„Полувписанная“ окружность.

П.А. Кожевников

Дан треугольник ABC. Пусть A' и A'' — середины дуг BC описанной окружности Ω, соответственно не содержащей и содержащей точку A; B' и B'', C' и C'' определяются аналогично.

Рассмотрим окружность S_A (назовем ее *полувписанной*), касающуюся сторон AB, AC и окружности Ω (внутренним образом).

Основная серия-1.

Докажите следующие утверждения.

1. Пусть перпендикуляр к биссектрисе AI, проведенный через точку I, пересекает AB и AC в точках K и L соответственно. Тогда окружности BKI, CLI и Ω пересекаются в одной точке T.

2. Точки T, I, A'' лежат на одной прямой.

3. Точки T, K, C' лежат на одной прямой.

4. Точки K, L и T являются точками касания окружности S_A с прямыми AB, AC и окружностью Ω.

5. а) CC' касается окружности $TBKI$;

   б) T — центр поворотной гомотетии, переводящей треугольник BKI в треугольник ILC.

Основная серия-2.

6. AT проходит через центр гомотетии с положительным коэффициентом, переводящей окружность ω в Ω.

7. Пусть A_1 и A_2 — точки касания вписанной и вневписанной окружности со стороной BC соответственно. Тогда

   а) AA' — биссектриса угла TAA_2;

   б) $\angle BTA_1 = \angle ABC$. (задача 4.7.7 из [1].)

8. Пусть AT пересекает KL в точке Z. Тогда $\angle BZK = \angle CZL$. (задача 4.7.5 из [1].)

9. Прямые KL, TA' и BC пересекаются в одной точке или параллельны. (И. Шарыгин, Соросовская олимпиада.)

10. Точка пересечения Y_A из предыдущей задачи и точки Y_B, Y_C, определенные аналогичным образом, лежат на одной прямой.

Дополнительные задачи.

11. Пусть P — произвольная точка на дуге $BA'C$.

    а) Пусть $P_b = BB' \cap PC'$, $P_c = CC' \cap PB'$. Тогда окружность PP_bP_c проходит через T. (см. задачу 8.8 с олимпиады им. И. Ф. Шарыгина 2013 г.)

    б) Пусть J_b и J_c — центры вписанных окружностей треугольников PAB и PAC. Тогда окружность PJ_bJ_c проходит через T; (задача 4.7.9 из [1].)

    в) Пусть касательные к ω из точки P пересекают BC в точках U_1 и U_2. Тогда окружность PU_1U_2 проходит через T; (задача 4.7.10 из [1].)

    г) Пусть прямые, проходящие через I параллельно биссектрисам углов между прямыми AP и BC пересекают прямую BC в точках V_1 и V_2 Тогда окружность PV_1V_2 проходит через T. (частный случай задачи 4.7.18 из [1].)

Список литературы

[1] А. В. Акопян. Геометрия в картинках. Москва, 2011.