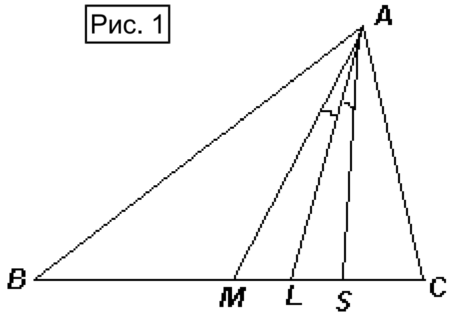
9 класс
2009/10 уч. год
Симедианы треугольника. Точка Лемуана.

Рассмотрим треугольник *ABC*, его медиану *AM* и его биссектрису *AL* (см. рис. 1). Пусть [AS) симметричен [AM) относительно (*AL*), где *S* – точка пересечения этого луча с (*BC*). Тогда ***[AS) называется симедианой треугольника ABC***.

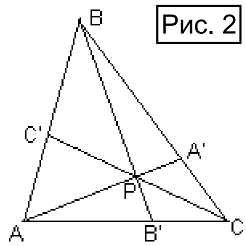
Рис. 1



<u>Вопросы и упражнения</u>.

1) Сколько симедиан у произвольного треугольника?
2) В каком треугольнике: а) одна из симедиан совпадает с медианой; б) все симедианы совпадают с медианами?
3) Может ли симедиана треугольника лежать не внутри него?

Рис. 2



4) Докажите, что ∠*BAM* = ∠*CAS* (*два случая*).

Докажем, что симедианы треугольника пересекаются в одной точке. Для этого:

1. Вспомним теорему, которая чаще всего используется для доказательства подобных фактов. Это ***теорема Чевы***: три чевианы *AA*’, *BB*’ и *CC*’ треугольника *ABC* пересекаются в одной точке т. и т. т., когда $\frac{|AB'|}{|B'C|}\cdot\frac{|CA'|}{|A'B|}\cdot\frac{|BC'|}{|C'A|}=1$ (см. рис. 2).

2. Докажем следствие из нее, которое обычно называют ***теоремой Чевы в форме синусов***: три чевианы *AA*’, *BB*’ и *CC*’ треугольника *ABC* пересекаются в одной точке т. и т. т., когда $\frac{\sin\angle ABB'}{\sin\angle B'BC}\cdot\frac{\sin\angle CAA'}{\sin\angle A'AB}\cdot\frac{\sin\angle BCC'}{\sin\angle C'CA}=1$. Для этого достаточно показать, что для любых точек *A*’, *B*’ и *C*’, лежащих на сторонах *BC*, *CA* и *AB* треугольника *ABC*, выполняется равенство: $\frac{|AB'|}{|B'C|}\cdot\frac{|CA'|}{|A'B|}\cdot\frac{|BC'|}{|C'A|}$ = $\frac{\sin\angle ABB'}{\sin\angle B'BC}\cdot\frac{\sin\angle CAA'}{\sin\angle A'AB}\cdot\frac{\sin\angle BCC'}{\sin\angle C'CA}$.

Действительно, пусть ∠*AB*’*B* = φ, тогда ∠*ÑB*’*B* = 180° – φ (*дополнить рис. 2*). По теореме синусов из треугольников *ABB*’ и *CBB*’ получим: $\frac{|AB'|}{\sin\angle ABB'}=\frac{|AB|}{\sin\varphi}$ и $\frac{|B'C|}{\sin\angle B'BC}=\frac{|BC|}{\sin(180^\circ-\varphi)}$. Следовательно, $\frac{|AB'|}{|B'C|}=\frac{|AB|}{|BC|}\cdot\frac{\sin\angle ABB'}{\sin\angle B'BC}$. Запишем еще два аналогичных соотношения для $\frac{|CA'|}{|A'B|}$ и $\frac{|BC'|}{|C'A|}$ (*самостоятельно*). Перемножив полученные равенства почленно, получим требуемое.

3. Докажем, что ***если чевианы AA’, BB’ и CC’ треугольника ABC пересекаются в одной точке, то чевианы AA₁, BB₁ и CC₁, симметричные им относительно биссектрис углов A, B и C соответственно, также пересекаются в одной точке***.

