Прямые Эйлера и точки Фейербаха

Е.Д.Куланин, Н.А.Шихова

March 14, 2012

Изучены свойства трех прямых, соединяющих точки касания вписанной в треугольник окружности, а также аналогичных прямых, соединяющих точки касания вневписанных окружностей. Такая конфигурация приводит к треугольникам, центры окружностей Эйлера которых лежат на окружности Эйлера базового треугольника, а прямые Эйлера проходят через точки Фейербаха базового треугольника. Таким образом обобщены результаты, полученные в статье Е.Д.Куланина "Прямые Эйлера и точки Фейербаха прямоугольного треугольника", опубликованной в четвертом номере нашего журнала в 2007 году. Знакомство с ней не обязательно, но полезно для читателя. Изложение доступно заинтересованному старшекласснику.

В статье "Прямые Эйлера и точки Фейербаха прямоугольного треугольника" подробно изучалась конфигурация, изображенная на рисунке 1. Для прямоугольного треугольника ABC с прямым углом $\angle B$ были построены вписанная и три вневписанных окружности; на рис. 1 A_I, B_I, C_I — точки касания

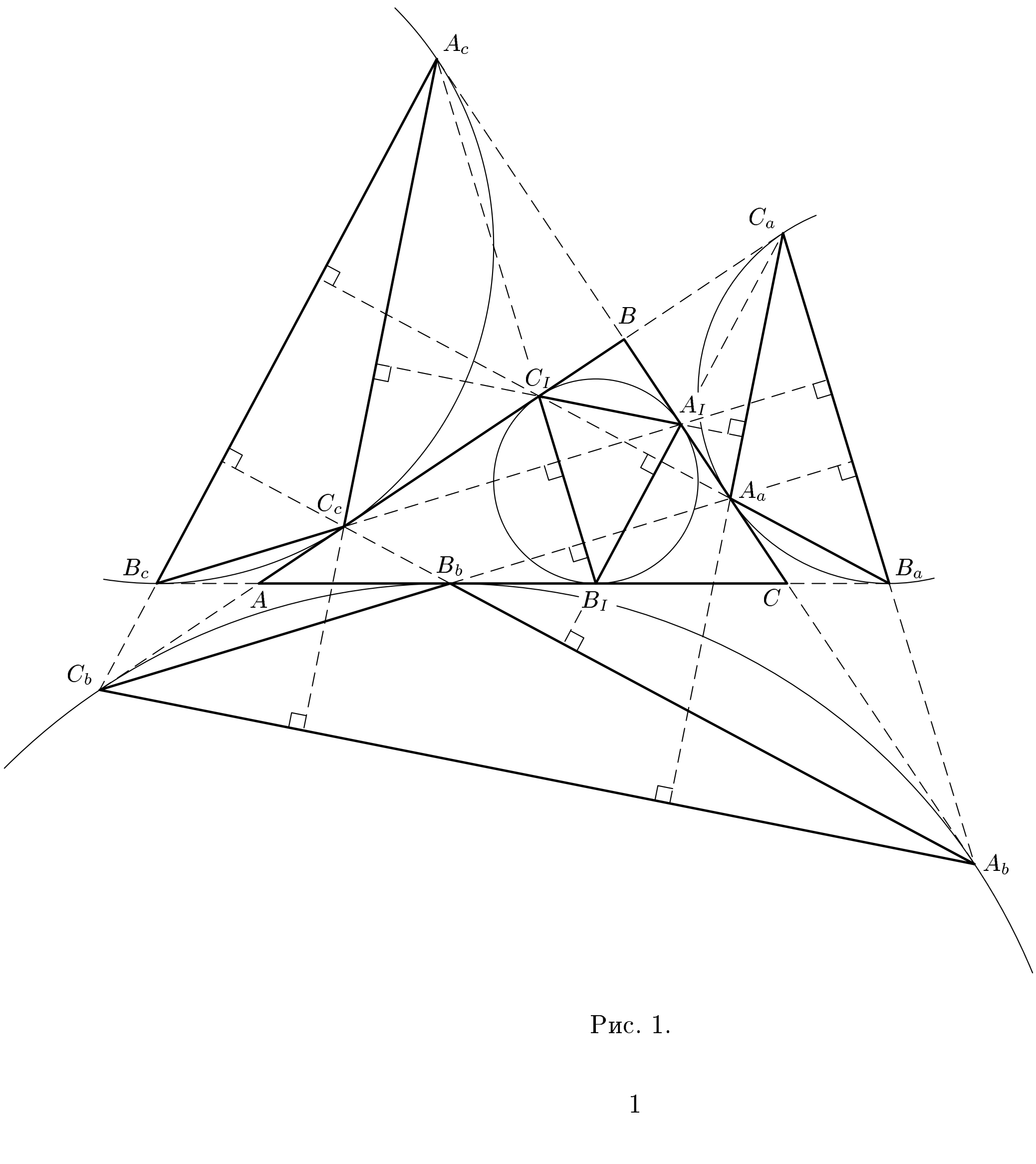

Рис. 1.

вписанной окружности; A_a, B_a, C_a, A_b, B_b, C_b, A_c, B_c, C_c — точки касания вневписанных окружностей. В названной статье рассматривались различные треугольники с вершинами в этих точках и их свойства. В частности, было показано, что центры окружностей Эйлера треугольников

$$A_aC_aC_I, A_aC_aA_I, A_IC_IA_a, A_IC_IC_a, A_cC_cC_I, A_cC_cA_I, A_IC_IA_c, A_IC_IC_c,$$

$$A_bC_bC_a, A_bC_bA_a, A_aC_aC_b, A_aC_aA_b, A_bC_bA_c, A_bC_bC_c, C_cA_cC_b, C_cA_cA_b,$$

$$A_aA_cC_b, C_IA_cC_b, A_aC_IC_b, A_aA_cC_I, C_cC_aA_b, A_IC_aA_b, C_cA_IA_b, C_cC_aA_I$$

лежат на окружности Эйлера базового треугольника ABC. Кроме того, было показано, что прямая Эйлера каждого из этих 24 треугольников проходит через одну из точек Фейербаха базового треугольника ABC.

Для доказательств очень существенным был факт, что ортоцентры (точки пересечения высот) изученных треугольников входят в ту же конфигурацию. Например, ортоцентром треугольника $A_aC_aC_I$ является точка A_I, ортоцентром треугольника $A_aC_aA_I$ является точка C_I и т.д. Таким образом, точки A_a, C_a, C_I и A_I образуют орточетверку, то есть обладают следующим свойством:

$$A_aC_a \perp C_IA_I, \quad A_aC_I \perp C_aA_I, \quad A_aA_I \perp C_IC_a. \tag{0}$$

При этом соотношение $A_aA_I \perp C_IC_a$ обусловлено тем, что базовый треугольник ABC — прямоугольный. В случае непрямоугольного базового треугольника свойство (0) не выполняется, поэтому требуется найти его аналоги.

В данной статье мы рассказываем о свойствах орточетверок; о прямых, на которых лежат стороны вписанного и вневписанных треугольников (их вершинами служат точки касания вписанной и вневписанных окружностей); изучаем свойства точек пересечения этих прямых. Это позволяет найти орточетверки, аналогичные орточетверкам, полученным для прямоугольного треугольника. После этого доказательства из статьи 2007 года переносятся на общий случай почти дословно[1].

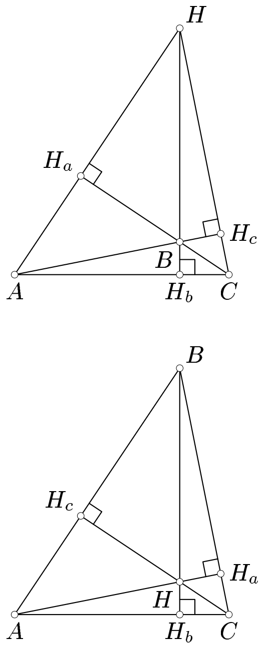

Рис. 2. Ортоцентры

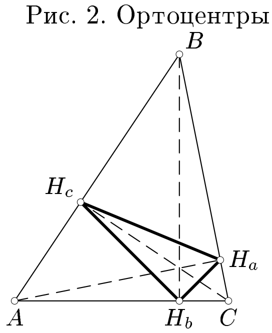

Рис. 3. Высотный треугольник

1. Орточетверка

В треугольнике ABC мы проведем высоты AH_a, BH_b, CH_c. Они обязательно пересекаются в одной точке. Ее называют *ортоцентром* и по традиции обозначают буквой H.

Четыре точки A, B, C, H можно разбить на две пары; каждая пара будет определять прямую, и обе прямые непременно будут перпендикулярны:

$$AB \perp CH, \quad BC \perp AH, \quad AC \perp BH. \tag{1}$$

Перпендикулярные – значит, ортогональные. Поэтому четыре точки A, B, C, H, обладающие свойством 1, будем называть *орточетверкой.*

Свойство 1 говорит о том, что все точки орточетверки равноправны: любые три из них могут служить вершинами треугольника, тогда оставшаяся окажется его ортоцентром. Действительно, посмотрим на $\triangle AHC$ (рис. 2). Его высоты лежат на прямых HH_b, CH_a, AH_c и пересекаются в точке B. Это значит, что она и есть ортоцентр треугольника $\triangle AHC$. Точно так же, точки A и C — ортоцентры треугольников HBC и ABH. Из одной орточетверки получается четыре треугольника, и в каждом из них основания высот будут одними и теми же; на рисунке 2 это точки H_a, H_b, H_c. Треугольник $H_aH_bH_c$ (см. рис. 3) называют ортотреугольником, ортоцентрическим треугольником, а по-русски — высотным треугольником треугольника $\triangle ABC$. У всех треугольников $\triangle ABC$, $\triangle HBC$, $\triangle AHC$, $\triangle ABH$ один и тот же высотный треугольник; его поэтому можно называть *высотным треугольником орточетверки* A, B, C, H.

