ПРОГУЛКИ ПО ОКРУЖНОСТЯМ: ОТ ЭЙЛЕРА ДО ТЕЙЛОРА

Алексей Мякишев, г. Москва

Дмитрию Пантелеймоновичу Мавло к его 60-летию.

§ 1. Иного мира сотворенье в сердцах двоих. Обожествленье всего живого. Становленье союза нового. Рожденье иных высот и просветленье[1]

Наверное, каждый ценитель элементарной геометрии при встрече с тем или иным изящным результатом нередко задается вопросами вроде следующих: «А как же автор задачи сумел до всего этого додуматься? Неужели им двигало одно только озарение свыше?» Увы, сами авторы[2] почему-то, как правило, не слишком любят делиться с широкой публикой секретами ремесла.[3]

В этой статье я попробую, рассмотрев один конкретный пример, ответить на эти и им подобные вопросы.[4]

Начнем с некоторых общих предложений.

Естественно, как и в других творческих сферах деятельности, в геометрии, для того чтобы придумывать новые задачи, необходимы и талант, и вдохновение, и просто удача. Но на 95 процентов[5] — это труд, включающий в себя изучение классического наследия, современных достижений и практически непрерывные усилия, направленные на создание какой-нибудь оригинальной конструкции[6]. Нужно настроить мозг на геометрическую волну и не отвлекаться ни на что другое, то есть блюсти своего рода аскезу (по крайней мере, периодически), умея отрешиться от суетных забот.

Если же говорить более определенно, то довольно часто свежий факт появляется на свет приблизительно так. Вы сталкиваетесь с какой-то содержательной задачей, уже известной геометрическому сообществу. Задача понравилась и возникает желание, выражаясь возвышенно, постичь идеи, вдохнувшие в творение жизнь. Вертите ее и так, и сяк, по-разному разбирая на части и вновь складывая, пытаясь проникнуть как можно глубже в механизм. Случается, через какое-то время возникает желание одну детальку заменить, другую переделать, третью — дополнить и т. д. И внезапно Вы понимаете: вот оно, свершилось! Начальная конструкция как по волшебству преобразилась в иную, своеобразную, но тоже симпатичную и обогащенную совсем другими, в сравнении с отправными, идеями. В таких счастливых случаях исходную задачу будем называть задачей-родителем, а ее трансформер — задачей-отпрыском. Причем, в отличие от распространенной поговорки «Яблоко от яблони недалеко падает», усмотреть стороннему наблюдателю внешнее (да и внутреннее) сходство геометрически кровных родственников бывает подчас крайне сложно.

И тут, наконец, наступило время предъявить обещанный пример, который, надеюсь, убедит читателя в том, что все вышесказанное — отнюдь не пустые, маскирующие отсутствие сути фразы.

---

[1] — Странное, однако, название параграфа для научно-популярной статьи по геометрии. С чего бы это? — вправе поинтересоваться изумленный (а то и возмущенный) читатель.
— Действительно, странное, — будет ответ, — но в данном случае, надеюсь, уместное. Дело в том, что заголовок и этого, и всех последующих разделов — строчки, заимствованные из стихотворений Д. П. Мавло.
Круглая дата — прекрасный повод слегка нарушить сухую и казенную манеру изложения.

[2] Самых выдающихся из которых справедливо было бы называть: корифей, мэтр, маэстро, гроссмейстер (элементарной геометрии).

[3] Встречаются, впрочем, и счастливые исключения. Сошлюсь, для примера, на статью великого Игоря Федоровича Шарыгина, которая так прямо и называется: «Откуда берутся задачи» [6]. Большое количество рецептов по приготовлению задач содержится также в книжках воистину подвижника элементарной геометрии Исаака Аркадьевича Кушнира [3], [4].

[4] Разумеется, применительно к данному примеру. Было бы безумием пытаться дать исчерпывающие ответы во всей полноте.

[5] Таково, думается, процентное отношение для меня лично. У других, безусловно, оно может быть другим.

[6] И здесь уже в корзину отправляется 99,9 %. Как писал Маяковский: «Поэзия — та же добыча радия. В грамм добыча, в год труды. Изводишь единого слова ради тысячи тонн словесной руды».

Задача 1 (родитель)

Среди трех дуг, которые отсекают стороны (или их продолжения) произвольного треугольника от его окружности Эйлера[7], обязательно найдется одна, равная сумме двух других (*рис. 1*).

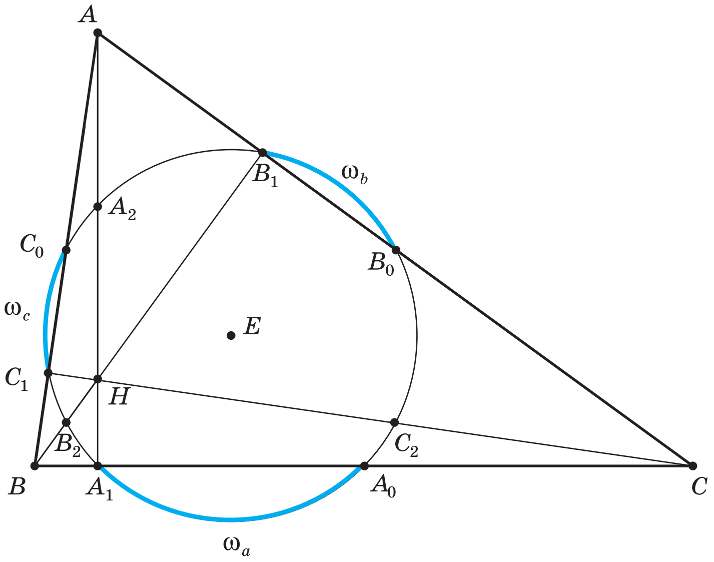


Рис. 1

Так, для треугольника, изображенного на рис. 1, выполняется равенство

$$\omega_a = \omega_b + \omega_c.$$

Задача 2 (отпрыск)

а) В произвольном треугольнике рассмотрим три прямые, каждая из которых проходит через середину высоты параллельно соответствующему радиусу описанной окружности, проведенному к вершине треугольника (см. *рис. 2*).
Тогда эти прямые конкурентны (то есть пересекаются в одной точке).

б) Точка пересечения T описанных выше прямых есть центр окружности Тейлора[8] (см. *рис. 3*).

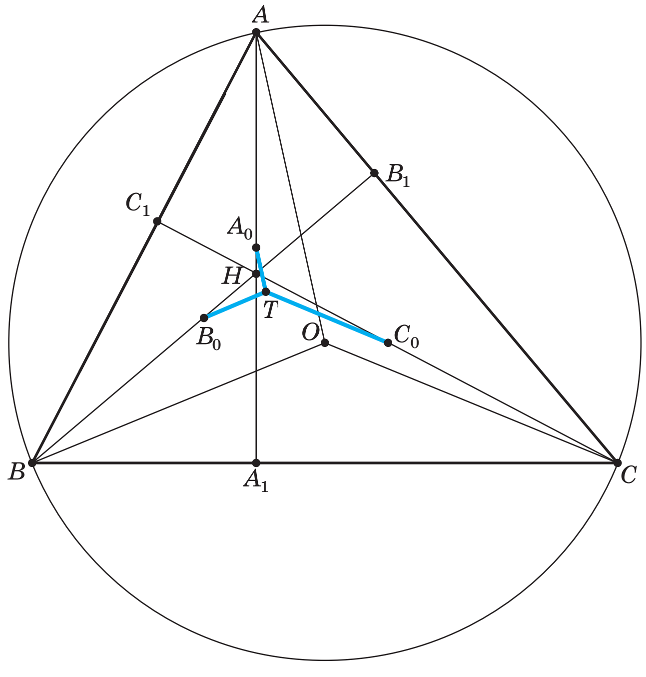


Рис. 2

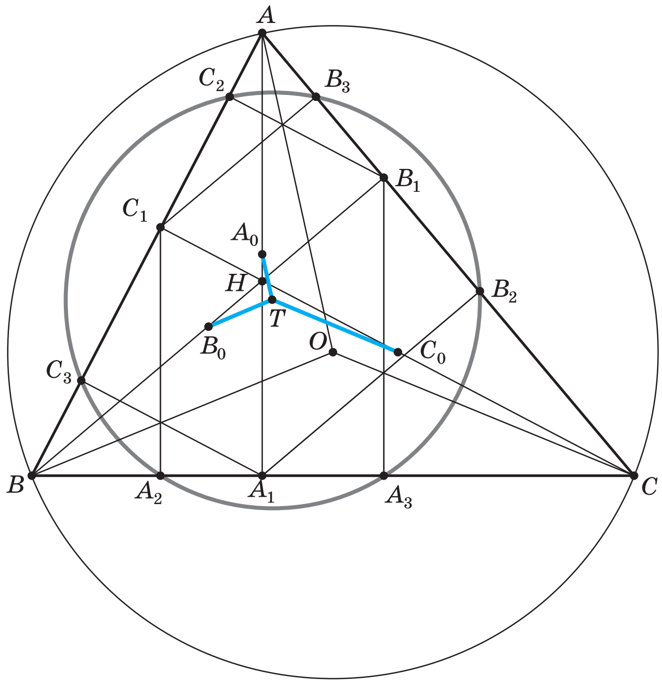


Рис. 3

Любезный читатель! Сравни теперь формулировки обеих задач. Пожалуй, следует признать, что (по крайней мере, на первый взгляд) между ними нет ничего общего, никаких вообще связей.

Но, как скоро убедимся, это впечатление ложное.

---

[7] Все же напомним, что окружностью Эйлера (или окружностью девяти точек) произвольного треугольника называют окружность, содержащую середины сторон и основания высот этого треугольника, а также середины отрезков, соединяющих ортоцентр (точку пересечения высот) с его вершинами.

[8] Окружность Тэйлора произвольного треугольника — это окружность, которая содержит основания перпендикуляров, опущенных из оснований высот на прямые, содержащие стороны треугольника (всего, стало быть, имеем шесть точек). Подробнее мы поговорим о ней в заключительном параграфе, а сейчас только отметим, что в отечественной геометрической литературе она практически не упоминается (хотя и остается желанной гостьей во многих зарубежных пособиях).