Запишем условие, используя теорему Чевы в форме синусов:

$$\frac{|AB'|}{|B'C|}\cdot\frac{|CA'|}{|A'B|}\cdot\frac{|BC'|}{|C'A|} = \frac{\sin\angle ABB'}{\sin\angle B'BC}\cdot\frac{\sin\angle CAA'}{\sin\angle A'AB}\cdot\frac{\sin\angle BCC'}{\sin\angle C'CA} = 1.$$

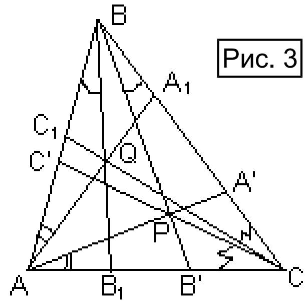


Рис. 3

Используя равенство углов, которое следует из симметрии (см. рис. 3), получим: $\frac{|AB_1|}{|B_1C|}\cdot\frac{|CA_1|}{|A_1B|}\cdot\frac{|BC_1|}{|C_1A|} = \frac{\sin\angle ABB_1}{\sin\angle B_1BC}\cdot\frac{\sin\angle CAA_1}{\sin\angle A_1AB}\cdot\frac{\sin\angle BCC_1}{\sin\angle C_1CA}$

$$= \frac{\sin\angle CBB'}{\sin\angle B'BA}\cdot\frac{\sin\angle BAA'}{\sin\angle A'AC}\cdot\frac{\sin\angle ACC'}{\sin\angle C'CB} =$$

$1:\left(\frac{\sin\angle ABB'}{\sin\angle B'BC}\cdot\frac{\sin\angle CAA'}{\sin\angle A'AB}\cdot\frac{\sin\angle BCC'}{\sin\angle C'CA}\right)$ = 1. Тогда требуемое утверждение следует из теоремы Чевы.

Пусть P – точка пересечения первой тройки чевиан, а Q – точка пересечения второй тройки, тогда ***точки P и Q называют изогонально сопряженными относительно треугольника ABC***.

4. Пусть AA', BB' и CC' – медианы треугольника ABC, тогда AA_1, BB_1 и CC_1 – симедианы. Из доказанного утверждения следует, что ***симедианы треугольника также пересекаются в одной точке*** (см. рис. 3). ***Точка Q пересечения симедиан называется точкой Лемуана***.

Задачи для самостоятельного решения.

1. А) В треугольнике ABC проведен отрезок B_1C_1, антипараллельный стороне BC, с концами на сторонах AB и AC соответственно. Докажите, что отрезок AS ($S\in[BC]$) является симедианой треугольника т. и т. т., когда он, пересекая $[B_1C_1]$, делит его пополам.

Б) Через точку X, лежащую внутри треугольника ABC, проведены три отрезка, антипараллельные сторонам треугольника. Докажите, что эти отрезки равны т. и т. т., когда X – точка Лемуана этого треугольника.

2. А) Докажите, что в неравнобедренном треугольнике одна из симедиан совпадает с высотой т. и т. т., когда этот треугольник – прямоугольный.

Б) Докажите, что в прямоугольном треугольнике точка Лемуана совпадает с серединой высоты, проведенной к гипотенузе.

3. В окружности с центром O проведена хорда BC. Через точку M – середину этой хорды проведен диаметр KW. Лучи MA и MD таковы, что $\angle KMA = \angle WMD < 90^\circ$ (A и D – точки пересечения этих лучей с окружностью лежат в одной полуплоскости относительно (KW)).

А) Докажите, что одна из симедиан треугольника ABC лежит на прямой AD.

Б) Докажите, что четырехугольник $OMDA$ – вписанный.

В) Докажите, что все прямые AD, построенные описанным образом, пересекают (KW) в одной и той же точке P.

4. Треугольник ABC вписан в окружность. Касательные к окружности, проведенные в точках B и C, пересекаются в точке P. Докажите, что прямая AP содержит симедиану треугольника ABC.