[1]Эти и другие вопросы подробнее обсуждаются в нашей книге "Геометрический фейерверк", которая готовится к печати в издательстве "БИНОМ. Лаборатория знаний".

Опишем одну интересную ортočетверку, связанную с базовым треугольником (вообще-то их много). Проведем из вершин треугольника ABC биссектрисы внутренних и внешних углов и посмотрим, где они пересекаются (рис. 4). Все три внутренние биссектрисы пересекаются в точке I — центре вписанной окружности. Точки попарных пересечений внешних биссектрис обозначим I_a, I_b, I_c. Внешние биссектрисы, выходящие из одной вершины, лежат на одной прямой, поэтому вершины A, B, C лежат на сторонах треугольника $\triangle I_aI_bI_c$.

Надо бы еще доказать, что через его вершины проходят и внутренние биссектрисы $\triangle ABC$. Например, что точка I_b лежит на луче BI. Это просто. Раз она лежит на внешних биссектрисах, то равноудалена от прямых BC и AC, а также от AB и AC. Получается, что она равноудалена от прямых AB и BC, то есть лежит на биссектрисе угла B.

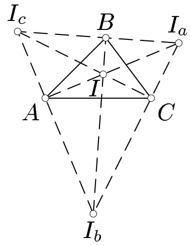

Рис. 4.

Биссектрисы внешнего и внутреннего углов с одной вершиной перпендикулярны, и как раз поэтому точки I, I_a, I_b, I_c образуют ортočетверку, для которой $\triangle ABC$ — высотный треугольник.

Теперь самое время начертить вневписанные и вписанную окружности.

На рисунке 5 обозначены точки касания этих окружностей с прямыми, на которых лежат стороны базового треугольника ABC. Например, A_a, B_a, C_a – точки касания вневписанной окружности с центром I_a; у всех этих четырех точек нижние индексы одинаковые. A_I, B_I, C_I — точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника.

Если соединить точки касания каждой окружности, получатся еще четыре треугольника — они тесно связаны с исходным треугольником ABC. Треугольник $A_IB_IC_I$ мы будем называть *вписанным*, а треугольники $A_aB_aC_a$, $A_bB_bC_b$, $A_cB_cC_c$ — *вневписанными*.

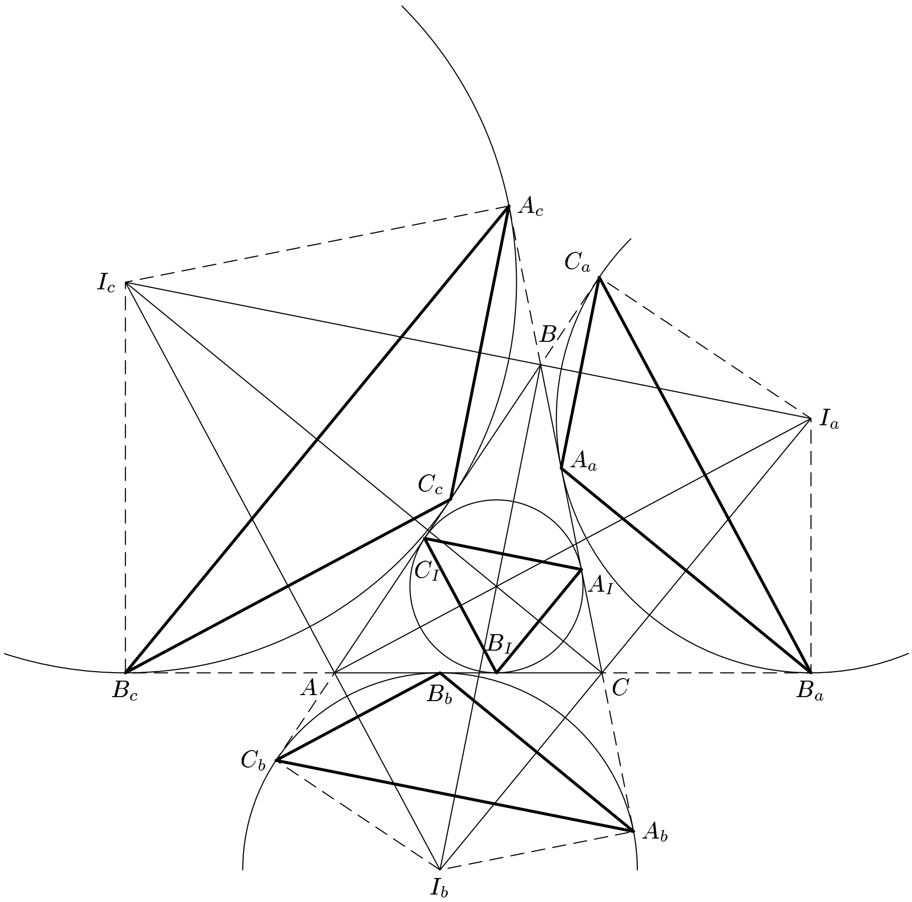

Рис. 5. Вписанная и вневписанные окружности

Утверждение 1. *Центры вписанной и трех вневписанных окружностей произвольного треугольника образуют ортočетверку, причем базовый треугольник является высотным треугольником этой ортočетверки.*

2. Считаем длины отрезков

На рисунке 5 мы продлим некоторые прямые, отметим получившиеся точки пересечения, выделим среди них орточетверки и будем изучать их свойства, для этого мы подробнее рассмотрим полученный рисунок.

Отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки, равны. Это позволяет найти длины многих отрезков в изучаемой нами конфигурации. Мы обозначили все длины на рисунках 6 и 7.

$\boxed{1}$ Проверьте, что длины отрезков на этих рисунках отмечены верно.

Осталось только сделать несколько замечаний.

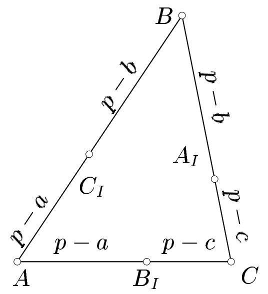

Рис. 6. Длины некоторых отрезков

1) Легко посчитать, что $B_cB_b = a$, $B_aB_b = c$, и, точно так же, $B_cB_I = c$, $B_aB_I = a$. Иными словами, точка B_b, как и точка B_I, разбивает отрезок B_aB_c на два отрезка длины a и c. На рисунке 8 жирными линиями выделены пять отрезков длины a.

   $\boxed{2}$ На этом же рисунке 8 найдите пять отрезков длины b и пять отрезков длины c.

2) Точки B_b и B_I делят сторону AC в одном и том же отношении, только считая от разных концов; поэтому эти две точки симметричны относительно M_b — середины AC. По той же причине относительно M_b симметричны точки B_c и B_a, а значит, $B_cM_b = B_aM_b = \frac{a+c}{2}$. Разумеется, точки A и C тоже симметричны относительно M_b.

3) На рисунке 8 точка B_I лежит между точками B_a и B_b, но так бывает не всегда; она может попасть и на отрезок B_cB_b — это зависит от углов треугольника ABC. У нас он "завалился" вправо, но мог бы вполне завалиться влево. Поэтому длина отрезка B_IB_b в одних треугольниках равна $a-c$, а в других — $c-a$. Можно записать, что она всегда равна $|a-c|$.

3. Ищем параллельные и перпендикулярные прямые

Поскольку A_I, C_I — точки касания вписанной окружности, отрезок A_IC_I перпендикулярен биссектрисе BI треугольника ABC; по той же причине ей перпендикулярен отрезок A_bC_b. Раз эти две прямые перпендикулярны внутренней биссектрисе BI, они параллельны прямой, на которой лежат внешние биссектрисы этого угла, а это значит, что $A_IC_I||A_bC_b||I_aI_c$.

Аналогично, точки A_a, C_a — точки касания вневписанной окружности, поэтому прямая A_aC_a перпендикулярна внешней биссектрисе BI_a треугольника ABC. То же самое можно сказать о прямой A_cC_c. Учитывая, что внешняя биссектриса перпердикулярна внутренней, можем записать $A_cC_c||A_aC_a||BI$.

Получается, что прямые A_cC_c и A_aC_a параллельны друг другу и перпендикулярны каждой из прямых A_IC_I и A_bC_b. Такая же история происходит с другими прямыми, на которых лежат стороны вписанного и вневписанных треугольников.

Мы взяли 12 прямых, на которых лежат стороны вписанного треугольника $A_IB_IC_I$ и вневписанных треугольников $A_aB_aC_a$, $A_bB_bC_b$, $A_cB_cC_c$. Эти 12 прямых распадаются на три четверки. В каждой четверке две пары параллельных прямых, причем прямые одной пары перпендикулярны прямым другой пары. Так что каждая четверка дает ровно четыре точки, в которых прямые пересекаются под прямым углом, а все 12 прямых — ровно 12 таких точек. Мы отметили эту дюжину точек $A_1, A_2, \ldots, C_4$ на рисунке 9.

