9 класс
2009/10 уч. год
Композиция движений. Теорема Шаля.

Сегодня мы рассмотрим общие вопросы, связанные с композициями движений на плоскости, классификациями движений и их применением к решению задач.

I. 1) Что такое движение на плоскости? Перечислите элементарные движения на плоскости. Какие из них являются обратными к самим себе (являются **инволюциями**)?

[Параллельный перенос, ***осевая симметрия***, поворот (***центральная симметрия*** – частный случай поворота), ***тождественное отображение*** (частный случай параллельного переноса или поворота) – *записать в виде обозначений*]

2) Что такое композиция движений? Какая композиция движений не представима в виде элементарного? [Скользящая симметрия – *изобразить и записать*]

3) Что представляют собой следующие композиции движений (*рисунки GSP в – е и записи, пункты Г, Д, Е – схемы доказательства*):

А) $T_{\bar{b}} \circ T_{\bar{a}}$; Б) $R_o^{\beta} \circ R_o^{\alpha}$; В) $S_b \circ S_a$; Г) $R_B^{\beta} \circ R_A^{\alpha}$; Д) $R_O^{\alpha} \circ T_{\bar{a}}$; Е) $S_a \circ T_{\bar{c}}$?

[А) $T_{\bar{a}+\bar{b}}$; Б) $R_o^{\alpha+\beta}$ (с точностью до углов, кратных 360°); В) Если *a* || *b*, то $T_{\bar{p}}$, где $\bar{p} \perp a$, $|\bar{p}| = 2|a;b|$. Если $a \cap b = O$, то R_O^{φ}, где $\varphi = 2\angle(a;b)$. Заметим, что этот результат дает возможность также представлять как параллельный перенос, так и поворот в виде композиции двух осевых симметрий, причем одну из осей можно выбирать самим, тогда вторая ось определяется однозначно.

Г) $R_B^{\beta} \circ R_A^{\alpha} = (S_b \circ S_{(AB)}) \circ (S_{(AB)} \circ S_a) = S_b \circ S_a = \begin{cases} T_{\bar{p}}, \textit{ если } a \| b \\ R_C^{\varphi}, \textit{ если } a \cap b = C \end{cases}$. Так как $\angle((AB);a) = \frac{\alpha}{2}$; $\angle((AB);b) = \frac{\beta}{2}$; то первый случай возможен т. и т. т., когда $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 0$ или $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 180^\circ \Leftrightarrow \alpha + \beta = 360^\circ$. Во втором случае, так как $\varphi = 2\angle(a;b)$, то $\varphi = \alpha + \beta$ (с точностью до углов, кратных 360°). Д) R_C^{α}, где *C* – некоторая точка, отличная от *O*, если $\bar{a} \neq \bar{0}$. Доказательство аналогично пункту Г) – *самостоятельно*. Е) Разложим: $\bar{c} = \bar{p} + \bar{q}$, где $\bar{p} \| a$, $\bar{q} \perp a$, тогда $S_a \circ T_{\bar{c}} = S_a \circ (T_{\bar{q}} \circ T_{\bar{p}}) = (S_a \circ T_{\bar{q}}) \circ T_{\bar{p}} = S_a \circ (S_a \circ S_b) \circ T_{\bar{p}} = S_b \circ T_{\bar{p}}$, где *b* || *a* || $\bar{p}$, то есть получим скользящую симметрию]

4) Что такое движение первого и второго рода? Как с этой точки зрения классифицируются элементарные движения и скользящая симметрия (*записать*)? Как это связано с ориентацией на плоскости? [*Начертить две системы координат, ориентированных по разному*] Иногда, **движения первого и второго рода** называют также **собственными и несобственными движениями соответственно**.

II. 1) Сколько точек однозначно определяют движение плоскости?

[*Объяснить, почему не достаточно одной или двух точек*, и почему достаточно **трех точек, не лежащих на одной прямой** (*чертежи*)]

Таким образом, **чтобы однозначно задать движение на плоскости достаточно рассмотреть вершины треугольника и их образы**.