Вообразим на секунду кого-нибудь из многочисленных героев многочисленных бандо-менто сериалов, внимательно, с интересом и со знанием дела изучающего настоящие заметки.

Тогда, добравшись до конца предыдущего абзаца, он с полным правом мог бы воскликнуть:

— Вот с этого места, пожалуйста, поподробнее![9]

§ 2. А может, Вечность притаилась на кончике пера?

Вот как все начиналось.

В мае 2006 мне довелось поучаствовать в семинаре для преподавателей математики г. Зеленоград. Семинар этот был не простой, а выездной и проходил на черноморском побережье в поселке Флуераш, сравнительно недалеко от Одессы. Для краткого[10] знакомства с «жемчужиной у моря» был выделен специальный день. Тогда-то и приобрел я в одном из местных книжных магазинов подлинную геометрическую жемчужину, а точнее, целое жемчужное ожерелье [4].[11]

А одна из самых крупных и чистых отыскалась на с. 265 (где приводится статья Д. П. Мавло «Красивые свойства замечательных тел»[12]). Там речь как раз и идет о задаче 1.

Дадим ее более точную формулировку, сопроводив теперь надлежащим названием.

Теорема Мавло

Среди трех дуг, которые отсекают стороны (или их продолжения) произвольного треугольника от его окружности Эйлера, обязательно найдется одна, равная сумме двух других.

Упорядочим углы треугольника в порядке возрастания. Если, к примеру,

$$\angle C \le \angle A \le \angle B \text{ (или } \angle B \le \angle A \le \angle C),$$

то $\omega_a = \omega_b + \omega_c$.

В случае тупоугольного треугольника дуги могут перекрываться, но равенство все равно остается в силе.

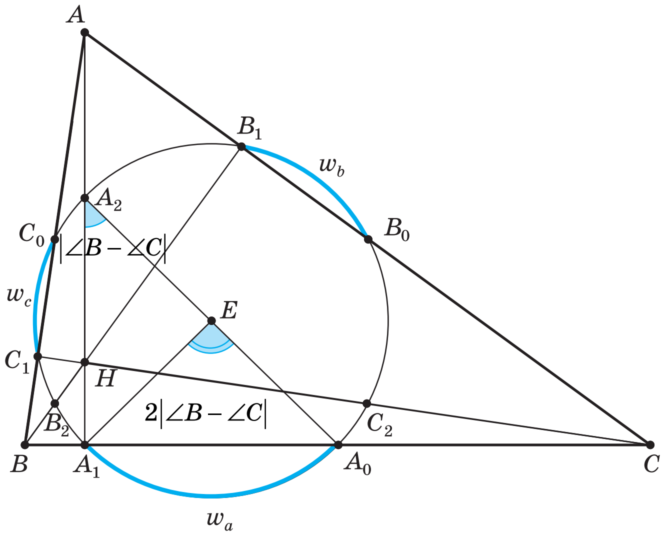


Рис. 4

Доказательство, впрочем, несложное, если только знать следующее свойство окружности Эйлера:

$$\angle A_1A_2A_0 = |\angle B - \angle C|;$$

$$\angle B_1B_2B_0 = |\angle C - \angle A|;$$

$$\angle C_1C_2C_0 = |\angle A - \angle B|.$$

(Оно уже является хорошо известным, так как имеется, скажем, в классической книжке Коксетера [2, с. 33, упр. 5 и решение его на с. 191], а также [3, с. 324, з. 14], и [7, з. 5.134])[13].

Действительно, поскольку длина дуги есть произведение соответствующего центрального угла на радиус, то в случае, например, $\angle C \le \angle A \le \angle B$ достаточно проверить, что

$$\angle A_1EA_0 = \angle B_1EB_0 + \angle C_1EC_0$$

(где E — центр окружности девяти точек). Поскольку центральный угол вдвое больше вписанного, все моментально сводится к тождеству

---

9 Фраза сия необычайно полюбилась сценаристам означенных сериалов. Или сценаристу? Сериалов-то много, но как-то не чувствуется, что сценарии к ним пишут разные люди.

10 Но не короткого!

11 Признаюсь со стыдом — так состоялась моя первая встреча с творчеством до этого момента совершенно мне неведомого И. А. Кушнира. Однако достаточно было, еще стоя у прилавка, навскидку пробежать глазами пару произвольных страниц, чтобы понять: автор геометрию безумно любит, много о ней знает и вообще, как нынче принято выражаться в инетовских пространствах, жжот. Книжку просто нельзя было не купить.

Прибавлю, что, прочитав ее, я стал форменным фаном Исаака Аркадьевича и усердным коллекционером его многочисленных произведений.

12 Опубликованная в украинском журнале «Математика в школі» (№ 3, 2004 [4], с. 265–269).

13 У меня не было необходимости заглядывать во все эти книжки или изобретать что-то самому, поскольку как-то раз сильный геометр Евгений Дмитриевич Куланин объяснил мне, что этот факт немедленно вытекает из следующего: угол между высотой и радиусом описанной окружности, проведенными из одной вершины, равен модулю разности углов при двух других вершинах. Затем следует рассмотреть гомотетию с центром в ортоцентре H и коэффициентом $\frac{1}{2}$, переводящую описанную окружность в окружность Эйлера.

$$2(\angle B-\angle C)=2(\angle A-\angle C)+2(\angle B-\angle A)$$

(см. *рис. 4*).

Тем не менее, хотелось бы подчеркнуть: окружность Эйлера и множество ее разнообразнейших свойств известны человечеству[14] вот уже несколько столетий. И все же Д. П. Мавло посчастливилось подметить новую[15] и яркую особенность окружности девяти точек, причем с простой и естественной формулировкой. Однажды познакомившись с теоремой Мавло, ее уже трудно позабыть.

Словом, как ни крути, а результат впечатляющий. Правда, интуиция подсказывала мне, что он допускает некие продвижения. Окружность Эйлера — окружность номер один в геометрии треугольника, лидирует с большим отрывом — но она потому и одинокая такая. А хотелось понять, есть ли шанс отличиться (в указанном выше смысле) у какой-нибудь окружности позаурядней, с не столь внушительным послужным списком[16]? Или же найти какую-нибудь эквивалентную формулировку, уже не связанную с длинами дуг.

Но все не хватало времени (или особого желания) основательно взяться за это дело. Чувствовалось, что усилия могут потребоваться нешуточные. Однако не потребовались.

Помог случай.[17]

[14] Имеется ввиду всему прогрессивному, то есть несгибаемым любителям чистой геометрии. А также и другим образованным людям. Понятно, чем «навороченнее» свойство, тем уже круг компетентных лиц. Очень ли далеки они от народа? Пожалуй.

[15] Во всяком случае, пока что ни в каких более ранних источниках никому еще не удалось обнаружить какого-либо упоминания о теореме, открытой Мавло.

[16] Сразу скажу: вопрос этот остается открытым. Найти какую-нибудь другую окружность, связанную с треугольником и обладающую аддитивным свойством, мне не удалось. Читатель, ау! откликнись: вся надежда только на тебя.

[17] Вообще, если вдуматься, во всей этой истории много случайного, а стало быть, и загадочного. Цепочка случайных событий, достаточно протяженная, неумолимо ведет (как это ни смешно) к появлению на свет задачи 2. Настолько неумолимо, что вспоминается фраза из одного (весьма посредственного) детектива:
— Ваши случайности пидпорядку певним закономерностям. (Ну, как-то так — искаженный украинский.)
Можно вспомнить в этой связи и более серьезное произведение: «Мост короля Людовика Святого» Торнтона Уайдлера.
Наверное, все же лучше не вдумываться в такие вещи.

§ 3. Оставь мне случая улыбки, пусть даже если по ошибке он осчастливит невзначай

Этим Рождеством мой хороший знакомый Е. Д. Куланин внезапно расщедрился и совершенно по-царски одарил меня подшивкой журналов «The American Mathematical Monthly».

Перелистывая их, в одном из номеров [8] как-то раз я наткнулся на небольшую заметку Виктора Тебо[18], озаглавленную «A Note on Orthopolar Triangles», где и обнаружил следующие две теоремы.

Теорема 1

Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, оба вписанные в окружность ω.

Тогда, если стороны треугольника ABC имеют общий ортопол относительно треугольника $A_1B_1C_1$[19], то и стороны треугольника $A_1B_1C_1$ имеют общий ортопол относительно треугольника ABC, причем оба ортопола совпадают друг с другом и являются серединой отрезка, соединяющего ортоцентры обоих треугольников.

Теорема 2

Два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, вписанные в одну и ту же окружность ω, взаимно ортополярны тогда и только тогда, когда сумма[20] направленных дуг AA_1, BB_1, CC_1 равна нулю:

$$\omega_a+\omega_b+\omega_c=0.$$[21]

[18] Еще один звездной величины титан элементарной геометрии, опубликовавший только в «Math. Monthly» около 600 оригинальных задач.

[19] В таком случае говорят, что треугольник ABC ортополярен треугольнику $A_1B_1C_1$.

[20] Направленная длина дуги — приблизительно то же, что и направленная длина отрезка. Зафиксируем направление обхода окружности, например, против часовой стрелки. Длина дуги AA_1 будет положительной, если сначала на пути попадется точка A, и затем — A_1. В противном случае длину считают отрицательной.

[21] Согласно Тебо, автор теоремы 1 — некто M. Absolome (1907), а теоремы 2 — R. Godeau (1927). (И потому можно смело утверждать, что задача 1 дождалась-таки своего Годо, то есть в данном случае эффектного в своей неожиданности переосмысления). Тебо также указывает, что обе теоремы имеют короткие синтетические (то есть геометрические) доказательства. Настоятельно рекомендую читателю попробовать их воспроизвести. Я этим заниматься не стал, так как мне нужно было лишь «навести мосты» между задачами, а спортивный интерес с годами как-то поиссяк. Полагаю, доказательства не должны быть сложными и труднонаходимыми. Все необходимые определения, информация и, уверен, идеи содержатся в статье.

