Об одном свойстве точек Фейербаха и Тебо

Abstract. На описанной окружности разностороннего треугольника рассматриваются четыре точки такие, что наибольшее расстояние от каждой из этих точек до вершин треугольника равно сумме расстояний от этой точки до двух оставшихся вершин треугольника. Далее показывается, что эти точки совпадают с точками Фейербаха треугольника, середины сторон которого совпадают с вершинами данного треугольника и с точками Тебо треугольника, основания высот которого совпадают с вершинами данного треугольника.

1. О задаче Тебо и точках Тебо

Рассмотрим сначала одну задачу известного французского геометра В.Тебо (1882-1960), 125-летие со дня рождения которого отмечалось в 2007 году. Это задача 4328, опубликованная в журнале American Mathematical Monthly в 1949г. [1]. В ней речь идет о прямой Эйлера и окружности девяти точек. Окружность девяти точек иногда называют окружностью Эйлера (1707-1783), в честь великого математика, для которого 2007 год также был юбилейным.

4328. Proposed by Victor Thebault, Tennie, Sarthe, France.

Given a triangle ABC whose altitudes are AA′, BB′, CC′. Prove that the Euler lines of the triangles AB′C′, BC′A′, CA′B′ are concurrent on the nine-point circle at a point P which is such that one of the distances PA′, PB′, PC′ equals the sum of the other two.

Напомним, что прямой Эйлера треугольника называется прямая, проходящая через центр описанной окружности, точку пересечения медиан и точку пересечения высот (ортоцентр) этого треугольника, а окружностью девяти точек – окружность, на которой лежат середины сторон, основания высот и середины отрезков, соединяющих вершины с ортоцентром этого треугольника. Окружность девяти точек называют также окружностью Эйлера или окружностью Фейербаха.

Приведем решение задачи Тебо, а затем исследуем точки, лежащие на описанной окружности треугольника и обладающие тем свойством, что расстояние от любой из этих точек до одной из вершин треугольника равно сумме расстояний от этой точки до двух других вершин треугольника. Для этого нам понадобится следующая

Лемма 1. Прямая, пересекающая стороны AC и CB треугольника ABC в точках M и N соответственно, проходит через точку G пересечения медиан этого треугольника тогда и только тогда, когда AM/MC + BN/NC = 1.

Доказательство. Необходимость. Пусть D, E, S, L – основания перпендикуляров, опущенных соответственно из точек A, K, C, B на прямую MN, где K – середина AB (рис.1).

Тогда KE = (AD + BL)/2 как средняя линия прямоугольной трапеции ABLD. Из подобия прямоугольных треугольников KEG и CSG следует, что CS/KE = CG/GK = 2 (напомним, что G – точка пересечения медиан треугольника ABC). Итак, CS = 2KE = AD + BL.

Из подобия прямоугольных треугольников ADM и CSM, BLN и CSN выводим, что AM/MC = AD/CS, BN/NC = BL/CS. Поэтому AM/MC + BN/NC = AD/CS + BL/CS = (AD + BL)/CS = CS/CS = 1, что и требовалось. Доказательство достаточности аналогично.

Сформулируем теперь задачу Тебо в наших стандартных обозначениях, исключив вырожденный случай прямоугольного треугольника.

Теорема 1. Пусть AH_1, BH_2, CH_3 – высоты непрямоугольного треугольника ABC. Тогда прямые Эйлера треугольников AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2 пересекаются в такой точке T окружности Эйлера треугольника ABC, для которой один из отрезков TH_1, TH_2, TH_3 равен сумме двух остальных.

Доказательство. Покажем сначала, что прямые Эйлера треугольников AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2 пересекаются в одной точке T, лежащей на окружности Эйлера треугольника ABC (рис.2).

В самом деле, так как треугольники AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2 подобны треугольнику ABC и $\angle A\,H_3H_2 = \angle ACB = \angle\,BH_3H_1$, то в результате поворота треугольника $A\,H_3H_2$ вокруг точки H_3 против часовой стрелки на угол AH_3H_2 этот треугольник перейдет в треугольник, гомотетичный треугольнику BH_3H_1. Из этого следует, что угол между любыми двумя одинаково расположенными прямыми треугольников AH_3H_2 и BH_3H_1 и, в частности, между прямыми Эйлера этих треугольников, равен углу ACB.

