y и прямая XB, которая пересекает вторую окружность в точке Z.
А) Докажите, что прямая YZ перпендикулярна диаметру первой окружности, проведенному через точку X.
Б) Докажите, что высоты всех таких треугольников XYZ, проведенные из точки X, пересекаются в одной точке.

В) Докажите, что биссектрисы всех таких треугольников XYZ, проведенные из точки X, пересекаются в одной точке.