Точки $A_1, \ldots A_4$ лежат на прямых, параллельных внутренней и внешним биссектрисам угла A треугольника $\triangle ABC$, аналогично обозначены точки $B_1, \ldots, C_4$.

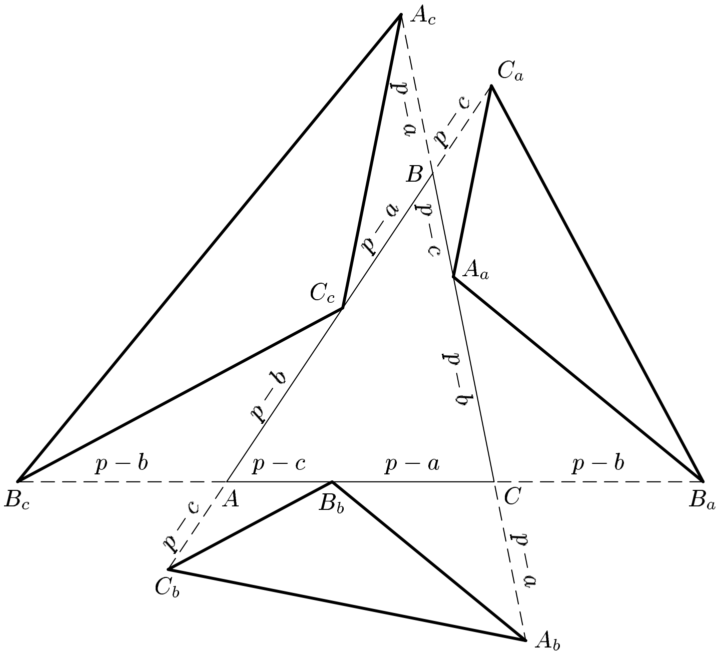

Рис. 7. Еще длины отрезков

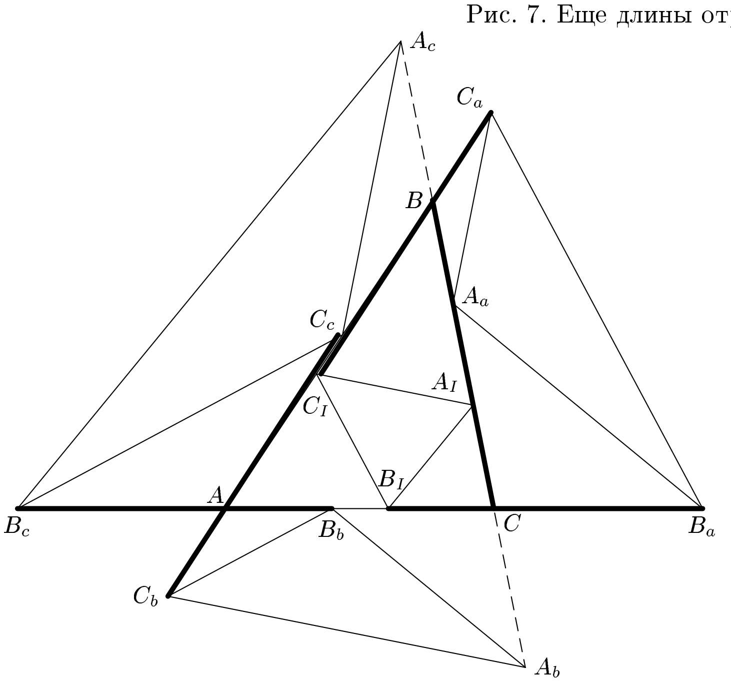

Рис. 8. Отрезки длины a

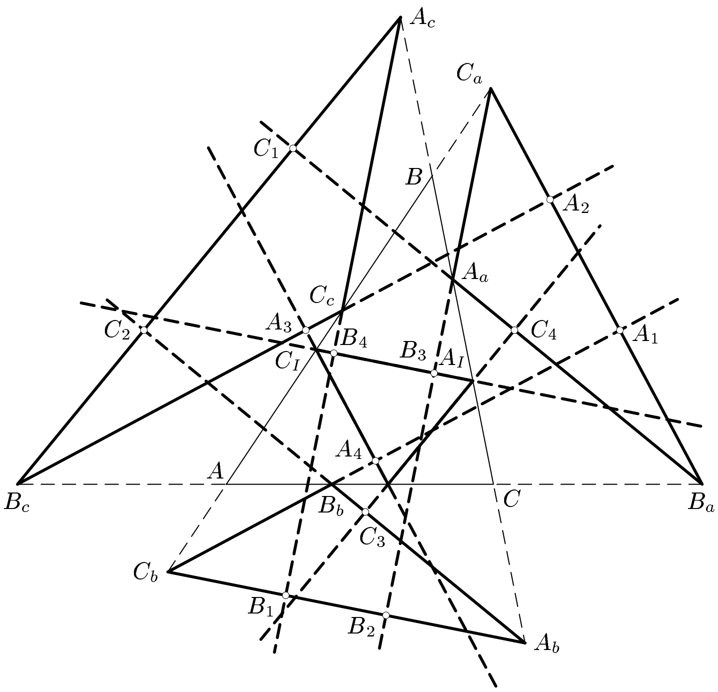

Рис. 9. Дюжина прямых и дюжина точек

4. Дюжина точек. Средние линии

Теперь, когда у нас под рукой столько перпендикулярных прямых, мы поищем всякие прямоугольные треугольники — это должно нас к чему-нибудь хорошему привести. При этом мы считаем, что базовый треугольник ABC разносторонний.

Обозначим B_1 точку пересечения прямых A_cC_c и C_bA_b, а B_3 — A_aC_a и C_IA_I. Треугольники $A_cB_1A_b$ и $A_aB_3A_I$ — прямоугольные (рис. 10); гипотенузы у них лежат на одной прямой, а соответственные катеты параллельны. Поэтому треугольники $A_cB_1A_b$ и $A_aB_3A_I$ подобны; при желании можно даже подсчитать коэффициент их подобия.

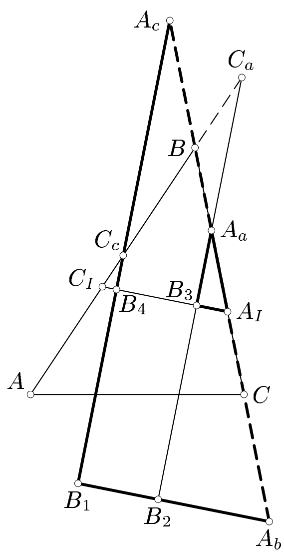

Рис. 10.

Мы же проделаем дополнительное построение — проведем в этих треугольниках медианы к гипотенузам (рис. 11). Это знаменитые линии в треугольнике ABC, только их трудно "узнать в лицо".

Точка M_a — середина не только отрезка BC, но и отрезка A_cA_b (см. замечание 2 на стр. 4). Поэтому в большем прямоугольном треугольнике медиана к гипотенузе соединяет вершину прямого угла B_1 и середину M_a стороны BC. Как во всяком прямоугольном треугольнике угол $B_1M_aA_b$ между гипотенузой и медианой B_1M_a вдвое больше острого угла $B_1A_cA_b$ и значит, равен β. Что же это за линия — она проходит через середину стороны BC и наклонена к ней под тем же углом, что и сторона AB? Это средняя линия треугольника ABC. Все сказанное относится и к маленькому прямоугольнику: его медиана B_3M_a тоже лежит на средней линии M_aM_b. Так что точки B_1, B_3, M_a, M_b лежат на одной прямой, содержащей среднюю линию M_aM_b.

Из того, что медиана прямоугольного треугольника вдвое короче его гипотенузы, мы можем найти длины некоторых отрезков (здесь полезно еще раз посмотреть на рис. 7, на котором отмечены длины касательных). Например:

$$B_1M_a = \frac{b+c}{2}; \quad B_3M_a = \frac{c-b}{2} \quad \Rightarrow \quad B_3B_1 = b.$$

Еще раз посмотрим на две пары прямых, которые проходят через точки B_3 и B_1. Это пара параллельных прямых A_cC_c, C_aA_a и перпендикулярные им прямые C_bA_b, C_IA_I. Эти две пары прямых образуют прямоугольник, и как мы только что выяснили, одна из его диагоналей лежит на прямой, содержащей среднюю линию треугольника ABC. Вторая диагональ ничем не хуже первой. Она тоже лежит на прямой, содержащей среднюю линию — M_bM_c. Длины диагоналей одинаковы и равны $B_1B_3 = b$. Как известно, диагонали прямоугольника делятся в точке пересечения пополам, а точка пересечения у них — M_b.

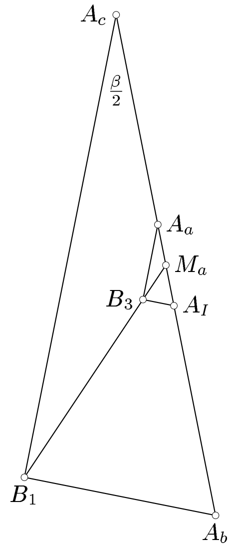

Рис. 11.