— Сумма дуг равна нулю. Так-так-так, что-то знакомое. Это «жжж», как поговаривал Винни Пух, явно неспроста. Где-то я уже видел что-то подобное. Ага! Теорема Мавло! — вот что, помнится, подумалось. Слегка смущали только термины: ортопол, ортополярные треугольники. Помогла разобраться книжка [9] (ее одиннадцатая глава так и называется: «Orthopole»). Там показана корректность нижеследующего определения, а также разбирается ряд красивых утверждений, связанных с этим понятием.

Определение ортопола

Проведем в плоскости треугольника ABC произвольную прямую l. Пусть A_1 — основание перпендикуляра, опущенного на эту прямую из вершины A. Точки B_1 и C_1 определим аналогично. Затем проведем три перпендикуляра, опущенные: из точки A_1 — на прямую BC, из B_1 — на CA и из C_1 — на AB. Тогда они пересекаются в некоторой точке P, которая называется ортополом прямой l относительно треугольника ABC (см. *рис. 5*).

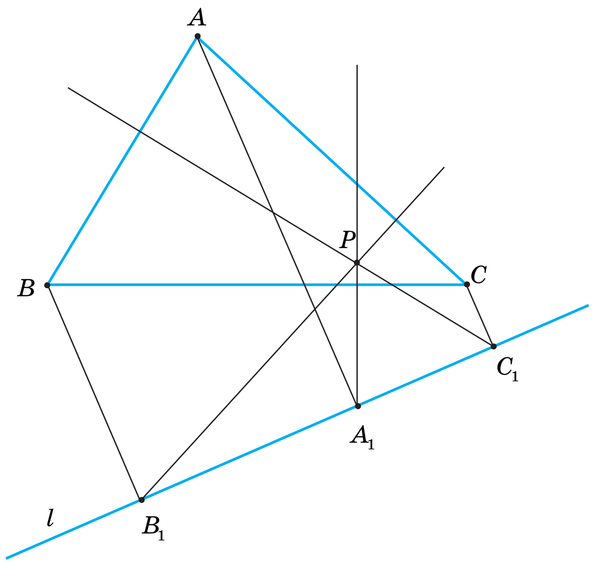


Рис. 5

Кстати, существование ортопола вытекает из более общей теоремы, так называемой теоремы Штейнера [1, с. 240], [7, з. 5.126].

Скажем, что треугольник ABC ортологичен треугольнику $A_1B_1C_1$ ($\Delta ABC \perp \Delta A_1B_1C_1$), если перпендикуляры из A на прямую B_1C_1, из B на C_1A_1 и из C на B_1C_1 пересекаются в одной точке (ортологический центр).

Теорема Штейнера заключается в том, что

$$\Delta ABC \perp \Delta A_1B_1C_1 \Leftrightarrow \Delta A_1B_1C_1 \perp \Delta ABC.$$

В случае ортопола проекции вершин треугольника ABC на прямую l — точки A_1, B_1, C_1 — можно считать вершинами вырожденного треугольника, а параллельные перпендикуляры — пересекающимися в бесконечно удаленной точке [5, с. 7].

Вот и наступил, наконец, долгожданный момент истины: появление нового персонажа на сцене.

Задача 02 а)

В произвольном треугольнике рассмотрим три перпендикуляра к сторонам его ортотреугольника, каждая из которых проходит через середину соответствующей высоты. Тогда эти перпендикуляры конкурентны (см. *рис. 6*).

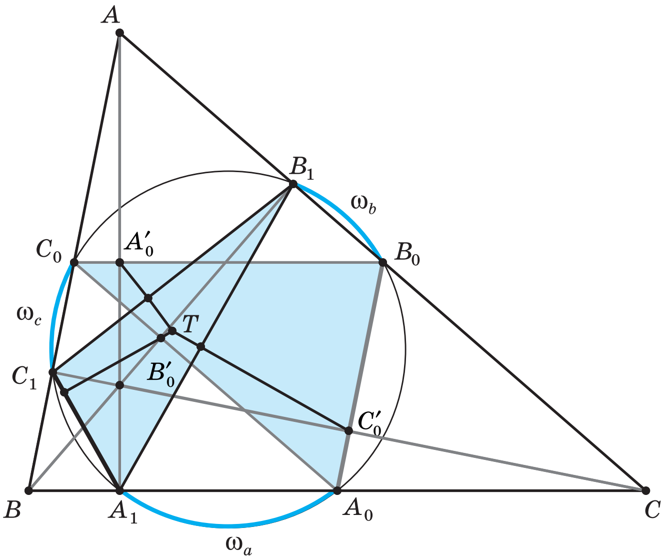


Рис. 6

В самом деле, из задачи 1 и теоремы 2 вытекает, что серединный и ортотреугольник данного треугольника взаимно ортополярны. Тогда, по теореме 1, соответствующие стороны серединного треугольника имеют общий ортопол относительно ортотреугольника. Но, очевидно, перпендикуляр, опущенный из вершины ортотреугольника на соответствующую среднюю линию, совпадает с высотой треугольника и пересекает среднюю линию в точке, совпадающей с серединой высоты. А перпендикуляр, опущенный из этой середины на соответствующую сторону ортотреугольника, содержит ортопол этой средней линии.

Утверждение доказано.

Правда, это не совсем еще задача 2 а) (потому-то и поставлен нулик перед двойкой).

Задачу 2 а) получим, если воспользуемся тем, что радиус, проведенный в вершину треугольника, перпендикулярен антипараллелям к соответствующей стороне треугольника, а соответствующая сторона ортотреугольника как раз и будет одной из таких антипараллелей (см. *рис. 7*).

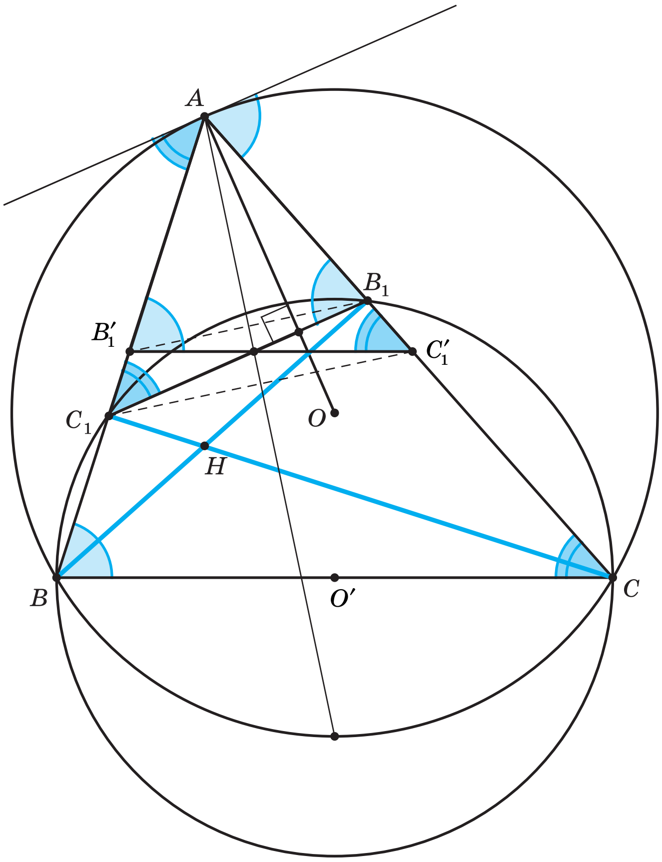


Рис. 7

Антипараллельность встретится нам и дальше, поэтому освежим в памяти некоторые факты, связанные с этим понятием.

Итак, говорят, что отрезок B_1C_1, где точки B_1 и C_1 лежат на лучах AC и AB (или одновременно на продолжениях этих лучей), антипараллелен стороне BC, если

$$\angle AB_1C_1 = \angle ABC \text{ и } \angle AC_1B_1 = \angle ACB.$$

Очевидно, что при симметрии относительно биссектрисы угла BAC антипараллельный отрезок переходит в отрезок, параллельный стороне BC. (Это — эквивалентное определение антипараллельности).

Далее, если BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC, то отрезок B_1C_1 (сторона ортотреугольника) антипараллелен стороне BC, поскольку около четырехугольника BC_1B_1C можно описать окружность (имеем два прямоугольных треугольника с общей гипотенузой), а сумма противоположных углов во вписанном четырехугольнике равна 180°.

И также касательная к описанной окружности в вершине A будет параллельна соответствующей антипараллели, как это следует из теоремы об угле между касательной и секущей и признаку параллельности прямых по равенству накрест лежащих углов.

Отсюда вытекает, в свой черед, перпендикулярность радиуса описанной окружности, проведенного в вершину треугольника, соответствующей стороне его ортотреугольника.

§ 4. Здесь в каждом шаге откровенье, и глянец с таинств сорван вон

В треугольнике ABC O — центр описанной окружности. Прямая a проходит через середину высоты треугольника, опущенной из вершины A, и параллельна OA. Аналогично определяются прямые b и c. Докажите, что эти три прямые пересекаются в одной точке.

Именно в такой формулировке задача 2 а) была включена в шестую устную олимпиаду по геометрии (Москва, апрель, 2010 г.).[22]

Но прежде, чем ее куда-то включать, еще нужно было отыскать геометрическое решение, доступное школьникам и не особенно громоздкое.[23] И такое решение нашлось, притом даже и не одно.

Начнем с авторского.[24]

Решение 1

Только что мы освежили в памяти (см. заключительную часть предыдущего параграфа), что отрезки, соединяющие вершины треугольника с центром его описанной окружности, перпендикулярны соответствующим сторонам ортотреугольника. Значит, и прямые в условии обладают тем же свойством.

---

[22] И, хочется верить, много-много радостей детишкам принесла. Не всем, правда. Из 58 решавших ее человек с ней справились лишь пятеро.