Пусть прямая Эйлера треугольника AH_3H_2 вторично пересекает окружность Эйлера в точке T. Поскольку угол между прямыми Эйлера треугольников AH_3H_2 и CH_1H_2 равен углу $E_1E_3E_2$, где E_1, E_2, E_3 - середины отрезков AH, BH, CH (треугольники ABC и $E_1E_2E_3$ гомотетичны с центром в точке H пересечения высот треугольника ABC и коэффициентом ½), то точка пересечения этих прямых лежит на окружности Эйлера треугольника ABC и,
следовательно, совпадает с T. Аналогично, прямые Эйлера треугольников AH_2H_3 и BH_3H_1 также проходят через точку T.

Обозначим точки пересечения отрезков TE_1 и H_2H_3, TE_2 и H_1H_3 через K и L. Так как E_1 и E_2 – середины дуг $H_2E_1H_3$ и $H_1E_2H_3$ окружности Эйлера, то TE_1 и TE_2 – биссектрисы углов H_3TH_2 и H_3TH_1 и из треугольников H_3TH_2 и H_3TH_1 по свойству биссектрисы угла треугольника получим $H_2T/TH_3 = H_2K/KH_3$, $H_1T/TH_3 = H_1L/LH_3$. Сложив полученные равенства, найдем

$$(TH_2 + TH_1)/TH_3 = H_2K/KH_3 + H_1L/LH_3. \qquad (1)$$

Пусть K′ и L′ – точки пересечения прямых Эйлера TE_1 и TE_2 треугольников AH_2H_3 и BH_3H_1 со сторонами AH_3 и BH_3. Так как прямая Эйлера TE_1 проходит через точку пересечения медиан треугольника AH_2H_3, то согласно лемме 1
$H_2K/KH_3 + AK'/K'H_3 = 1$, но $AK'/K'H_3 = H_1L/LH_3$ в силу подобия треугольников AH_2H_3 и BH_3H_1, поэтому $H_2K/KH_3 + H_1L/LH_3 = 1$ и, возвращаясь к равенству (1), получим $(TH_2 + TH_1)/TH_3 = 1$, откуда $TH_2 + TH_1 = TH_3$, что и требовалось установить.

На рис.2 изображен остроугольный треугольник ABC. Для тупоугольного треугольника доказательство аналогично.

Будем в дальнейшем называть точку пересечения прямых Эйлера треугольников AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2 точкой Тебо треугольника ABC.

2. Четыре точки на описанной окружности треугольника.

Далее нам понадобится следующий известный факт: пусть S_a, S_b, S_c – середины дуг BC, CA, AB описанной окружности треугольника ABC (рис. 3); P – точка, лежащая на дуге AB, K и L – точки пересечения отрезков PS_b и PS_a со сторонами AC и BC; тогда отрезок KL проходит через центр I вписанной окружности треугольника ABC. Для доказательства применим теорему Паскаля – точки пересечения трех пар противоположных сторон вписанного шестиугольника лежат на одной прямой – к вписанному шестиугольнику BAS_aPS_cC. Тогда K, L, I – точки пересечения его сторон BA и PS_c, S_aP и CB, S_cC и AS_a соответственно.

Справедливо и обратное, т.е. если отрезок KL, где K и L – точки, взятые на сторонах AB и BC треугольника ABC, проходит через центр I вписанной окружности этого треугольника, то прямые S_cK и S_aL пересекаются в точке P, лежащей на описанной окружности треугольника ABC.

