Revista Escolar
de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática
ISSN 1698-677X

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 42 (marzo 2011 – junio 2011)

ISSN – 1698-277X

ÍNDICE

Presentamos soluciones a los problemas 21 y 38, que permanecían abiertos, de Roberto Bosch Cabrera, Florida (U.S.A.), al tiempo que le pedimos excusas por no habernos hecho eco de sus soluciones cuando publicamos las de estos problemas que permanecían abiertos.

Presentamos una solución al problema 144, de Saturnino Campo Ruiz (Salamanca, España), que por alguna razón no había llegado al editor, por lo que le pedimos excusas al Prof. Campo.

Recibida una solución al problema 197, por Raúl A. Simón Elexpuru (Chile), una vez publicado el número correspondiente.

Problema 201

Recibidas soluciones de: Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, España; Saturnino Campo Ruiz, Salamanca, España; Gabriel Alexander Chicas Reyes, El Salvador; Pedro Luis Clavería Vila, Zaragoza, España; Dones Colmenárez, Barquisimeto, Venezuela; Mariela Lilibeth Herrera Ruiz, Maracay, Venezuela; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Bruno Salgueiro Fanego, Vivero, España; Cristóbal Sánchez-Rubio García, Benicasim, España; y el proponente, todas muy similares.. Presentamos la solución de Chica Reyes.

Problema 202

Recibidas soluciones muy similares de: Roberto Bosch Cabrera, Florida, USA; Gabriel Alexander Chicas Reyes, El Salvador; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Jorge Mozo Fernández, Valladolid, España; Bruno Salgueiro Fanego, Vivero, España; Cristóbal Sánchez-Rubio García, Benicasim, España; y el proponente. Presentamos la solución de Bosch Cabrera.

Problema 203

Recibidas soluciones de: Roberto Bosch Cabrera, Florida, USA; José Hernández Santiago, Oaxaca, México; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Joaquín Rivero Rodríguez, Zalamea de la Serena, España; Bruno Salgueiro Fanego, Vivero, España; Jorge Tipe Villanueva, Lima, Perú; y el proponente. Presentamos las soluciones de Lasaosa, Rivero, Salgueiro y Tipe.

Problema 204

Recibidas soluciones de : Roberto Bosch Cabrera, Florida, USA; José Hernández Santiago, Oaxaca, México; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Joaquín Rivero Rodríguez, Zalamea de la Serena, España; Bruno

Problema 205

Recibidas soluciones de: Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, España; Roberto Bosch Cabrera, Florida, USA; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Ricard Peiró, Valencia, España; Bruno Salgueiro Fanego, Vivero, España; Cristóbal Sánchez-Rubio García, Benicasim, España; y el proponente. Presentamos la solución de Sánchez-Rubio

Comentario de páginas web y de libros publicados, y noticias de congresos 42

Comentario al libro de Mª Victoria Veguin Casas *Historia de las Matemáticas en la Península Ibérica (desde la Prehistoria al siglo XV),* ed. Reverté, 2011.

Divertimentos matemáticos 42

El teatro como herramienta didáctica: *La rebelión de los números,* de Antonio de la Fuente Arjona.

Cartas al editor

Las opiniones recogidas en esta sección son, evidentemente, de la exclusiva responsabilidad de sus autores. Nos hacemos eco de ellas cuando el editor considera que tienen alguna relevancia o suponen una aclaración importante en cuestiones tan controvertidas como la primera autoría o publicación de algún resultado.

Sobre el artículo *Una prueba elemental del teorema de Pascal (REOIM nº 39)* ; comentario del Prof. Lucas Martín Andisco, Mar del Plata, Argentina.

Desarrollada en el Centro de Altos Estudios Universitarios de la OEI con el apoyo de la Agencia Española de Cooperación Internacional para el Desarrollo (AECID)

Editor: Francisco Bellot Rosado

Acceder

http://www.oei.es/oim/revistaoim/numero42.htm

Curso iberoamericano de formación de profesores de secundaria en el área de matemáticas Ñandutí

El curso está dirigido al profesorado de Enseñanza Secundaria en ejercicio de cualquiera de los países iberoamericanos. Cualquier docente de este nivel puede solicitar participar. No es necesario ningún tipo de requisito previo salvo el impartir docencia en ese nivel que acreditará cuando se le solicite. Tampoco es necesario poseer una formación previa en el manejo de los medios informáticos porque, precisamente, uno de los objetivos del curso es proporcionar esos conocimientos a quienes estén dispuestos a formarse para la utilización de esos recursos. En este sentido, habrá una unidad cero cuyo contenido va en esa línea.

http://www.oei.es/cursomatematica/

Abel y las Ecuaciones Integrales

José Manuel Sánchez Muñoz

6 de mayo de 2011

Resumen

El nombre de Niels Henrik Abel tiene un lugar privilegiado en el Olimpo Matemático, al lado de nombres como Newton, Euler, Gauss, Cauchy o Riemann. A lo largo de su corta vida, realizó numerosas contribuciones matemáticas tan importantes como significativas. Aunque sus estudios se centraron fundamentalmente en el álgebra y el cálculo integral, su nombre será siempre asociado a algunas ramas del análisis, particularmente a la teoría de las ecuaciones integrales, cuyo desarrollo sistemático llevaron a cabo Volterra, Fredholm y Hilbert setenta años después de sus descubrimientos.