[23] Не имелось никаких сомнений: такое решение, не зависящее от теоремы 1 и теоремы 2, существует. (Не говоря уже о том, что любое подобного рода утверждение легко пробивается барицентрическими координатами [5, с. 7]; [7, гл. 4]. Однако эти самые координаты — все же не наши методы. В том смысле, что содержательная геометрическая задача взывает и к содержательному геометрическому решению, обходящемуся минимальным количеством выкладок алгебраического толка).

[24] Как говорится, хоть маленький, убогонький — а свой.

Рассмотрим треугольник $A_2B_2C_2$ с вершинами в срединах отрезков, соединяющих центр описанной окружности с основаниями соответствующих высот. Тогда B_2C_2 — средняя линия треугольника OC_1B_1 и потому параллельна прямой B_1C_1. С другой стороны, A_0A_2 — средняя линия треугольника AA_1O, а значит, параллельна AO, то есть совпадает с данной в условии прямой a и является высотой треугольника $A_2B_2C_2$, опущенной из вершины A_2.

Аналогично, прямые b и c будут двумя другими высотами рассматриваемого треугольника. Поскольку высоты треугольника пересекаются в одной точке, наше утверждение доказано (см. *рис. 8*).

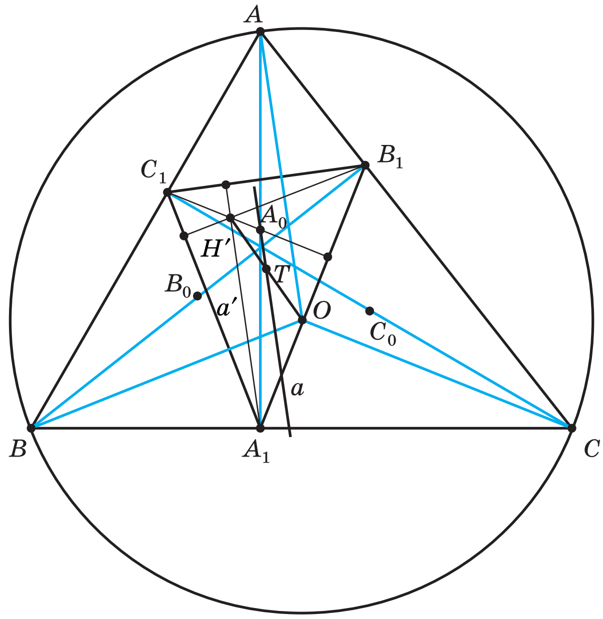


Рис. 9

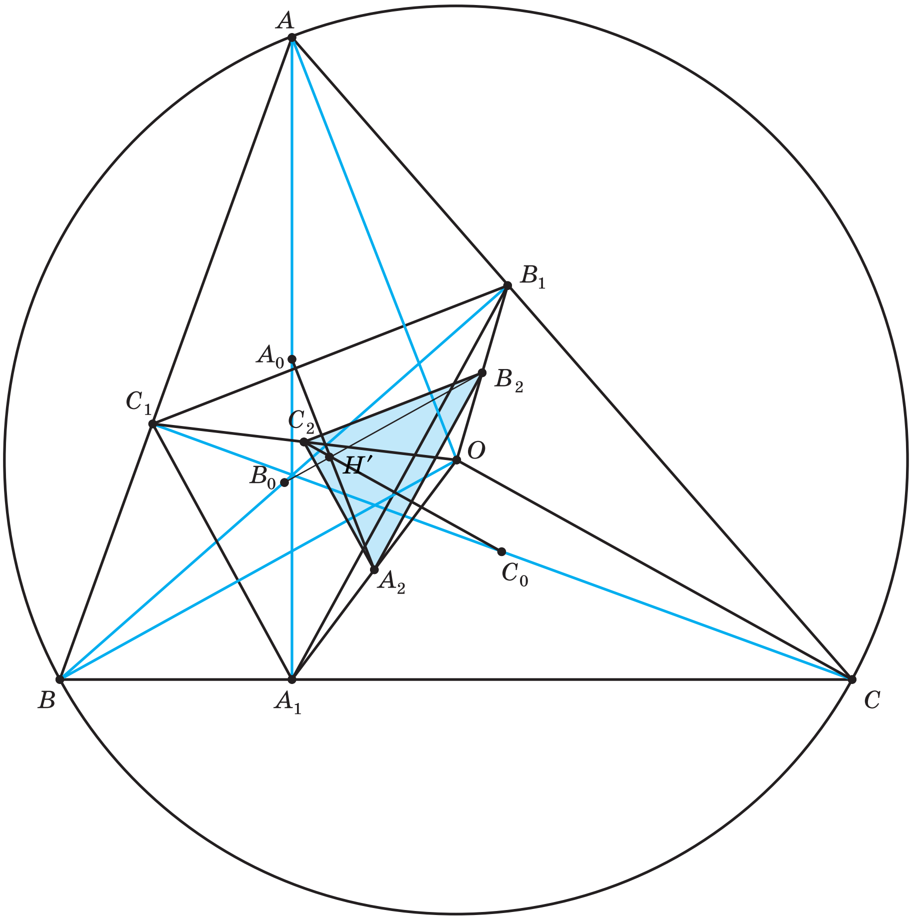


Рис. 8

Пусть T — середина отрезка OH'. Прямая, параллельная AO, проходящая через T, делит пополам любой отрезок с концами на параллельных прямых AO и a', в частности проходит через середину отрезка AA_1, то есть совпадает с прямой a. Таким образом, a проходит через T. Аналогично, прямые b и c проходят через T.

Это доказательство принадлежит молодому московскому геометру Юрию Блинкову, и оно получше будет, нежели авторское, ибо локализует местонахождение точки пересечения как середину отрезка с концами в известных точках, допускающих классическое описание.[25]

Но, как вскоре выясним, эта точка T имеет и совсем уже замечательную геометрическую суть.

Решение 2

Прямые a', b', c', проведенные через A_1, B_1, C_1 параллельно соответственно OA, OB, OC, являются высотами треугольника $A_1B_1C_1$. Обозначим точку их пересечения через H' (*рис. 9*).

[25] А поскольку центр описанной окружности совпадает с ортоцентром серединного треугольника, то точка пересечения является и серединой отрезка, соединяющего ортоцентры двух ортополярных треугольников, вписанных в одну и ту же окружность (в нашем случае — в окружность Эйлера), как это и предсказывала теорема 1.

Здесь представляется уместным сказать несколько слов о замечательных точках треугольника вообще.

Строгого математического определения замечательной точки треугольника не существует.

Имеется, правда, вполне научное определение так называемой центральной точки [5, с. 23], но, во-первых, под это определение не попадают многие точки, безусловно замечательные в интуитивном смысле, а во-вторых, попадают многие, которые скорее хотелось бы назвать ничем не примечательными. Говоря неформально, «степень замечательности» той или другой точки можно оценить дробью, в числителе которой — количество нетривиальных свойств, связанных с этой точкой, а в знаменателе — «сложность» ее построения.

Американский математик Кларк Кимберлинг уже многие годы собирает центральные точки. Свою коллекцию (Encyclopedia of Triangle centers, сокращенно ETC) он разместил на сайте [10]. Точке там присваивают порядковый номер, дают ее барицентрические координаты и приводят основные геометрические свойства.

Благодаря усилиям энтузиастов, без преувеличения можно сказать, всего мира (большое спасибо современным средствам связи и современным же геометрическим программам) в настоящее время[26] количество центров в ETC достигло внушительной цифры 3 587.

У читателя, не знакомого с ETC, может возникнуть вполне естественный вопрос: «А как все же проверить, значится ли потенциально новая точка в списках? Неужели сравнивать координаты с более чем 3 500 других?» Да и сами координаты не всегда так уж просто вычислить. Согласитесь, довольно удручающая вырисовывается перспектива: считали-считали, сосчитали, наконец; затем начали сравнивать — и вдруг, шаге на 3 000-м, обнаружили совпадение с известной точкой!

Но вот что придумал хитроумный Кимберлинг.

В его Энциклопедии каждой точке, помимо порядкового номера и координат, присвоено еще и некое число. Это число — расстояние от данной точки[27] до прямой, содержащей сторону BC треугольника ABC со сторонами $BC = 6$, $CA = 9$, $AB = 13$.

К примеру, мы открыли, что медианы пересекаются в одной точке, но не знаем, есть ли такая в ETC.

Тогда вычислим соответствующее расстояние[28] (см. *рис. 10*) и заглянем в Энциклопедию.

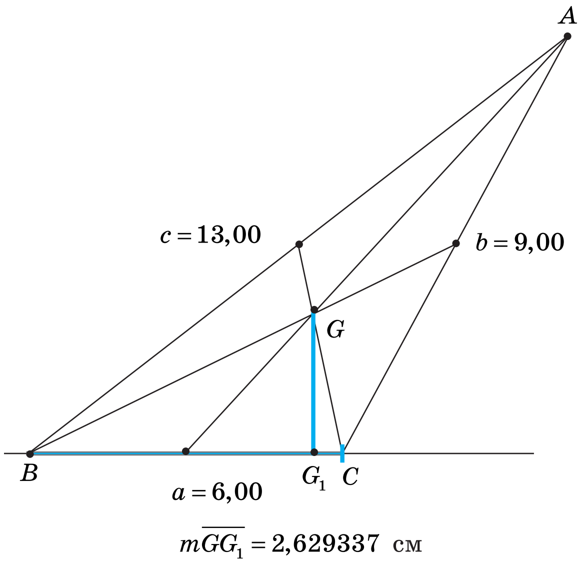


Рис. 10

Мы увидим два столбца: в правом находится расстояние (таблица упорядочена именно по возрастанию расстояний), а в левом — порядковый номер. В нашем случае, мы довольно быстро найдем нужную строчку:

2	2.629368792488

А затем уже открываем список точек по номерам и видим, что точка под номером 2 — так называемый центроид. (Если же вдруг найденное число в списках не значится, то точка новая и нужно срочно писать письмо Кимберлингу. Он с удовольствием добавит ее в коллекцию и, более того, окрестит Вашим именем.)