Итак, пусть отрезок KL проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC. Тогда прямые S_cK и S_aL пересекутся в точке P описанной окружности этого треугольника. Поскольку S_c и S_a – середины дуг AB и BC описанной окружности, то PK и

PL – биссектрисы углов APB и CPB и из треугольников APB и CPB в силу свойства биссектрисы треугольника получаем:

$$PA/PB = AK/KB,\ PC/PB = CL/LB,$$

$$PA/PB + PC/PB = (PA + PC)/PB = AK/KB + CL/LB.$$

Поэтому PA + PC = PB тогда и только тогда, когда AK/KB + CL/LB = 1. Согласно лемме 1 последнее равенство выполняется в том и только в том случае, когда отрезок KL проходит через центр тяжести G треугольника ABC. Итак, прямая GI однозначно определяет одну из точек описанной окружности треугольника ABC такую, что расстояние от нее до одной из вершин треугольника равно сумме расстояний от этой же точки до двух остальных вершин треугольника. Прямые GI_a, GI_b, GI_c, ***где I_a, I_b, I_c –центры вневписанных окружностей треугольника ABC,*** однозначно определяют еще три точки описанной окружности треугольника, обладающие такими же свойствами. Поэтому справедлива следующая

Теорема 2. На описанной окружности разностороннего треугольника существуют ровно четыре точки такие, что расстояние от любой из этих точек до одной из вершин треугольника равно сумме расстояний от этой же точки до двух остальных вершин треугольника.

Для равнобедренного треугольника таких точек три, причем одна из них совпадает с вершиной треугольника, лежащей на его оси симметрии (в этом случае одно из указанных расстояний равно нулю), а для равностороннего треугольника таких точек бесконечно много – указанным свойством обладает согласно известной теореме Pompeiu [2] любая точка описанной окружности равностороннего треугольника (интересно отметить, что на эту теорему Pompeiu обратил внимание и сам V.Thebault [3]).

Это понятно и из общих соображений, поскольку для равнобедренного треугольника прямая GI и одна из прямых GI_a, GI_b, GI_c совпадают, а для равностороннего треугольника прямая GI не определена, т.е. любая прямая, проходящая через центр равностороннего треугольника, проходит через его центр тяжести и центр вписанной окружности, совпадающие с центром самого треугольника.

Отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания вневписанных окружностей с его противоположными сторонами, пересекаются в одной точке N, которая называется точкой Нагеля (рис. 4). На самом деле существуют еще три точки Нагеля N_a, N_b, N_c. Точка N_b совпадает с точкой пересечения трех прямых, первая из которых проходит через вершину A и точку касания вневписанной окружности I_c со стороной BC, вторая – через вершину B и точку касания вписанной окружности I со стороной AC, третья – через вершину C и точку касания вневписанной окружности I_a с продолжением стороны AB (рис.5). Точки N_a и N_c определяются аналогично. Эти факты легко доказать, используя теорему Чевы. Приведем без доказательства еще одну теорему.

Теорема 3. Пусть O – центр описанной окружности разностороннего треугольника; N, N_a, N_b, N_c – его точки Нагеля. Тогда четыре точки описанной окружности этого треугольника такие, что расстояние от любой из них до одной из вершин треугольника равно сумме расстояний от этой же точки до двух остальных вершин треугольника, лежат по одной на прямых ON, ON_a, ON_b, ON_c.

Задача 1. Высоты AH_1, AH_2, AH_3 непрямоугольного треугольника ABC пересекаются в точке H, E_1 и E_3 – середины отрезков AH и CH, T – точка Тебо треугольника ABC, K – точка пересечения прямых TE_1 и H_2H_3, L – точка пересечения прямых TE_3 и H_1H_2. Докажите, что прямая KL проходит через ортоцентр H треугольника ABC и центр тяжести треугольника $H_1H_2H_3$.

Задача 2. Прямая, параллельная одной из прямых OI, OI_a, OI_b, OI_c, где O, I, I_a, I_b, I_c – центры соответственно описанной, вписанной и трех вневписанных окружностей треугольника ABC, пересекает его стороны (или их продолжения) BC, CA, AB в трех различных точках A_1, B_1, C_1. Тогда прямые, соединяющие точки A, B, C с центрами описанных окружностей треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C соответственно, пересекаются в одной точке, лежащей на описанной окружности треугольника ABC и такой, что расстояние от этой точки до одной из вершин треугольника ABC равно сумме расстояний от этой же точки до двух остальных вершин треугольника ABC.

3. О точках Фейербаха.