Стороны любого прямоугольника симметричны относительно его центра. Поэтому прямые A_cC_c и C_aA_a симметричны относительно точки M_b, и прямые C_bA_b и C_IA_I — тоже. Аналогичные результаты справедливы и для других прямых из дюжины тех, на которых лежат стороны вписанного и вневписанных треугольников. Двенадцать отмеченных нами точек лежат в вершинах трех прямоугольников, причем центры этих прямоугольников — середины M_a, M_b, M_c сторон треугольника ABC, диагонали этих прямоугольников соответственно равны его сторонам a, b, c, а углы между диагоналями равны углам α, β, γ базового треугольника ABC.

$\boxed{3}$ Рассмотрите отрезки прямых, содержащих средние линии треугольника, заключенные между прямыми C_aB_a, A_bC_b, A_cB_c. Каждый из этих отрезков точками дюжины делится на три отрезка поменьше (см. рис. 12). Выразите их длины через длины сторон a, b, c базового треугольника.

$\boxed{4}$ Постройте три концентрические окружности с центром M_b и диаметрами b, $|a-c|$ и $a+c$. Какие точки дюжины и замечательные точки треугольника ABC лежат на этих окружностях?

$\boxed{5}$ 1) Докажите, что высотные треугольники вписанного и трех вневписанных треугольников подобны базовому треугольнику.

2) Докажите, что основания высот вписанного и трех вневписанных треугольников лежат на трех парах параллельных прямых; причем прямые каждой пары параллельны одной из сторон базового треугольника и симметричны относительно соответствующей средней линии.

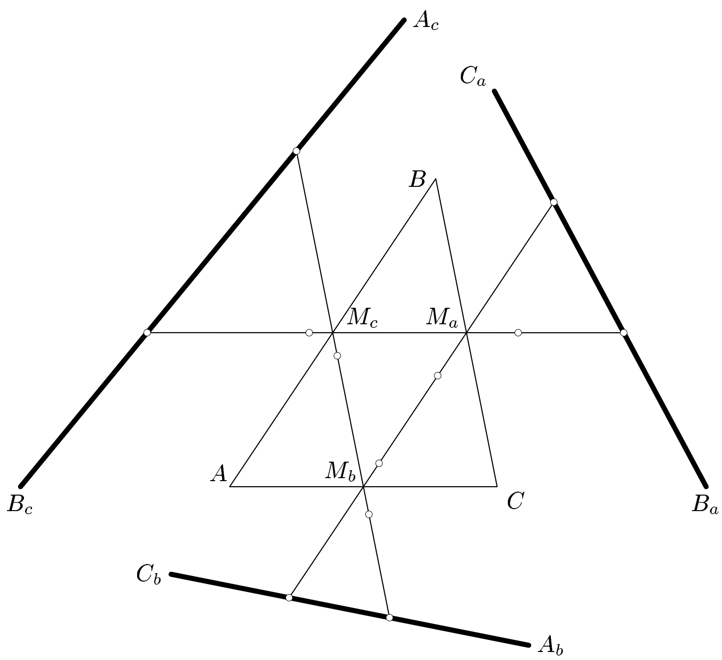

Рис. 12. Отрезки средних линий

5. Дюжина точек. Биссектрисы

Точки из дюжины по определению лежат на прямых, содержащих стороны вписанного и вневписанных треугольников. Мы доказали, что они лежат еще в вершинах специальных прямоугольников и на прямых, содержащих средние линии базового треугольника. Но на рисунках, которые мы сделали до сих пор, отсутствует одна деталь — каждая точка из дюжины лежит еще на биссектрисе или внешней биссектрисе этого треугольника. Сейчас мы это докажем.

Рассмотрим четырехугольник AB_1CB_3 (рис. 13). Его диагонали AC и B_1B_3 равны b и пересекаются в точке M_b, которая делит их пополам. Значит, AB_1CB_3 — прямоугольник. Угол B_3M_bC между его диагоналями — это угол между средней линией M_bM_a и стороной AC треугольника ABC, он равен α. Как во всяком прямоугольнике, угол между диагональю AC и стороной AB_3 вдвое меньше, то есть равен $\alpha/2$. Это и означает, что AB_3 — биссектриса угла BAC. Биссектриса и внешняя биссектриса угла перпендикулярны, стороны прямоугольника тоже, поэтому точка B_1 лежит на внешней биссектрисе угла A треугольника ABC. Похожие прямоугольники и рассуждения можно построить и для других точек из дюжины.

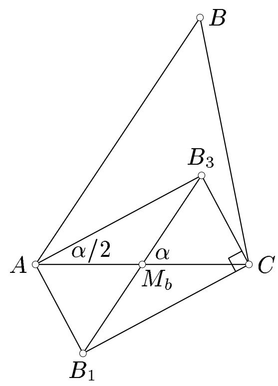

Рис. 13.

Через каждую из них проходит по четыре замечательные прямые: средняя линия треугольника ABC или ее продолжение; биссектриса или внешняя биссектриса этого же треугольника; две прямых, которые содержат стороны вписанного или вневписанных треугольников. Поэтому наша "полная" картинка должна выглядеть примерно так, как на рисунке 14.

Подведем итог нашему обсуждению свойств дюжины прямых и дюжины точек.

Утверждение 2. *Прямые дюжины можно разбить на три четверки по две пары, причем в каждой четверке прямые одной пары параллельны, а разных – перпендикулярны.*

Прямые обеих пар симметричны относительно одной и той же середины стороны треугольника ABC. Для каждой из трех четверок своя середина стороны (их ведь тоже три).

Прямые из дюжины образуют три прямоугольника; у каждого прямоугольника диагонали равны длине одной из сторон треугольника, а угол между ними — углу треугольника, противолежащему этой стороне. Пересекаются диагонали в середине соответствующей стороны треугольника. Все шесть диагоналей этих трех прямоугольников лежат на трех прямых, содержащих средние линии

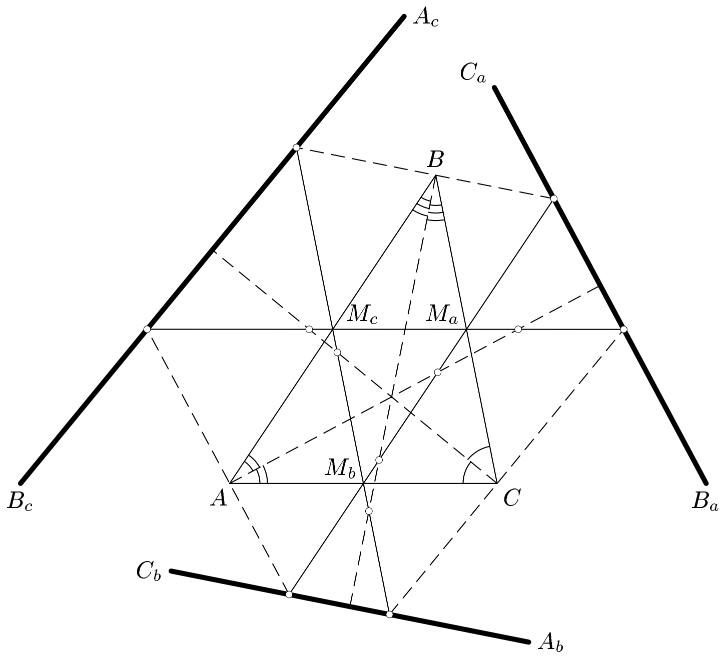

Рис. 14. Дюжина точек. Средние линии и биссектрисы

базового треугольника.

Каждая из точек дюжины лежит на средней линии треугольника ABC или ее продолжении.

Каждая из точек дюжины лежит на биссектрисе или внешней биссектрисе треугольника ABC.

$\boxed{6}$ 1) Докажите, что точки B_1, B_2, A_1, A_2, C_1, C_2 лежат на одной окружности (это окружность Конвея[2] треугольника $M_aM_bM_c$). Где находится ее центр? Выразите ее радиус через радиус вписанной окружности и длины сторон треугольника ABC.

2) Докажите, что все точки дюжины лежат на четырех окружностях Конвея (одной основной и трех добавочных) треугольника $M_aM_bM_c$, по шесть точек на каждой окружности; при этом каждая точка лежит на двух окружностях.

