Дополнительные построения.

Не секрет, что дополнительные построения являются достаточно мощным методом решения как школьных, так и олимпиадных задач. В занятие вошло несколько задач на стандартные дополнительные построения, такие как: продление медианы, параллельный перенос в трапеции, проведение средних линий, построения вспомогательных параллелограммов, перевертывание, свертывание.

Пример 1. В треугольнике длины двух сторон равны 6 и 8, а медиана, проведенная к третьей стороне равна 5. Найдите угол между данными сторонами.

Пример 2. На прямую, проходящую через вершину A треугольника ABC, опущены перпендикуляры BD и CE. Докажите, что середина стороны BC равноудалена от D и E.

Пример 3. Докажите, что если в трапеции диагонали взаимно перпендикулярны, то сумма квадратов диагоналей равна квадрату суммы оснований.

Пример 4. $ABCD$ – выпуклый четырехугольник, в котором $\angle CAD + \angle BCA = 180°$ и $AB = BC + AD$. Докажите, что $\angle ACD + \angle BAC = \angle CDA$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Существуют ли четыре отрезка с длинами a, b, c и d такие, что можно составить две трапеции: одну с основаниями a и b и диагоналями c и d, а другую – с основаниями c и d и диагоналями a и b?

2. На медиане BM треугольника ABC взята точка P, такая, что $AP = BC$. Прямая AP пересекает отрезок BC в точке D. Докажите, что $BD = PD$.

3. На плоскости дан треугольник ABC и точки D и E такие, что $\angle ADB = \angle BEC = 90°$. Докажите, что длина отрезка DE не превосходит половины периметра треугольника ABC.

4. Два равносторонних треугольника ABC и CDE расположены по одну сторону от прямой AE и имеют единственную общую точку C. Пусть M, N и K – середины отрезков BD, AC и CE соответственно. Докажите, что треугольник MNK – равносторонний.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$: $AD = BC$; $\angle ABD + \angle CDB = 180°$. Докажите, что $\angle BAD = \angle BCD$.

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполнены соотношения $AB = BD$; $\angle ABD = \angle DBC$. На диагонали BD нашлась точка K такая, что $BK = BC$. Докажите, что $\angle KAD = \angle KCD$.

7. В прямоугольном треугольнике ABC на катетах AB и BC отмечены точки M и N так, что $AM = CB$ и $MB = CN$. Докажите, что угол между отрезками AN и CM равен 45°.

8. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты соответственно точки M и N так, что $\angle MAN = 45°$. AH – высота треугольника AMN. Докажите, что $AH = AB$.

Дополнительные задачи.

9. На сторонах четырехугольника как на диаметрах построены четыре окружности. Докажите, что общая хорда окружностей, построенных на двух соседних сторонах, параллельна общей хорде двух других окружностей, либо эти хорды лежат на одной прямой.

10. В параллелограмме $ABCD$ взята точка Q такая, что $\angle ABQ = \angle ADQ$. Докажите, что $\angle DAQ = \angle DCQ$.