Напомним, что согласно знаменитой теореме Фейербаха окружность девяти точек данного треугольника касается вписанной и трех вневписанных окружностей этого треугольника, поэтому точку касания с вписанной окружностью называют внутренней точкой Фейербаха, а точки касания с вневписанными окружностями – внешними точками Фейербаха.

Следующий факт впервые установил Gallatly (Mathematical Gazette, 1908). Мы приведем более простое доказательство, принадлежащее Tokichi Kodera [4]. В нем используется

Лемма 2. Расстояние между серединой средней по величине стороны треугольника и точкой касания с этой стороной вписанной окружности треугольника равно сумме расстояний от середин двух остальных сторон до точек касания с этими сторонами вписанной окружности этого треугольника.

Доказательство. Покажем сначала, что расстояние между серединой стороны треугольника и точкой касания с этой стороной вписанной окружности треугольника равно полуразности двух остальных сторон этого треугольника.

Пусть M_1, M_2, M_3 - середины сторон BC, CA, AB треугольника ABC; P, Q, R - точки касания вписанной окружности со сторонами BC, CA, AB; BC = a, CA = b, AB = c, причем $a<b<c$. По свойству касательных, проведенных к окружности из одной точки, AQ = AR = x, BR = BP = y,CP = CQ = z.

Тогда $AB + BC + CA = a + b + c = 2x + 2y + 2c$, откуда

$x = (a + b + c)/2 – (y + z) = (a + b + c)/2 – a = (b + c - a)/2$. Аналогично, $y = (a + c - b)/2$, $z = (a + b - c)/2$.

Тогда $M_2Q = CM_2 – CQ = b/2 – z = b/2 –(a + b - c)/2 = (c – a)/2 = (b–a)/2 + (c – b)/2 = M_3R + M_1P$, что и требовалось.

Теорема 4. Пусть M_1, M_2, M_3 - середины сторон BC, CA, AB треугольника ABC; F – внутренняя точка Фейербаха, т.е. точка касания окружности девяти точек с вписанной окружностью треугольника ABC. Тогда наибольшее из расстояний FM_1, FM_2, FM_3 равно сумме двух остальных расстояний.

Доказательство. Обозначим через X, Y, Z вторые точки пересечения прямых FM_1, FM_2, FM_3 с вписанной окружностью треугольника ABC; а через P, Q, R - точки касания вписанной окружности со сторонами BC, CA, AB (рис.6). Так как точка F является центром гомотетии вписанной окружности и окружности девяти точек, то прямые YZ, ZX, XY соответственно параллельны прямым M_2M_3, M_1M_3, M_1M_2, и $FM_2/ FM_3 = YM_2/ZM_3 =$

$$\sqrt{FM_2 * YM_2}/\sqrt{FM_3 * ZM_3}.$$

Но согласно теореме о квадрате касательной $M_2Q^2 = FM_2 * YM_2$ и

$M_3R^2 = FM_3 * ZM_3$, поэтому $\sqrt{FM_2 * YM_2}/\sqrt{FM_3 * ZM_3} = M_2Q/ M_3R$ и $FM_2/ FM_3 = M_2Q/ M_3R$.

Аналогично получаем $FM_3/ FM_1 = M_3R/ M_1P$.

Следовательно, $FM_1 : FM_2 : FM_3 = M_1P : M_2Q : M_3R$. Поскольку по лемме 2 $M_2Q = M_1P + M_3R$, то и $FM_2 = FM_1 + FM_3$

Утверждения, аналогичные теореме 4, справедливы и для внешних точек Фейербаха F_a, F_b, F_c треугольника ABC.

4. Заключительные замечания.

Пусть ABC – остроугольный разносторонний треугольник, H – его ортоцентр. Обозначим через T, T_a, T_b, T_c – точки Тебо треугольников ABC, BCH, CAH, ABH соответственно. Поскольку треугольники ABC, BCH, CAH, ABH имеют общую окружность Эйлера, то точки T, T_a, T_b, T_c лежат на этой окружности. Если H_1, H_2, H_3 - основания высот треугольника ABC, то согласно теореме 1 расстояние от любой из этих точек до одной из вершин треугольника $H_1H_2H_3$ равно сумме расстояний от этой точки до двух других вершин треугольника $H_1H_2H_3$.