6. Дюжина прямых. Высоты

Исследуя дюжину прямых и дюжину точек, мы хотели найти какие-нибудь интересные円орточетверки и изучить их свойства, поэтому мы решили провести высоты треугольника ABC. Ведь в орточетверках точки лежат на ортогональных прямых, и дополнительные перпендикуляры нам не помешают. Итак, сейчас на новом рисунке мы сохраним дюжину прямых, сотрем все средние линии и биссектрисы, а высоты, наоборот, проведем (см. рис. 15)

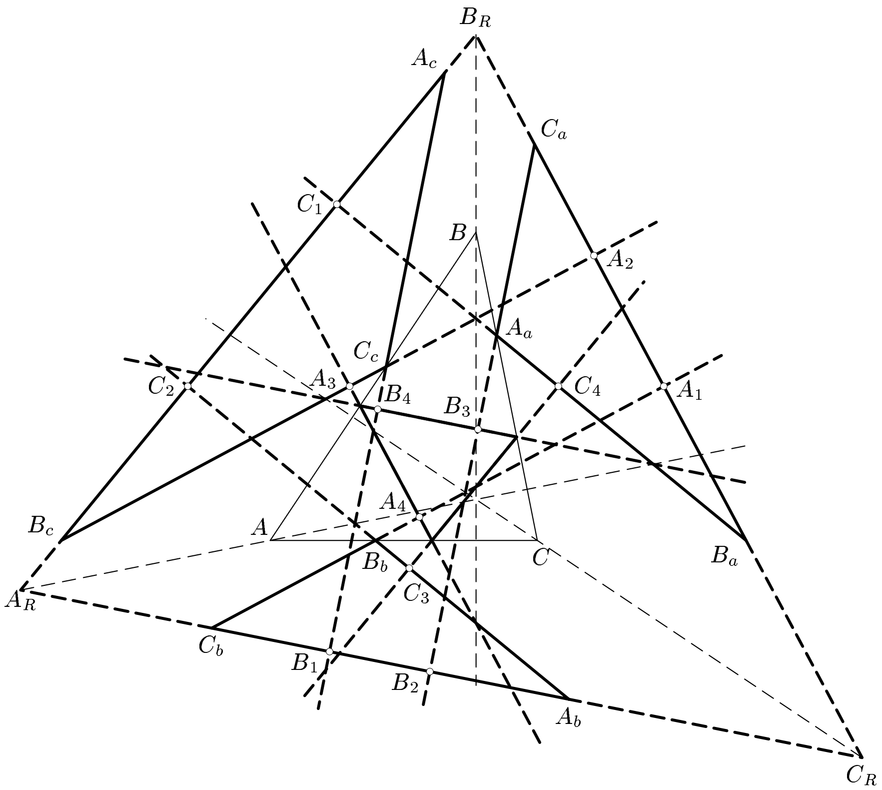

Рис. 15. Высоты и дюжина прямых

По чертежу видно, что точки пересечения некоторых прямых из дюжины лежат на высотах (правда, это еще придется доказывать).

Например, докажем, что точка B_R пересечения прямых B_cA_c и B_aC_a лежит на прямой BH. Главная идея такая. Точку пересечения прямых B_cA_c и BH мы обозначим B_R^1, а точку пересечения прямых B_aC_a и BH — B_R^2. Потом покажем, что отрезки B_R^1B и B_R^2B равны (между прочим, радиусу вневписанной окружности с центром в точке I_b), и отсюда получим, что точки B_R^1 и B_R^2 совпадают, то есть все три прямые B_cA_c, B_aC_a и BH пересекаются в одной точке, она уже получила обозначение: B_R.

[2]Об окружностях Конвея подробно и интересно рассказано в статье А.Г.Мякишева "Прогулки по окружностям: от Эйлера до Тэйлора", опубликованной журнале "Математическое образование", 1(57), январь-март 2011г.

Итак, вначале покажем, что $B_R^1B = I_bB_b$.

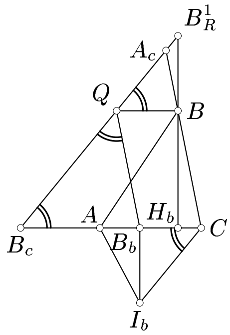

Рис. 16.

Проведем через вершину B прямую, параллельную стороне AC, до пересечения с прямой B_cA_c в точке Q (рис. 16). Мы собираемся установить равенство прямоугольных треугольников B_R^1BQ и I_bB_bC.

Треугольник B_cA_cC равнобедренный (касательные CB_c и CA_c к вневписанной окружности с центром I_c равны), поэтому треугольник QA_cB тоже равнобедренный, и $BQ = BA_c = p - a$. Такую же длину имеет отрезок CB_b (см. рис. 7).

Поэтому в прямоугольных треугольниках B_R^1BQ и I_bB_bC катеты BQ и CB_b равны. Прилежащие к ним острые углы тоже равны, ведь прямые I_bC и B_cA_c параллельны. Значит, эти два треугольника равны, и длина отрезка B_R^1B равна радиусу R_b вневписанной окружности с центром I_b.

Прямая B_aC_a, которая пересекает прямую BH в точке B_R^2, ничем не хуже B_cA_c, поэтому длина B_R^2B тоже равна R_b. Значит, B_R^2 и B_R^1 — одна и та же точка, мы обозначаем ее B_R, и она лежит на прямой BH. Аналогично можно получить доказательства и для других точек пересечения.

Вот как получен рисунок 17.

На прямой, содержащей высоту BH, от вершины B откладываем отрезки, равные по длине радиусам вписанной и вневписанных окружностей. Если отложить радиус вневписанной окружности с центром I_b вне треугольника, то получим точку B_R — в этом мы уже убедились. Если отложить радиус вписанной окружности внутрь треугольника — получим точку B_r пересечения прямых B_cC_c и B_aA_a.

А если от вершины B отложить внутрь треугольника отрезки, длины которых равны радиусам R_a и R_c вневписанных окружностей с центрами в I_a и I_c, то получатся точки B_{Ra} и B_{Rc}. Точно так же можно откладывать радиусы от вершин A и C. Обозначения — на рисунке 17.

$\boxed{7}$ На высоте BH_b треугольника ABC отложим внутрь от вершины B радиусы R_a и R_c двух вневписанных окружностей и радиус r вписанной, — получим точки B_{Ra}, B_{Rb} и B_r. Докажите, что

1) точка B_r лежит на пересечении прямых A_aB_a и B_cC_c;

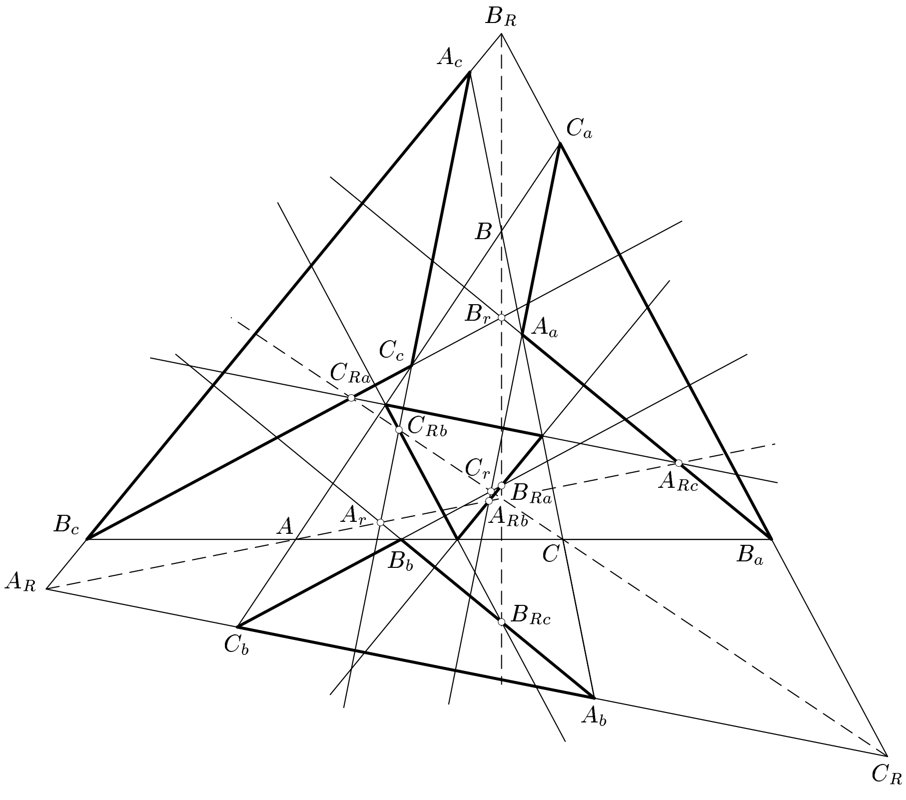

Рис. 17. Откладываем радиусы на высотах

2) точка B_{Ra} лежит на пересечении прямых C_bB_b и A_IB_I;

3) точка B_{Rc} лежит на пересечении прямых A_bB_b и C_IB_I.

Для доказательства полезно обратиться к рисунку 18.

$\boxed{8}$ Рассмотрите конфигурацию полностью — дюжину прямых и все точки их пересечения. Найдите орточетверки в этой конфигурации.

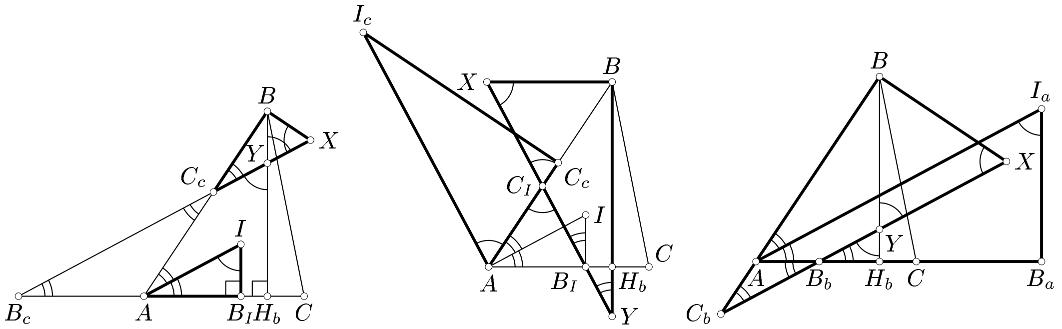

Рис. 18.