2) Рассмотрим два равных треугольника *ABC* и *A'B'C'*, каким-то образом расположенные на плоскости. Найдем некоторый набор движений, композиция которых переведет вершины одного треугольника в соответствующие вершины другого.

Эти наборы могут быть разными, но наиболее естественно сделать так (*флеш_1)*:

1. Параллельный перенос на $\overline{AA'}$ (точка *A* совместится с *A'*).

2. Поворот с центром А так, чтобы точка *B* совместилась с *B'*.

Далее возможны два случая (*почему*?): либо точки *C* и *C'* совпадут (и тогда цель достигнута), либо для их совпадения потребуется выполнить еще **3.** Осевую симметрию относительно (*A'B'*).

Таким образом установлено, что **любое движение плоскости представимо в виде композиции параллельного переноса, поворота и, возможно, осевой симметрии**.

Поскольку образы трех точек, не лежащих на одной прямой, однозначно определяют движение, то любые другие композиции движений сводятся к этим, то есть доказано не только **существование**, но и **единственность**.
3) Заметим, что в первом случае мы получим движение первого рода, а втором случае – второго рода.

Кроме того, по доказанному ранее (см. Д) для **движения первого рода** эту композицию можно заменить только **поворотом** (если угол рассмотренного поворота отличен от нуля) или только **параллельным переносом** (если этот угол равен 0°).

Для **движения второго рода** можно «избавится от поворота». Действительно, совместив параллельным переносом точки *A* и *A*', выполним затем осевую симметрию относительно серединного перпендикуляра *m* к [*BB*'] (*флеш_2*). Так как *m* также является серединным перпендикуляр к [*ÑÑ*'] (*докажите*), то в этом случае мы сумели обойтись композицией **параллельного переноса** и **осевой симметрии**. Тогда, по доказанному (см. Е), получим, что **движение второго рода является скользящей симметрией**.

Таким образом, доказана **теорема Шаля**: **любое собственное движение плоскости является параллельным переносом или поворотом, а несобственное – скользящей симметрией**.
4) Пользуясь теоремой Шаля, можно **классифицировать движения с точки зрения множества неподвижных точек**:
А) **Нет неподвижных точек** (∅) – в зависимости от рода движения: **параллельный перенос** или **скользящая симметрия** (в обоих случаях вектор переноса – ненулевой).
Б) **Одна неподвижная точка** – **поворот** (на угол, отличный от 0°).
В) **Множество неподвижных точек является прямой** – **осевая симметрия** (частный случай скользящей симметрии).

Почему не бывает ровно двух неподвижных точек?
Г) **Множество неподвижных точек является плоскостью** – **тождественное отображение**.

Задачи для самостоятельного решения.
1. Докажите, что любое движение можно представить в виде композиции не более трех осевых симметрий.
2. На плоскости даны два равных, но по-разному ориентированных треугольника *ABC* и *A*'*B*'*C*'. Докажите, что середины отрезков *AA*', *BB*' и *CC*' лежат на одной прямой.
3. Точка *M*, лежащая внутри выпуклого четырехугольника *ABCD*, такова, что $\angle AMB = \angle CMD = 120°$. Докажите, что найдется такая точка *N*, что треугольники *BNC* и *AND* – равносторонние.
4. А) Докажите, что композиция любого нечетного количества центральных симметрий является центральной симметрией.
Б) Восстановите пятиугольник по серединам его сторон.
5. А) α, β и γ – величины углов треугольника *ABC*. Докажите, что $R_C^{2\gamma} \circ R_B^{2\beta} \circ R_A^{2\alpha} = E$. Верно ли обратное утверждение?
Б) На сторонах произвольного треугольника вне его построены равносторонние треугольники. Докажите, что их центры также образуют равносторонний треугольник (*внешний треугольник Наполеона*).