Проведем через вершины треугольника ABC прямые, перпендикулярные его биссектрисам, исходящим из этих же вершин. Эти прямые образуют остроугольный треугольник $I_aI_bI_c$, где I_a, I_b, I_c –центры вневписанных окружностей треугольника ABC, причем вершины A, B, C треугольника ABC совпадают с основаниями высот треугольника $I_aI_bI_c$. Таким образом, описанная окружность треугольника ABC является окружностью Эйлера треугольника $I_aI_bI_c$ и четыре точки Тебо треугольников $I_aI_bI_c$, II_bI_c, I_aII_c, I_aI_bI, где I – центр вписанной окружности треугольника ABC, лежат на описанной окружности треугольника ABC и обладают тем свойством, что расстояние от любой из этих точек до одной из вершин треугольника ABC равно сумме расстояний от этой точки до двух других вершин треугольника ABC.

Аналогично, если провести через вершины треугольника ABC прямые, параллельные его противоположным сторонам, то вершины треугольника ABC совпадут с серединами сторон полученного треугольника $A_1B_1C_1$. Тогда точки Фейербаха треугольника $A_1B_1C_1$ будут лежать на описанной окружности треугольника ABC и согласно теореме 4 обладать тем свойством, что расстояние от любой из этих точек до одной из вершин треугольника ABC равно сумме расстояний от этой точки до двух других вершин треугольника ABC. Но по теореме 2 на описанной окружности разностороннего треугольника существуют ровно четыре точки, обладающие указанным свойством, поэтому точки Тебо треугольников $I_aI_bI_c$, II_bI_c, I_aII_c, I_aI_bI совпадают с точками Фейербаха треугольника $A_1B_1C_1$.

В других обозначениях все сказанное можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 5. Пусть H - ортоцентр остроугольного разностороннего треугольника ABC, H_1, H_2, H_3 - основания его высот; $H'_1H'_2H'_3$ - треугольник, серединный треугольник которого совпадает с треугольником $H_1H_2H_3$. Тогда точки Тебо T, T_a, T_b, T_c треугольников ABC, BHC, CHA, AHB соответственно совпадают с точками Фейербаха треугольника $H'_1H'_2H'_3$, причем точка T совпадает с внутренней, а точки T_a, T_b, T_c - с внешними точками Фейербаха треугольника $H'_1H'_2H'_3$.

В заключение отметим, что справедлив следующий аналог задачи Тебо, также впервые установленный Gallatly ([4]):

Теорема 6. Пусть дан треугольник ABC; AH_1, BH_2, CH_3 – его высоты; M_1, M_2, M_3 – середины сторон BC, CA, AB; точки E_1 и I_1, E_2 и I_2, E_3 и I_3 – центры описанных и вписанных окружностей треугольников AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2 соответственно. Тогда прямые E_1I_1, E_2I_2, E_3I_3 пересекаются в такой точке F окружности девяти точек треугольника ABC для которой один из отрезков FM_1, FM_2, FM_3 равен сумме двух других отрезков, причем F совпадает с внутренней точкой Фейербаха треугольника ABC.

Утверждения, аналогичные теореме 6, справедливы и для внешних точек Фейербаха F_a, F_b, F_c треугольника ABC. В этом случае прямые, проходящие через точки E_1, E_2, E_3, должны также проходить через центры соответствующих вневписанных окружностей треугольников AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2.

Литература

[1]. V.Thebault, Problem 4328, American Mathematical Monthly, 56(1949), 39.

[2]. D.Pompeiu, Une identite entre nombres complexes et un theoreme de geometrie elementaire, Bull. Math. Phys. Ecole Polyt., Bucharest, 6(1936) 6-7.

[3]. V.Thebault, Sur un theoreme de M.D.Pompeiu, Bull. Math. Phys. Ecole Polytechn. Bucarest, 10(193-1939) 38-42.

[4]. Kodera,T.: New proofs of two theorems, concerning the Feuerbach point of the triangle, "Tohoku Mathematical Journal", Vol.41, 1935/36, 455-457.