7. Прямая и окружность Эйлера

В нашей статье мы примем без доказательства некоторые свойства окружности Эйлера. Отметим, что середины сторон треугольника ABC мы обозначаем M_a, M_b, M_c, основания высот — H_a, H_b, H_c, ортоцентр — H, середины отрезков AH, BH, CH — E_a, E_b, E_c. Перечислим нужные нам свойства.

Утверждение 3. *Для любого треугольника середины сторон, основания высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами, лежат на одной окружности — окружности Эйлера этого треугольника.*

Утверждение 4. *В окружности Эйлера диаметры M_aE_a, M_bE_b, M_cE_c перпендикулярны соответственно хордам H_bH_c, H_aH_c, H_aH_b.*

Точки M_b, H_b делят окружность Эйлера треугольника ABC на две дуги. Обозначим N_b середину дуги, лежащей по одну сторону с точкой B от прямой M_bH_b, а S_b — середину другой дуги (см. рис. 19).

Утверждение 5. *Точки N_b и S_b диаметрально противоположны и делят пополам дуги, на которые окружность Эйлера делят середины сторон M_a и M_c.*

Как мы видели, у четырех треугольников ABC, ABH, AHC, HBC одной ортечетверки A, B, C, H общий высотный треугольник $H_aH_bH_c$. Поэтому у всех этих четырех треугольников общая окружность Эйлера — описанная окружность треугольника $H_aH_bH_c$. К нашему списку мы добавим еще одно утверждение.

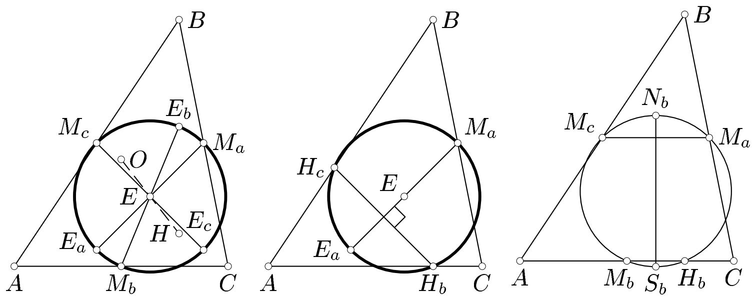

Рис. 19. Свойства окружности Эйлера

Утверждение 6. *Для любой орточетверки A, B, C, H треугольники ABC, ABH, BCH, CAH имеют общую окружность Эйлера.*

Разумно называть ее *окружностью Эйлера орточетверки* A, B, C, H.

Хорошо известно, что прямая Эйлера — чемпион по количеству лежащих на ней замечательных точек треугольника. Напомним, что в частности, на ней лежат точки O — центр описанной окружности, H — ортоцентр, E — центр окружности Эйлера, G — точка пересечения медиан. Легко доказать, E — середина отрезка OH. Прямая Эйлера определена для всех треугольников, кроме равносторонних.

Зная, где находится центр окружности Эйлера треугольников орточетверки, несложно построить их прямые Эйлера. Они проходят через центр окружности Эйлера (один и тот же для всех) и через ортоцентры, которые всегда входят орточетверку. Очевидно, у всех четырех прямых Эйлера есть одна общая точка — центр окружности Эйлера (рис. 20).

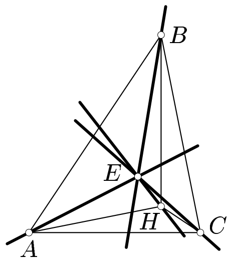

Рис. 20. Прямые Эйлера орточетверки A, B, C, H

8. Окружности Эйлера некоторых треугольников

Мы продолжаем исследовать конструкцию из дюжины прямых. И нас все еще интересует вопрос, что интересного в расположении окружностей Эйлера разных треугольников из этой конструкции.

Рассмотрим орточетверки B_c, B_R, B_a, B_r и B_b, B_{Ra}, B_{Rc}, B_I.

$\boxed{9}$ Проверьте, что это действительно орточетверки.

Сначала мы займемся треугольником $B_cB_RB_a$ и найдем центр его окружности Эйлера (рис. 21). Основания его высот — это точки A_2, C_1, H_b. На стороне B_cB_a основание высоты — H_b, а середина — M_b. Кстати, точно так же в треугольнике ABC на стороне AC основание высоты — H_b, а середина — M_b.

Окружность Эйлера треугольника $B_cB_RB_a$ проходит через точки H_b и M_b, поэтому центр ее лежит на серединном перпендикуляре к отрезку H_bM_b, то есть на прямой N_bS_b (согласно утверждению 5).

Кроме того, эта окружность Эйлера проходит через основания высот A_2 и C_1, поэтому центр ее лежит на серединном перпендикуляре к отрезку A_2C_1, и сейчас мы разберемся, как проходит этот серединный перпендикуляр. Отрезки A_2M_b и C_1M_b — медианы к гипотенузе B_cB_a в прямоугольных треугольниках $B_cA_2B_a$ и $B_cC_1B_a$ (рис. 21). Эти медианы равны между собой и равны половине гипотенузы. Значит, треугольник $A_2M_bC_1$ — равнобедренный, и серединный перпендикуляр к основанию совпадает с биссектрисой, выходящей из противолежащей вершины M_b, то есть с биссектрисой угла $A_2M_bC_1$.

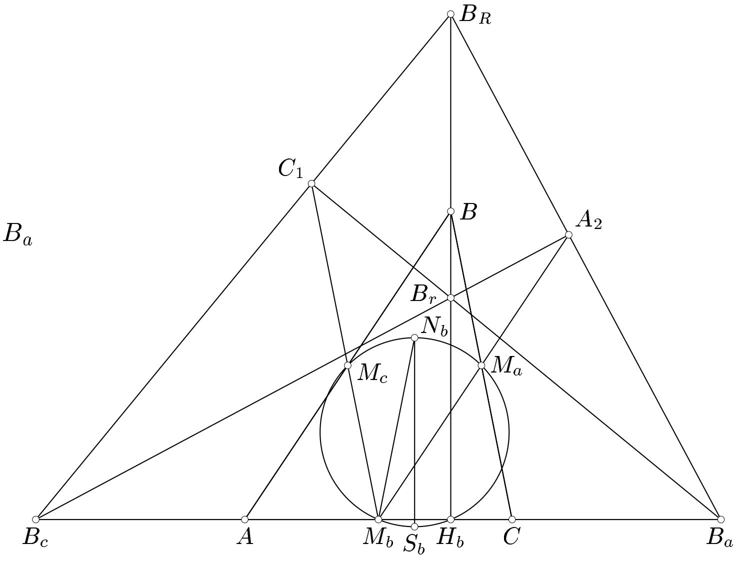

Рис. 21. Ищем центр окружности Эйлера треугольника $\triangle B_aB_RB_c$

Вспомним теперь, что по свойствам дюжины точек (см. утверждение 2) отрезки A_2M_b и C_1M_b лежат на средних линиях треугольника ABC. Значит, биссектриса угла $A_2M_bC_1$ совпадает с биссектрисой угла $M_aM_bM_c$. А этот угол вписан в окружность Эйлера треугольника ABC, ведь она проходит через середины его сторон. Значит, его биссектриса делит пополам "верхнюю" дугу M_aM_c и проходит через точку N_b (рис. 21).

Мы выяснили, что центр окружности Эйлера треугольника $B_aB_cB_R$ лежит на прямых N_bS_b и M_bN_b, а значит, попадает в точку их пересечения N_b. Конечно же, центр этот лежит на окружности Эйлера базового треугольника.

Почти такие же рассуждения годятся и для треугольника $B_bB_{Ra}B_{Rc}$ (рис. 22). В нем точка M_b — середина отрезка, соединяющего ортоцентр B_I с вершиной B_b; H_b — основание высоты из этой же вершины. Поэтому окружность Эйлера этого треугольника тоже проходит через точки M_b и H_b, а значит, ее центр лежит на прямой N_bS_b. Кроме того, он лежит еще на серединном перпендикуляре к отрезку, соединяющему основания высот A_4 и C_3, то есть на биссектрисе угла M_b в треугольнике $M_aM_bM_c$, только