§ 5. Всем льстят победы дух и привкус новизны

И когда возникло сильное желание разобраться с точкой T, я поступил описанным выше способом, воспользовавшись ETC. Меня ожидал приятный сюрприз: точкой T оказался центр окружности Тэйлора. На этой окружности лежат шесть оснований перпендикуляров, опущенных из оснований высот треугольника на прямые, содержащие пары остальных сторон.

[26] По состоянию на июнь 2010 г.

[27] Взятое со знаком «+», если точка находится «над» прямой BC, и со знаком «−» в противоположном случае. Это расстояние не что иное, как нормированная трилинейная координата точки (первая). Можно также показать, что центральная точка ею однозначно определяется.

[28] С помощью программы типа Geometrical Sketchpad или Cabri.

(Практикум «по Кимберлингу»: Узнайте точку!

Поскольку мы показали, что треугольник $A_0B_0C_0$ с вершинами в серединах высот треугольника ABC ортологичен его ортотреугольнику $A_1B_1C_1$, то в силу теоремы Штейнера (см. § 4) должно выполняться и обратное утверждение, то есть перпендикуляры, проведенные из вершин ортотреугольника $A_1B_1C_1$ к соответствующим сторонам треугольника $A_0B_0C_0$, будут пересекаться в некоторой точке P (см. *рис. 11*).

Отыщите ее «в Кимберлинге», действуя по указанной процедуре. Ответ приведен в конце статьи.)

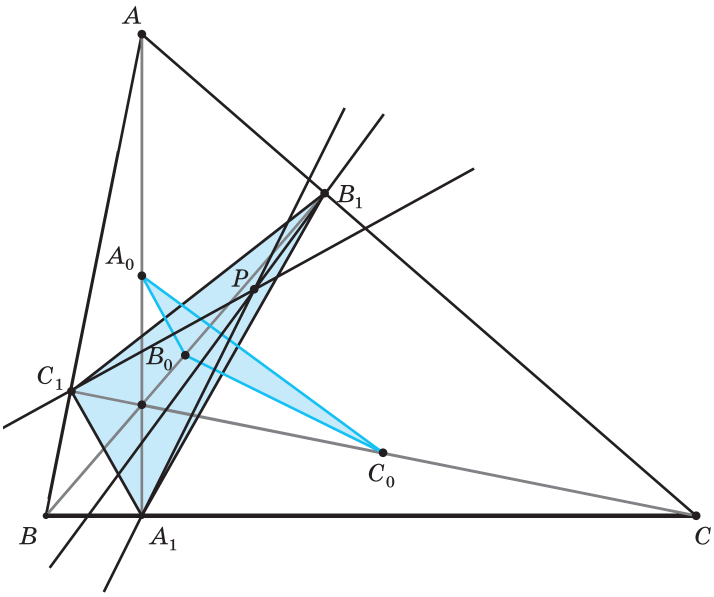


Рис. 11

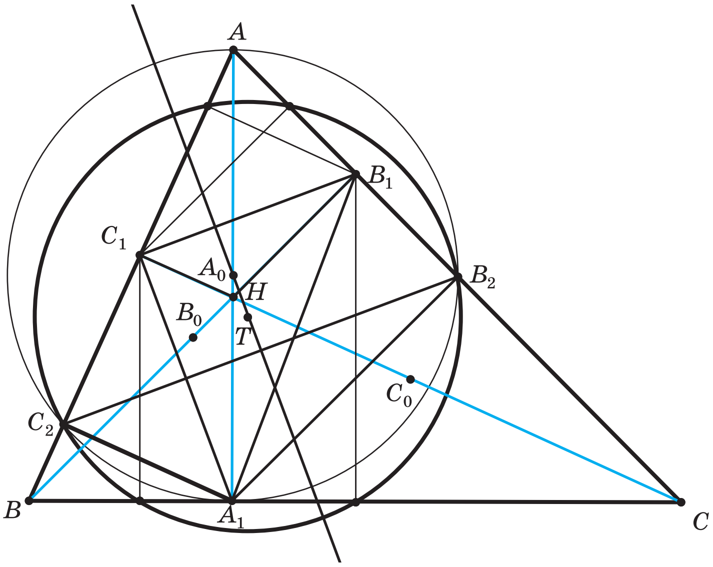


Рис. 12

Теорема о точке T

Считая факт существования окружности Тэйлора известным, легко понять, что наша точка T и есть ее центр.

Доказательство

В самом деле, рассмотрим хорду этой окружности B_2C_2, соединяющую основания перпендикуляров, опущенных на стороны из точки A_1 — основания соответствующей высоты (см. *рис. 12*).

Понятно, что серединный перпендикуляр к этой хорде проходит через центр окружности Тейлора T. С другой стороны, он же проходит через точку A_0 — середину высоты AA_1, поскольку точка эта есть центр окружности, описанной около четырехугольника $AC_2A_1B_2$, образованного двумя прямоугольными треугольниками с общей гипотенузой AA_1 и B_2C_2 — также хорда и этой окружности. Остается только заметить, что прямые B_1C_1 и B_2C_2 параллельны (получаются одна из другой соответствующей гомотетией с вершиной A и коэффициентом $k = \dfrac{AH}{AA_1}$). А потому рассмотренный перпендикуляр совпадает с прямой a. И аналогично для двух других прямых.

Поговорим теперь об окружности Тэйлора подробнее — она того заслуживает.

Оказывается, она является частным случаем так называемых окружностей Тукера. В свой черед окружность Тукера — это окружность, описанная около шестиугольника Тукера, который может быть построен следующим образом (см. *рис. 13*).

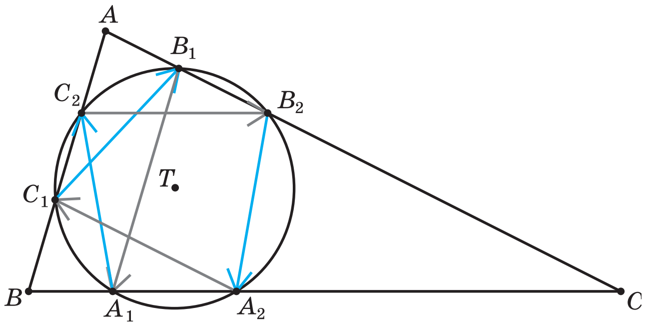


Рис. 13

На стороне BC (или ее продолжении) произвольного треугольника ABC выберем случайным образом некую точку A_1 и из нее проведем антипараллель[29] (*об антипараллелях*

[29] Впрочем, начинать можно и с параллели. Затем пойдет антипараллель и т. д.

см. § 4) к стороне AC. Пусть она пересекает сторону AB (или ее продолжение) в некоторой точке C_2. Из этой точки проведем параллель к BC и отметим точку B_2 ее пересечения с AC. Далее, чередуя антипараллели с параллелями, получим еще три точки на сторонах (или их продолжениях) треугольника ABC, причем шестой шаг обязательно вернет нас в исходную точку A_1 (то есть процесс замыкается на ней). Полученный шестиугольник и есть шестиугольник Тукера. Около него всегда можно описать окружность (разумеется, Тукера), а его три антипараллели обязательно равны друг другу.

Обо всем этом и о многих других свойствах окружностей Тукера и Тэйлора см.: [1, с. 169]; [7, з. 5.159, 5.160, 5.161], [9, гл. 9]. Но приведенное ниже новое и поистине очаровательное доказательство (из тех, которые Хонсбергер называет a Real Jem) существования окружности Тэйлора в этих книгах (и, наверное, ни в каких других) не сыскать. Дело в том, что оно родилось буквально вот только что, весною 2010 года, и устанавливает неожиданную связь классической окружности Тэйлора с ее лишь недавно явившейся свету коллегой — так называемой окружностью Конвея.

Автор доказательства — еще один молодой московский геометр Дмитрий Прокопенко.

Однако обо всем по порядку.

В 1998 году знаменитый математик Джон Конвей порадовал любителей элементарной геометрии следующей любопытной конструкцией (см. *рис. 14*).

В произвольном треугольнике ABC на прямых AB и AC отложим (вовне относительно треугольника) от точки A отрезки, равные стороне BC. Концы этих отрезков, отличные от вершины, дают две новые точки A_1 и A_2. Аналогично построим точки B_1, B_2, C_1, C_2. Несложно показать, что все шесть построенных таким образом точек лежат на одной окружности. Центр ее совпадает с центром вписанной в треугольник окружности, а радиус равен $\sqrt{r^2+s^2}$, где r — радиус вписанной в треугольник окружности, а s — полупериметр (так как один из катетов выделенного на рисунке прямоугольного треугольника — r, а второй равен $(s-a)+a=s$). При этом три хорды окружности имеют одинаковую длину:

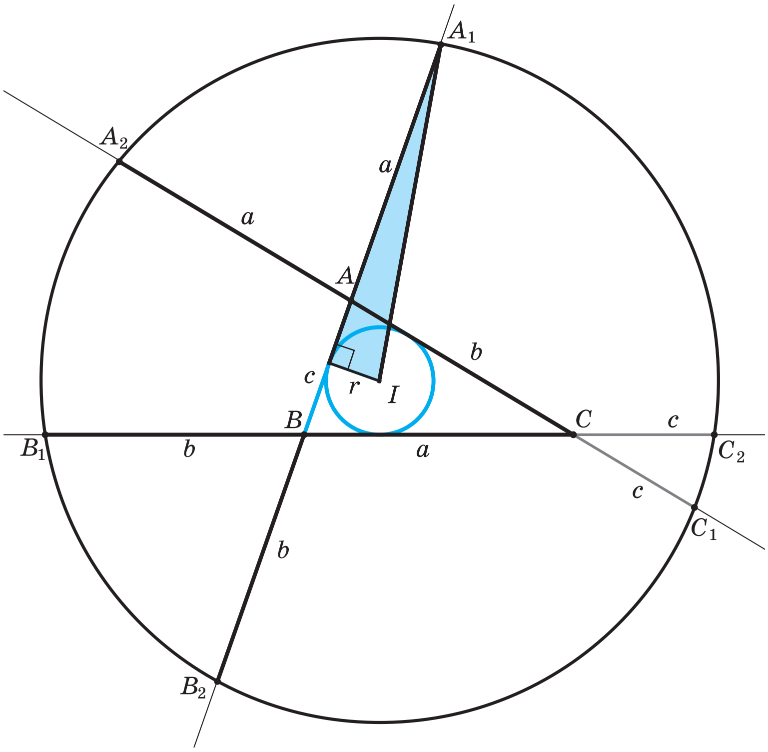


Рис. 14

$$A_1B_2 = A_2C_1 = B_1C_2 = 2s = a+b+c.$$

Обратим внимание на то, что центр вписанной в треугольник окружности имеет трех ближайших «родственников» — центры окружностей вневписанных. Точки, допускающие подобное «расщепление», Конвей предложил именовать «weak points», то есть слабыми.[30]

А поскольку только что рассмотренная окружность концентрична вписанной, возникает подозрение, что и у нее должны найтись три «сестрицы» — добавочные окружности Конвея, концентричные соответствующим вневписанным окружностям.

И так оно и есть на самом деле. К примеру, чтобы получить добавочную окружность Конвея с центром в I_a (вневписанной окружности, касающейся стороны BC и продолжения двух других), нужно действовать следующим образом: из вершины A отложить на прямых, содержащих стороны треугольника, отрезки, равные противолежащей стороне, не вовне, а вовнутрь. При вершине B: один отрезок вовне, другой вовнутрь, и аналогично при вершине C. Несложно убедиться в том, что получается окружность с центром

[30] Как альтернативный вариант перевода, вполне возможно сочное слово «квелый». Согласно Далю, квелый (кволый, квилкий) — хилый, слабый, нежный, болезненный; болький, чувствительный; жалобный, писклявый, недотрога.

I_a и радиуса $\sqrt{r_a^2+(s-a)^2}$ (где r_a — радиус соответствующей вневписанной окружности). Также справедливо равенство

$$A_1B_2=A_2C_1=B_1C_2=2(s-a)=b+c-a \text{ (см. } \textit{рис. 15}).$$

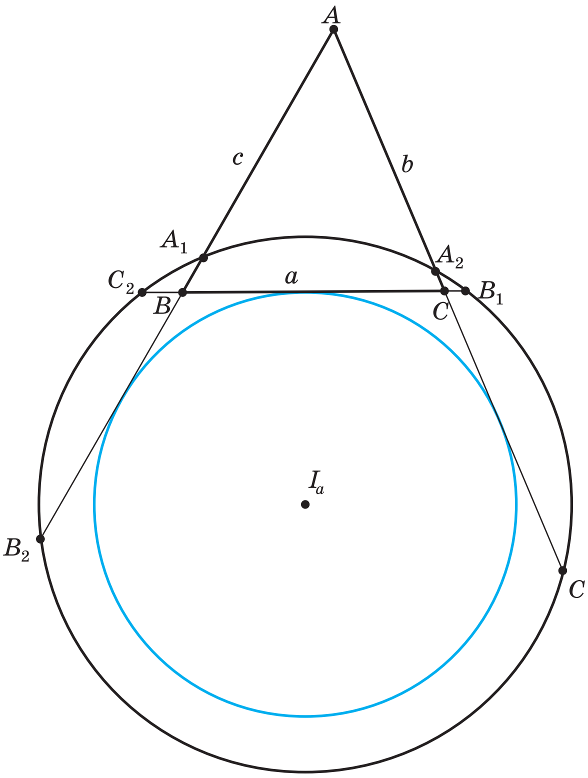


Рис. 15

Мне лично окружности Конвея дороги особенно, так как имел честь их переоткрыть в 2003 году, отстав от первопроходца всего-то лишь на пять годочков. «Повторение пройденного» — в элементарной геометрии совершенно типичная, обыкновенная история. Так, юбиляру однажды «переоткрылась» приятная во всех отношениях окружность Фурмана.[31] Поскольку в отечественной литературе она фактически нигде не фигурирует, немножко пройдемся (название статьи к этому подталкивает) и по ней.

Рассмотрим некоторый треугольник ABC и опишем около него окружность (см. *рис. 16*).

Середины соответствующих дуг (вторые точки пересечения внутренних биссектрис треугольника с описанной окружностью) обозначим[32] W_1, W_2, W_3, а точки, им симметричные относительно соответствующих сторон треугольника,— W_1', W_2', W_3'.

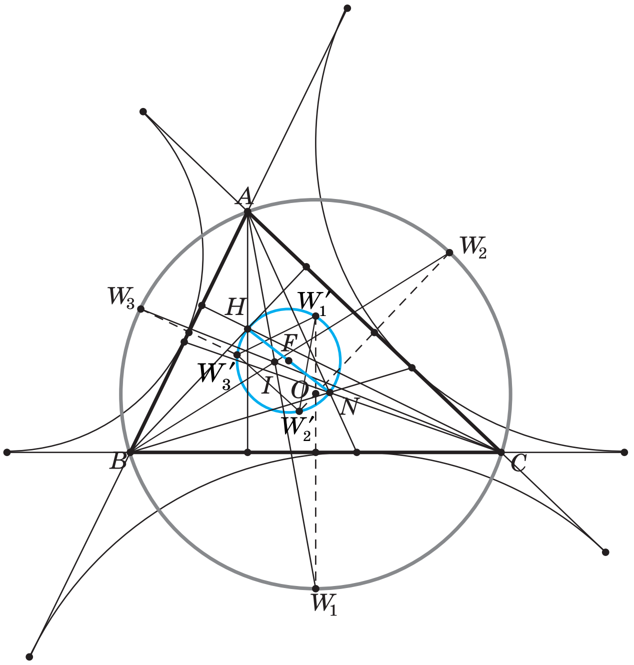


Рис. 16

Тогда эти симметричные точки лежат на окружности с диаметром HN, (где H — ортоцентр треугольника, а N — его точка Нагеля[33]). Ее и называют окружностью Фурмана.

Превосходное геометрическое доказательство и обсуждение прочих любопытных свойств этой окружности имеется в [9, гл. 6].

А теперь внимание — вопрос.

Сообразить на троих, или Добавочные окружности Фурмана

Точка Нагеля N, очевидно, является слабой.[34] Значит, слабым объектом является и окружность Фурмана.

Нарисуйте «портреты» трех ее сестер. (Ответ — в конце статьи.)

Наконец, обещанный эксклюзив.

---

31 Вильгельм Фурман (1833–1904) — немецкий математик.

32 Следуя И. А. Кушниру. Эти точки — одни из его любимейших.

33 Точка конкурентности прямых, соединяющих вершины треугольника с им противолежащими точками касания соответствующих вневписанных окружностей со сторонами.

34 Чтобы построить первую добавочную точку Нагеля N_a, нужно отметить точку A_1 касания вписанной окружности со стороной BC, точку B_1 касания соответствующей вневписанной окружности с продолжением стороны AC за точку A и точку C_1 касания другой вневписанной окружности с продолжением стороны AB также за точку A. Прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекутся в искомой точке.

Теорема Прокопенко

Если треугольник ABC — остроугольный, то его окружность Тэйлора совпадает с окружностью Конвея серединного треугольника ортотреугольника исходного треугольника (см. *рис. 17*).

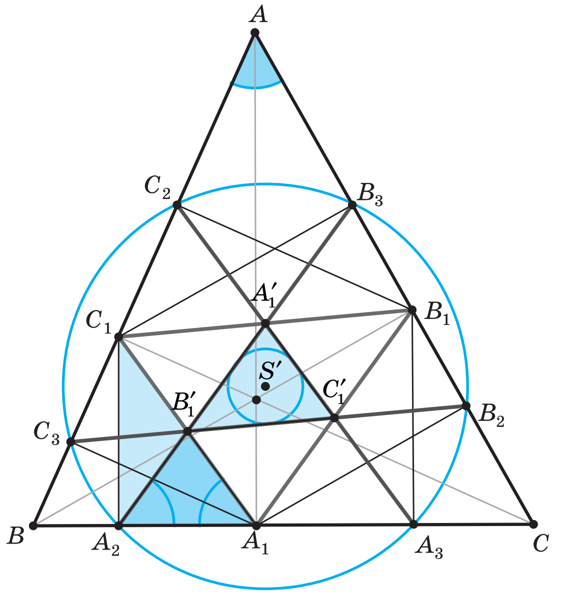


Рис. 17

В случае тупоугольного треугольника окружность Тэйлора совпадает с соответствующей добавочной окружностью Конвея (см. *рис. 18*, где тупым выбран угол при вершине B).

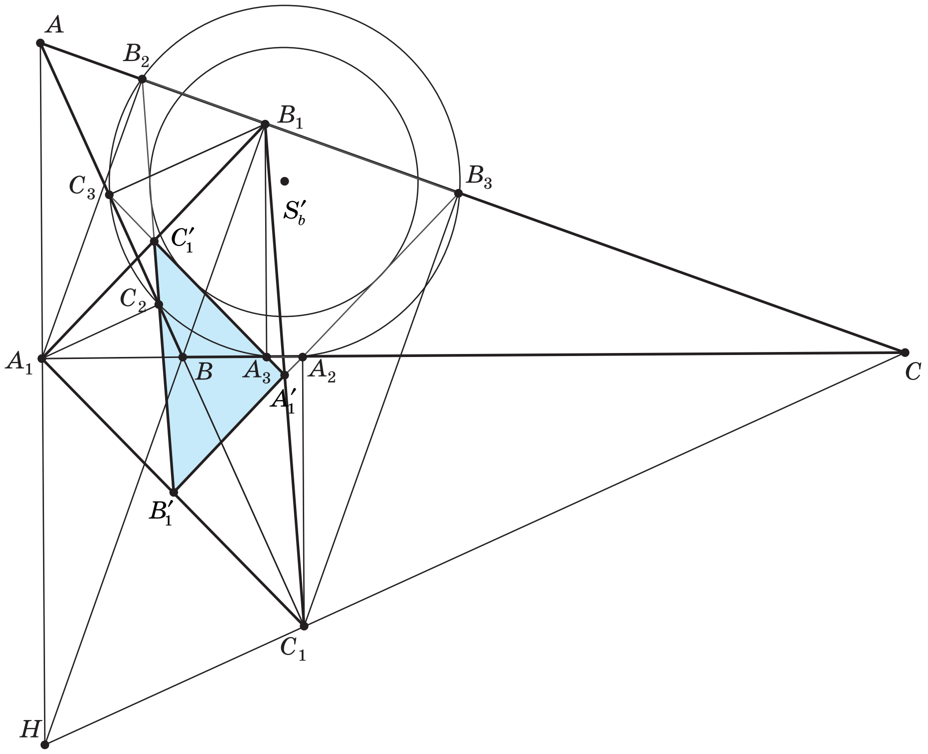


Рис. 18

Доказательство (см. рис. 17)

Ограничимся случаем остроугольного треугольника ABC. (Для тупоугольного треугольника доказательство аналогично.)