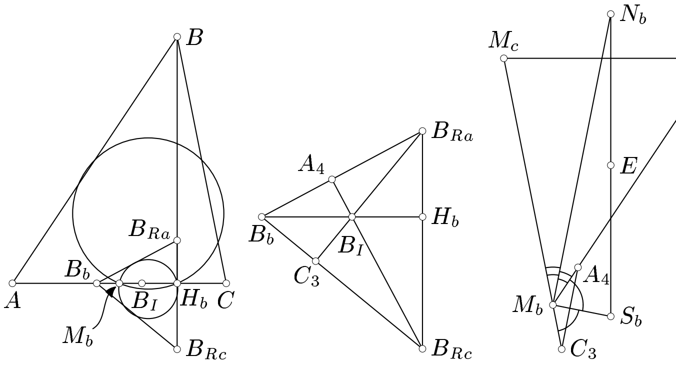

Рис. 22. Ищем центр окружности Эйлера треугольника $B_bB_{Ra}B_{Rc}$

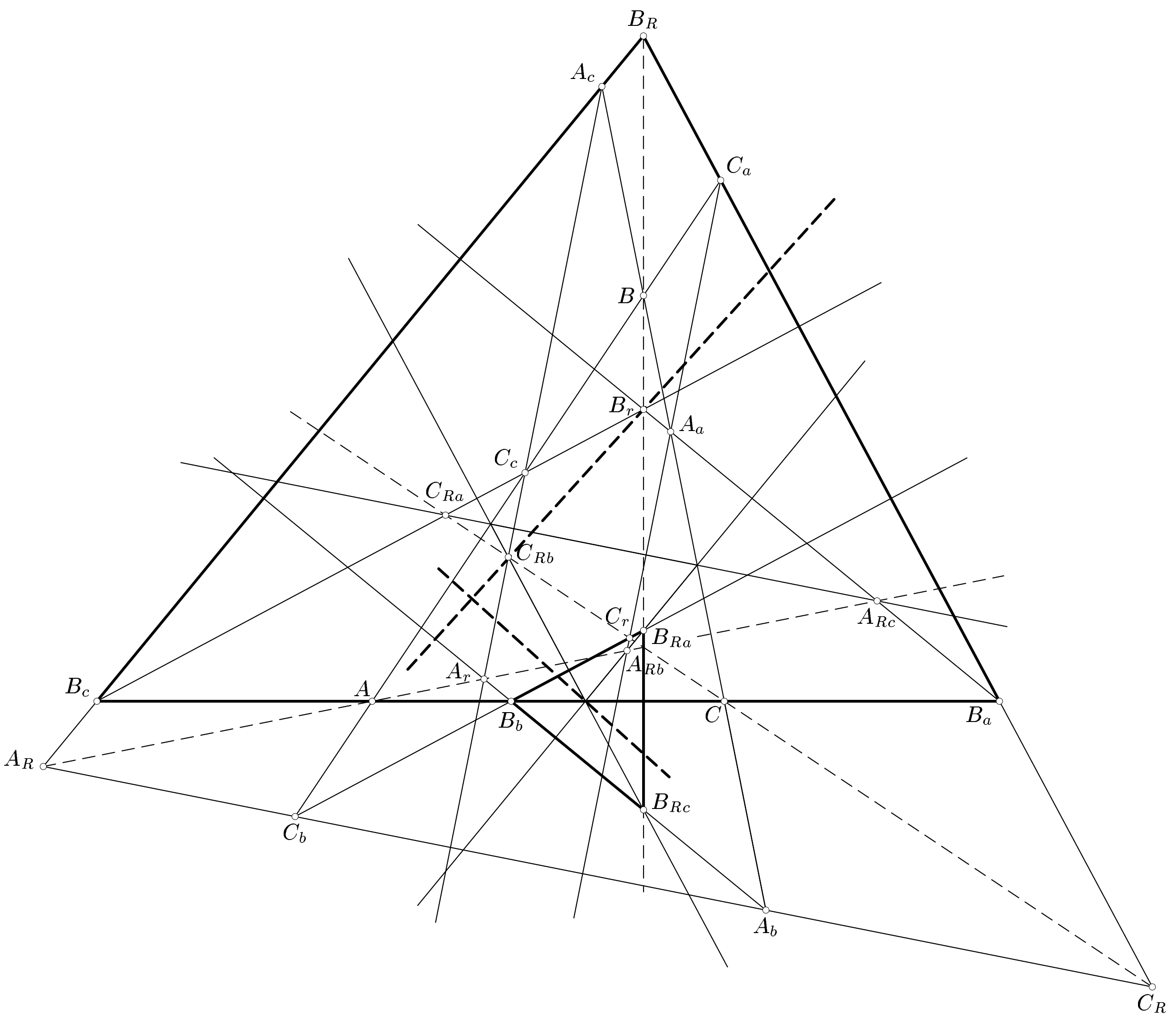

Рис. 23.

не на внутренней, а на внешней. Внешняя биссектриса перпендикулярна внутренней, поэтому пересекает окружность Эйлера треугольника ABC не в точке N_b, а в точке, диаметрально ей противоположной — S_b.

Обе ортočетверки — B_c, B_R, B_a, B_r и B_b, B_{Ra}, B_{Rc}, B_I — задают по четыре треугольника, центр окружности Эйлера каждого из которых лежит на окружности Эйлера базового треугольника ABC.

Можно рассмотреть аналогичные ортočетверки относительно вершин A и C, центры их окружностей Эйлера тоже лежат на окружности Эйлера треугольника ABC и обобщить наши выводы и на них тоже.

Утверждение 7. *Мы нашли 24 треугольника с вершинами на прямых, на которых лежат стороны вписанного и вневписанных треугольников. Центры окружностей Эйлера всех этих треугольников лежат на окружности Эйлера базового в серединах дуг, на которые ее делят середины сторон базового треугольника.*

9. Все дороги ведут в точку Фейербаха

Заметим, что стороны треугольника $B_cB_RB_a$ перпендикулярны соответственным сторонам треугольника $B_{Rc}B_bB_{Ra}$, поэтому прямые Эйлера этих двух треугольников перпендикулярны (см. рис. 23).

В этом разделе мы обсудим расположение прямых Эйлера построенных нами ортočетверок. Но сначала сформулиуем три утверждения, на которые будем опираться.

Утверждение 8. *Окружность Эйлера треугольника касается вписанной и вневписанных окружностей этого треугольника.*

Это утверждение (обычно его называют теоремой Фейербаха) мы примем без доказательства. Точку касания окружности Эйлера со вписанной окружностью называют (внутренней) точкой Фейербаха и обозначают F. Точки касания окружности Эйлера со вневписанными окружностями называют внешними точками Фейербаха и обозначают F_a, F_b, F_c (см. рис. 24).

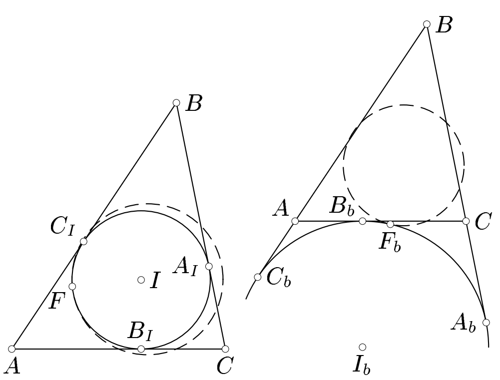

Рис. 24. Внутренняя F и внешняя F_b точки Фейербаха

Утверждение 9 (Лемма Архимеда 1)**.** *Если окружность ω_2 касается окружности ω_1 в точке K и хорды AB окружности ω_1 в точке L, то прямая LK проходит через середину той дуги AB окружности ω_1, которая не содержит точку касания окружностей ω_1 и ω_2.*

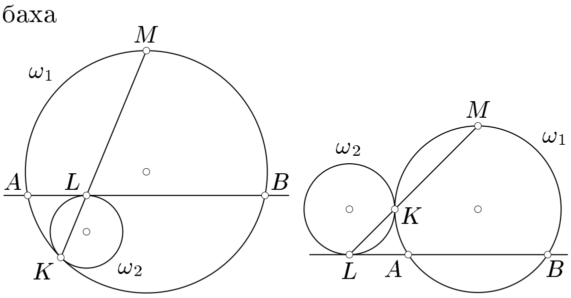

Рис. 25. Лемма Архимеда

Действительно, рассмотрим гомотетию с центром в точке касания K двух окружностей, переводящую ω_2 в ω_1. Эта гомотетия переводит точку L в некоторую точку M на окружности ω_1, а касательную AB к окружности ω_2 — в параллельную ей касательную к окружности ω_1. При этом точки M и K оказываются по разные стороны от хорды AB и на одной прямой с точкой L. А раз через точку M проходит касательная, параллельная хорде AB, точка касания M делит дугу AB пополам.

Утверждение 10 (Лемма Архимеда 2)**.** *Если окружность ω_2 касается окружности ω_1 в точке K и продолжения хорды AB окружности ω_1 в точке L, то прямая LK проходит через середину той дуги AB окружности ω_1, которая содержит точку касания окружностей ω_1 и ω_2.*

Прямые Эйлера треугольников "маленькой" ортočетверки B_b, B_{Ra}, B_{Rc}, B_I построить легко. Для любого треугольника прямая Эйлера проходит через центр окружности Эйлера (у всех четырех это точка S_b) и через ортоцентр — одну из точек ортočетверки.

Оказывается, все четыре прямые Эйлера проходят через точки Фейербаха базового треугольника, внешние или внутреннюю, и сейчас мы это покажем.

Вписанная окружность треугольника ABC касается его окружности Эйлера в точке Фейербаха F, а хорды M_bH_b этой же окружности — в точке B_I (рис. 26). Значит (по лемме Архимеда 1, см. утверждение 9), прямая FB_I делит пополам дугу M_bH_b окружности Эйлера, то есть проходит через точку S_b. Иначе говоря, прямая Эйлера B_IS_b треугольника $B_bB_{Ra}B_{Rc}$ проходит через точку Фейербаха F базового треугольника.

Можно рассмотреть касание не вписанной, а вневписанной окружности с окружностью Эйлера, и применить лемму Архимеда к ним. Например, вневписанная окружность треугольника ABC с центром I_b касается его окружности Эйлера во внешней точке Фейербаха F_b, а хорды M_bH_b этой же окружности — в точке B_b. Значит (по лемме Архимеда 2, см. утверждение 10), прямая F_bB_b проходит через точку S_b. Иначе говоря, прямая Эйлера B_bS_b треугольника $B_{Ra}B_{Rc}B_I$ проходит через точку Фейербаха F_b (рис. 26).