Пусть A_1', B_1', C_1' — середины сторон ортотреугольника $A_1B_1C_1$. Рассмотрим прямоугольный треугольник $A_1A_2C_1$. Поскольку точка B_1' — середина его гипотенузы A_1C_1, то

$$A_2B_1' = A_1B_1' = \frac{1}{2}A_1C_1 = A_1'C_1'$$

(как средняя линия). Отсюда, в частности, следует, что треугольник $A_1B_1'A_2$ равнобедренный. Кроме того, нам известно, что A_1C_1 — антипараллель к AC (см. окончание § 4). Поэтому

$$\angle B_1'A_2C = \angle B_1'A_1B = \angle BAC.$$

Но, как было установлено при доказательстве теоремы о точке T (см. начало § 5), отрезок A_2B_3 есть антипараллель к стороне AB, и поэтому $\angle B_3A_2C = \angle BAC$. Антипараллелью к этой же стороне является отрезок A_1B_1, параллельный средней линии $A_1'B_1'$. Отсюда заключаем, что отрезок A_2B_3 содержит отрезок $A_1'B_1'$. И так как $A_2B_1' = A_1'C_1'$, то, стало быть, точка A_2 принадлежит рассматриваемой окружности Конвея. Для остальных пяти точек окружности Тэйлора выполняются те же рассуждения, нужно только циклически переставить в нужных местах буквы и индексы.

Итак, доказано, что из существования окружности Конвея вытекает существование окружности Тэйлора.

Замечание — следствие

Центр окружности Тейлора как точки Шпикера ортотреугольника

Точкой Шпикера произвольного треугольника называют центр окружности, вписанной в его серединный.

Центры же вневписанных окружностей доставляют нам так называемые добавочные точки Шпикера.

Поскольку окружности Конвея концентричны с соответствующими вписанными —

вневписанными окружностями, только что мы еще и доказали утверждение:

Если треугольник ABC остроугольный, то центр окружности Тэйлора совпадает с точкой Шпикера его ортотреугольника. В случае тупоугольного треугольника центр окружности Тэйлора совпадает с соответствующей добавочной точкой Шпикера его ортотреугольника.

Предельный тренинг

Все исходные треугольники этого параграфа по умолчанию предполагались либо остроугольными, либо тупоугольными. А что же происходит в случае прямоугольного треугольника? Понятно, что в таком треугольнике ортотреугольник вырождается в высоту, опущенную на гипотенузу из вершины прямого угла. И тогда возникает ряд вопросов, но одного толка. А именно, что и почему в этом случае следует считать:

- ✓ окружностью Тэйлора и ее центром;
- ✓ многоугоугольником Тэйлора;
- ✓ серединным треугольником ортотреугольника и его окружностями Конвея;
- ✓ точками Шпикера ортотреугольника?

Призываю читателя поразмыслить над всем этим. (Ответы — через страницу.)

В заключение нашего путешествия давайте посмотрим, как представлено главное действующее лицо этого раздела в ETC:[35]

X(389) = CENTER OF THE TAYLOR CIRCLE

Trilinears $\cos A - \cos 2A \cdot \cos(B-C)$:

$\cos B - \cos 2B \cdot \cos(C-A)$:

$\cos C - \cos 2C \cdot \cos(A-B)$

Barycentrics $a\left[\cos A - \cos 2A \cdot \cos(B-C)\right]$:

$b\left[\cos B - \cos 2B \cdot \cos(C-A)\right]$:

$c\left[\cos C - \cos 2C \cdot \cos(A-B)\right]$

If ABC is acute then X(389) is the Spieker center of the orthic triangle. Peter Yff reports (Sept. 19, 2001) that since X(389) is on the Brocard axis, there must exist T for which X(389) is $\sin(A+T)$: $\sin(B+T)$: $\sin(C+T)$, and that $\tan(T)$ $= -\cot A \cdot \cot B \cdot \cot C$.

Let H_A be the A-altitude of triangle ABC, and let A' be the midpoint of segment AH_A. Let L_A be the line through A' parallel to AO, where O denotes the circumcenter. Define L_B and L_C cyclically. The lines L_A, L_B, L_C concur in X(389). (Construction by Alexei Myakishev, March 24, 2010.)

If you have The Geometer's Sketchpad, you can view X(389).

X(389) lies on these lines:
3,6 4,51 24,184 30,143 54,186 115,129 217,232 517,950

X(389) = midpoint of X(I) and X(J) for these (I,J): (3,52), (4,185), (974,1112)
X(389) = reflection of X(1216) in X(140)
X(389) = inverse-in-Brocard-circle of X(578)
X(389) = crosspoint of X(4) and X(54)
X(389) = crosssum of X(I) and X(J) for these (I,J): (3,5), (6,418)

Ответы

Практикум по Кимберлингу: Узнайте точку!

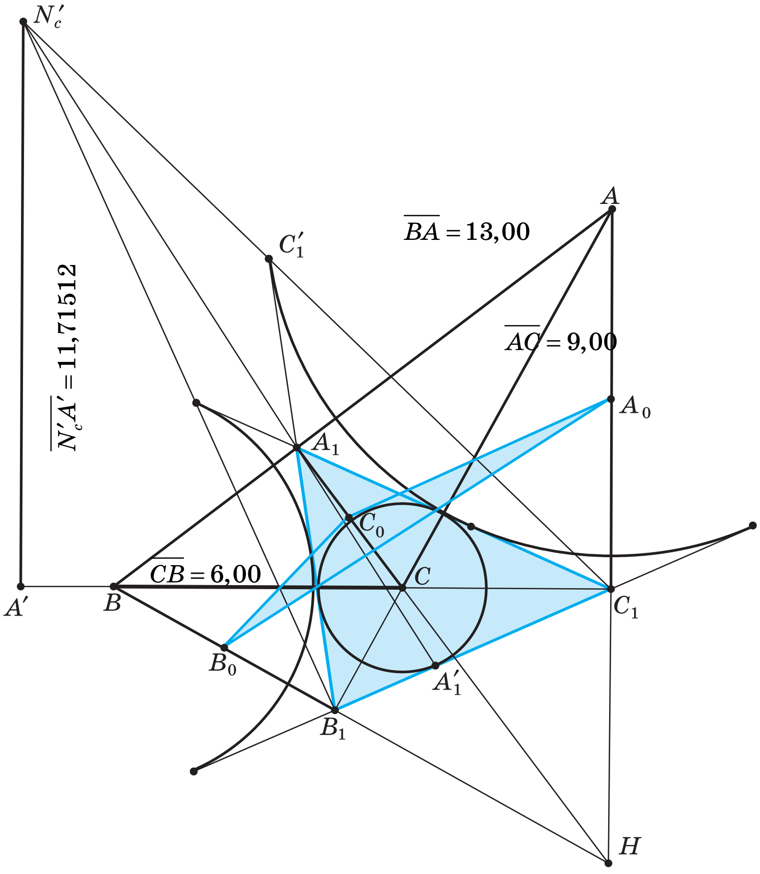


Рис. 19

Неукоснительно придерживаясь инструкции (см. *рис. 19*), выйдем к точке

[35] Два «крайних» свойства уже давно прописались в Энциклопедии. Именно их и доказали Прокопенко с Блинковым очень, надо отдать должное, оригинальным и самобытным образом. А «среднее», как видим, добавлено сравнительно недавно.

X(185) = NAGEL POINT OF THE ORTHIC TRIANGLE,

как она именуется в Энциклопедии. Однако рисунки 19 и 20 свидетельствуют о вкравшейся неточности: точку Нагеля получим, если исходный треугольник остроугольный (*рис. 20*). Если же треугольник тупоугольный (рис. 19), то речь должна идти о добавочной точке Нагеля.[36]

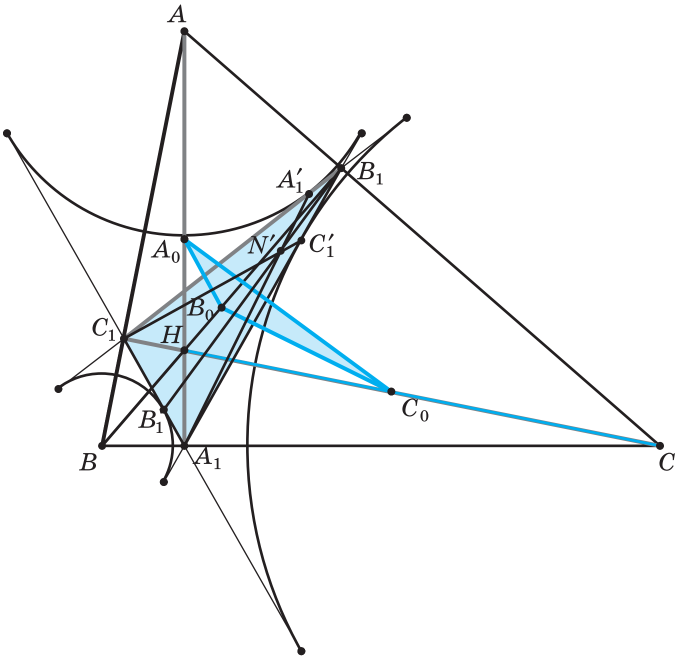


Рис. 20

Так, используя научно-технический прогресс, мы установили, где именно пересекаются перпендикуляры.

Оставляю читателю в качестве заключительного упражнения отыскать не особо сложное геометрическое тому обоснование.

Сообразить на троих, или Добавочные окружности Фурмана

Первая добавочная окружность Фурмана строится на отрезке с концами в первой добавочной точке Нагеля и в ортоцентре как на диаметре. Как и прежде, она содержит одну из точек, симметричных точкам пересечения внутренних биссектрис с описанной окружностью относительно соответствующих сторон. И еще две точки, симметричные точкам пересечения внешних биссектрис двух других углов относительно оставшихся сторон (см. *рис. 21*).

Предельный тренинг

Рассмотрим остроугольный треугольник, близкий к прямоугольному, и устремим соответствующий угол к прямому (см. *рис. 22*). Тогда очевидно, что ортотреугольник вырождается в «треугольник», у которого две стороны совпадают с высотой, опущенной из вершины прямого угла, а третья равна нулю. Серединный же его треугольник будет стремиться к «равнобедренному треугольнику» CA_0, в котором две стороны равны половине высоты, а третья — нулевая (бесконечно малая), но направленная вдоль антипараллели B_2C_2 (поскольку, из предельных соображений, есть вырожденная антипараллель к BC). Центром вписанной окружности такого треугольника в пределе будет, понятно, точка S', совпадающая с серединой высоты A_0. Поскольку в прямоугольнике $A_1C_2AC_1$ диагонали равны и делятся точкой пересечения A_0, то

$$AA_0 = A_1A_0 = A_0C_2 = A_0B_2$$

и окружность Конвея для вырожденного серединного треугольника совпадет с окружностью, описанной около этого прямоугольника. Эта же

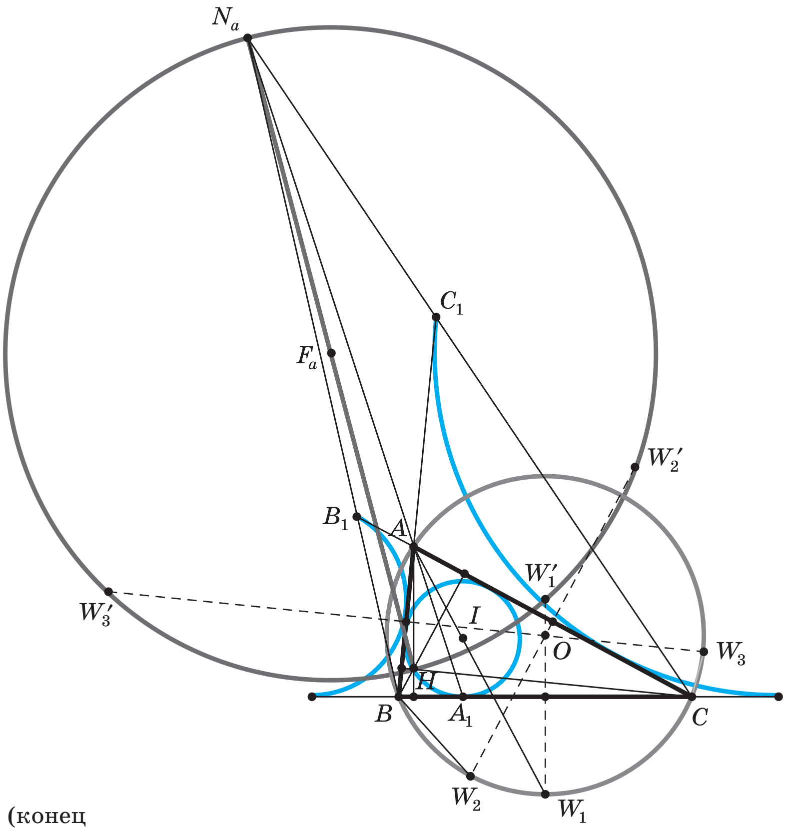


Рис. 21

[36] О чем тотчас же, по обнаружении неувязки (конец июня 2010), было доложено электронной почтой самому. Кимберлинг отвечал, что поправит.

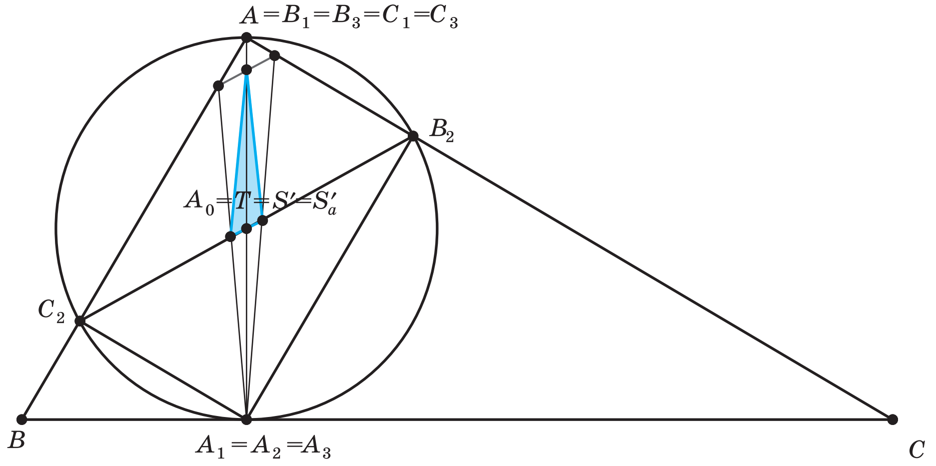
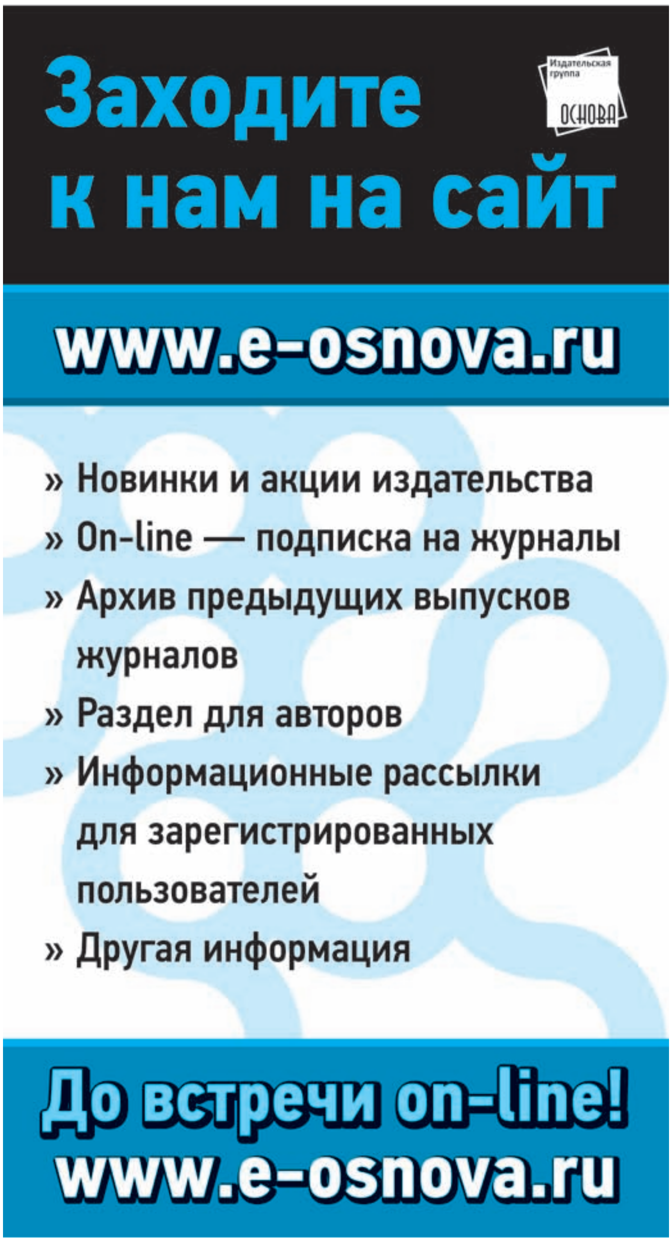


Рис. 22



окружность (в чем можно убедиться непосредственно, опять-таки из предельных соображений) и будет (немного, конечно, вырожденной) окружностью Тейлора прямоугольного треугольника. А взяв старт с треугольника тупоугольного (близкого к прямоугольному), придем к аналогичным выводам относительно добавочной окружности Конвея. (Она, конечно, в пределе совпадет с основной окружностью).

Литература

1. *Ефремов Д.* Новая геометрия треугольника. — Одесса : Матезис, 1902. (В электронном виде книга доступна по адресу : htpp://mirror1.mccme.ru/ilib/djvu/ngt/ngt.htm)
2. *Коксетер, Г., Грейтцер С.* Новые встречи с геометрией. — М.–Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.
3. *Кушнир И.* Геометрия на баррикадах. — К. : Факт, 2009.
4. *Кушнир И.* Триумф школьной геометрии. — К. : Наш час, 2005.
5. *Мякишев А.* Элементы геометрии треугольника. М. : МЦНМО, 2009.— (Библиотека «Математическое просвещение», выпуск 19)
6. *Игорь* Федорович Шарыгин. К семидесятилетию со дня рождения / сост.: А. Заславский, В. Протасов, Д. Шарыгин. — М. : МЦНМО, 2007.
7. *Прасолов В.* Задачи по планиметрии. — М. : МЦНМО, 2007.
8. *The American* Mathematical Monthly. Volume 59, number 8, October, 1952.
9. *Honsberger R.* Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry. (New Mathematical Library, issue 37). The Mathematical Association of America, 1995.
10. *Kimberling C.* Encyclopedia of Triangle Centers.— http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

Май 2006, Одесса — Июнь 2010, Москва