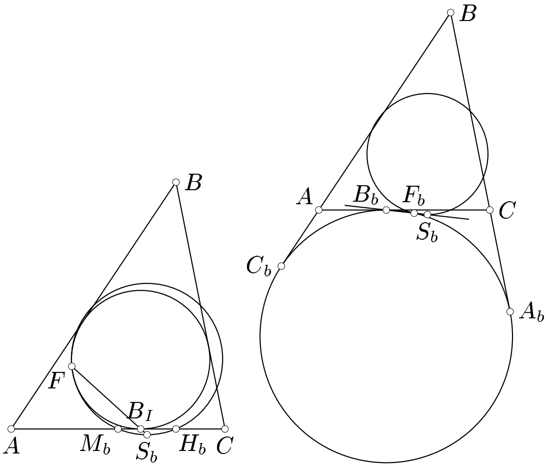

Рис. 26. Работает лемма Архимеда

У двух оставшихся треугольников орточетверки B_b, B_{Ra}, B_{Rc}, B_I мы не рассмотрели прямые Эйлера, но совершенно разумно было бы предположить, что они проходят через внешние точки Фейербаха F_a и F_c. Жаль только, что доказать это так же просто не получится.

Вот с "большой" орточетверкой B_c, B_R, B_a, B_r все наоборот: по лемме Архимеда легко доказать, что прямые Эйлера треугольников $B_cB_RB_r$ и $B_aB_RB_r$ проходят через внешние точки Фейербаха F_a и F_c, достаточно применить лемму Архимеда к вневписанным окружностям с центрами I_a, I_c и окружности Эйлера базового треугольника.

$\boxed{10}$ Докажите это, пользуясь рисунком 27.

Но с точками Фейербаха F и F_b этот фокус уже не пройдет. Поэтому сейчас обе орточетверки "помогут" друг другу. Результат для "большой" орточетверки поможет найти в "маленькой" те треугольники, прямые Эйлера которых проходят через F_a и F_c; и наоборот, результат для "маленькой" орточетверки поможет найти в "большой" треугольники, прямые Эйлера которых проходят через F и F_b.

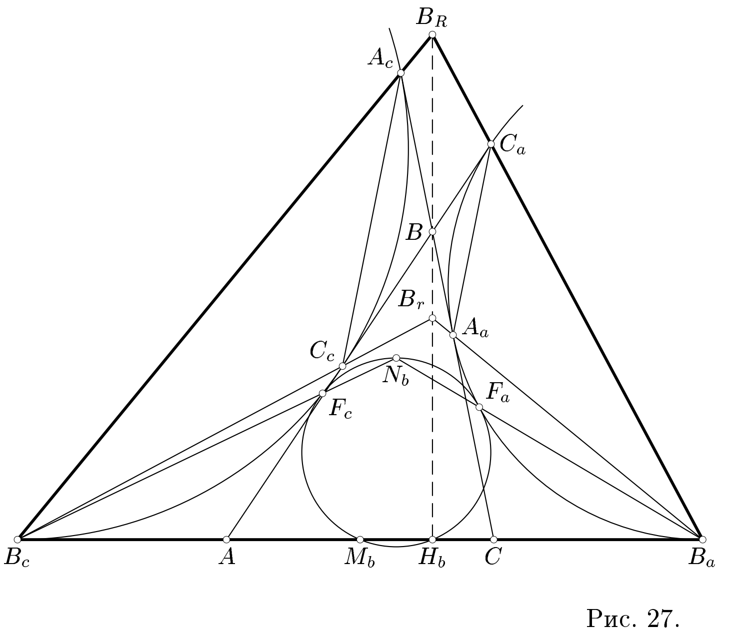

Рис. 27.

Это довольно сложное доказательство, поэтому вначале перечислим ключевые факты, которые нам понадобятся.

1) У "большой" и "маленькой" ортočетверок центры окружностей Эйлера лежат в противоположных концах N_b и S_b диаметра окружности Эйлера базового треугольника. Это следует из утверждения 7.

2) Если в окружности вписанный угол опирается на диаметр, то этот угол прямой.

3) Для каждого треугольника одной ортočетверки найдется треугольник в другой такой, что их прямые Эйлера перпендикулярны. (Это следует из того, что для каждого треугольника одной ортočетверки найдется треугольник в другой такой, что их соответственные стороны перпендикулярны.)

Докажем, например, что прямая Эйлера треугольника $B_cB_RB_a$ проходит через внутреннюю точку Фейербаха F. В "маленькой" ортočетверке треугольнику $B_cB_RB_a$ соответствует треугольник $B_{Rc}B_bB_{Ra}$ — их стороны перпендикулярны, и прямые Эйлера тоже. Прямая Эйлера треугольника $B_{Rc}B_bB_{Ra}$ — это прямая S_bF (рис. 26). Прямая Эйлера треугольника $B_cB_RB_a$ ей перпендикулярна и проходит через точку N_b. Опустим из N_b перпендикуляр на S_bF — это и будет прямая Эйлера треугольника $B_cB_RB_a$. Перпендикуляр к S_bF из точки N_b обязательно пройдет через F, так как в окружности Эйлера базового треугольника угол N_bFS_b — вписанный и опирается на диаметр. Значит, прямая Эйлера треугольника $B_cB_RB_a$ проходит через внутреннюю точку Фейербаха F (рис. 28).

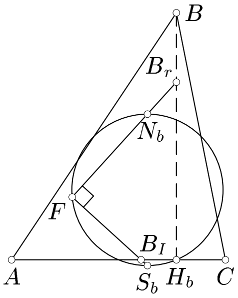

Рис. 28. Перпендикулярные прямые Эйлера пересекаются в точке Фейербаха

Точно так же можно доказать, что прямая Эйлера треугольника $B_aB_rB_c$ проходит через внешнюю точку Фейербаха F_b, а прямые Эйлера треугольников $B_bB_IB_{R_c}$ и $B_bB_IB_{R_c}$ — через внешние точки Фейербаха F_c и F_a.

Итак, у треугольников "маленькой" ортočетверки B_b, B_{Ra}, B_{Rc}, B_I прямые Эйлера проходят через точки Фейербаха и через точку S_b на окружности Эйлера базового треугольника; а у треугольников "большой" ортočетверки B_c, B_R, B_a, B_r — через точки Фейербаха и через точку N_b на окружности Эйлера базового треугольника (рис. 29). Мы доказали следующее утверждение.

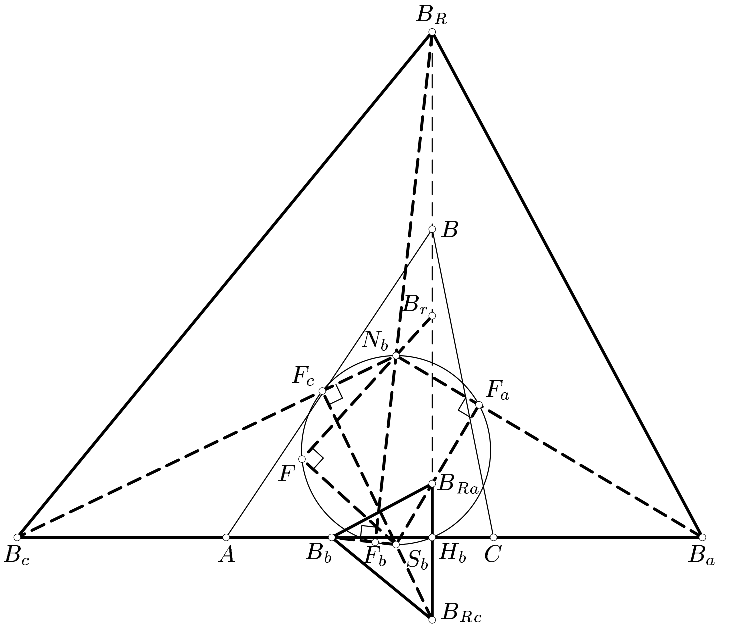

Рис. 29. Прямые Эйлера ортočетверок B_R, B_r, B_a, B_c и B_{Ra}, B_{Rc}, B_b, B_I

Утверждение 11. *Прямые Эйлера треугольников $B_R B_a B_c$ и $B_b B_{Ra} B_{Rc}$ пересекаются во внутренней точке Фейербаха F. Прямые Эйлера треугольников $B_r B_R B_c$ и $B_b B_I B_{Rc}$ пересекаются во внешней точке Фейербаха F_a. Прямые Эйлера треугольников $B_r B_a B_c$ и $B_I B_{Ra} B_{Rc}$ пересекаются во внешней точке Фейербаха F_b. Прямые Эйлера треугольников $B_r B_R B_a$ и $B_b B_I B_{Ra}$ пересекаются во внешней точке Фейербаха F_c. Если две прямые Эйлера из перечисленных восьми пересекаются в некоторой точке Фейербаха, то они перпендикулярны.*

Не забудем, что у вершин A и C есть свои "большие" и "маленькие" орточетверки; они тоже дают треугольники, у которых прямые Эйлера ведут в точки Фейербаха, так что всего мы нашли 24 треугольника, прямые Эйлера которых проходят через одну из точек Фейербаха базового.

Е.Д.Куланин, профессор факультета
информационных технологий
Московского городского
психолого-педагогического университета,
кандидат физ-мат наук,
старший научный сотрудник.
Н.А.Шихова,
г.Москва