Palabras Clave: Ecuaciones Integrales, Abel, Funciones Trascendentes, Quíntica.

1. Introducción

Ofrecemos a nuestro lector una traducción de un artículo llamado *"Auflösung einer mechanischen Aufgabe"* que Abel publicó en el *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle), Vol. I, 1826, pp. 153–157; *Oeuvres Complètes, Nouvelle édition par L. Sylow et S. Lie*, Vol. I, 1881, pp. 97–101. Se trata de una versión revisada y mejorada de unos estudios anteriores con el nombre de *"Solution de quelques problèmes a l'aide d'intégrales définies", Magazin for Naturvidenskaberne, Aargang I, Bind 2, Christiania, 1823; Oeuvres Complètes.* Vol. I, pp. 11–18.

Abel resolvió el famoso problema de la curva tautócrona mediante su reducción a una ecuación integral que desde entonces lleva su nombre. Su elegante solución necesita de una ligera modificación para ser presentada de una forma moderna. Esta solución y las fórmulas

$$\phi(x) = \int_0^\infty dq\, f(q) \cos qx, \qquad f(q) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dx\, \phi(x) \cos qx$$

dadas por Fourier[1] son quizás los primeros ejemplos de la expresión implícita de una función desconocida de una ecuación en la que esta función aparece en

[1] *"Théorie de mouvement de la chaleur les corps solides" Mémoires de l'Académie royale des sciences de l'Institut de France*, Vol. 4, 1819–1820 (publicado en 1824) pp. 185–555 (489). Esta memoria fue presentada por Fourier en 1811 y fue premiada en 1812.

forma integral. Una ecuación que puede ser reducida a la que Abel dio, fue dada casi de forma simultánea por Poisson[2], sin solución. Gracias a la ecuación de Abel y a otras ecuaciones integrales análogas existe ahora un amplia bibliografía sobre el tema, relacionada estrechamente con los conceptos de integrales y derivadas de orden no entero[3] sugeridos por primera vez por Leibniz (1695) y Euler[4]; el concepto fue desarrollado posteriormente por Liouville y Riemann[5], y en la actualidad hay aplicaciones muy importantes a varios problemas de análisis puro y aplicado.

2. Niels Henrik Abel (1802-1829)


Niels Henrik Abel

Sobre la vida y obra de Niels Henrik Abel se ha escrito una gran cantidad de bibliografía. Casi toda, por no decir la totalidad, coincide en una misma afirmación, que Abel ha sido el matemático escandinavo más brillante de la historia. Su vida presenta todos los ingredientes de un melodrama; la pobreza de un genio que muere consumido en su barrio natal, mientras que egoístas académicos le niegan un lugar privilegiado entre ellos que tanto necesitaba y merecía. Desafortunadamente, éstos mismos académicos sólo fueron capaces de rectificar la injusticia cometida con él cuando ya era demasiado tarde, el cuerpo y el genio de Abel se habían ido apagando poco a poco, víctimas de la incomprensión y la tuberculosis.


Iglesia de Gjerstad. Foto tomada en torno a 1890-1895

Søren Georg Abel, párroco luterano de una pequeña isla de la ciudad de Stavenger llamada Finnøy, en la costa sudoccidental noruega, era un ambicioso teólogo educado en la Universidad de Copenhage; su mujer, Anne Marie Simonsen, era la hija de Niels Henrik Saxild Simonsen, un mercader de Risør, dueño de una flota de barcos. Su segundo hijo Niels Henrik, nació el 5 de Agosto de 1802.

[2] *"Second Mémoire sur la distribution de la chaleur dans les corps solides"*, *Journal de l'Ecole Polytechnique*, Cahier 19, Vol. 12, 1823, pp. 249–403 (299).

[3] Existe toda una rama del análisis denominada Cálculo Fraccional.

[4] Leibniz, *Mathematische Schriften, herausgegeben* de C.I. Gerhardt, Halle, Vol.3, 1855 (cartas de Johan Bernoulli), Vol. 4, 1859 (cartas a Wallis).

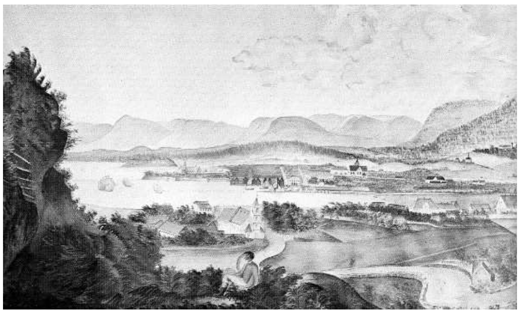
L. Euler, *"De progressionibus trascendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt"*, *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, Vol. 5, 1730-1731, pp. 36–57 (55–57); Opera Omnia (1)14, pp. 1–25 (23–25).

[5] J. Liouville, *"Mémoire sur quelques questions de géometrie et de mécanique, et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces questions"*, *Journal de l'Ecole Polytechnique*, Cahier 21, Vol. 13, 1832, pp. 1–69; *"Mémoire sur le calcul des différentielles a l'indices quelconques"*, *ibidem*, pp. 71–162.

B. Riemann, *"Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation"*, *Werke*, 2nd edition, 1892, pp. 353–366.

Fue el segundo de siete hermanos (seis niños y una niña). Cuando Niels tenía sólo un año de edad, su padre fue designado pastor de un lugar llamado Gjerstad cerca de Risør. Aquellos primeros años fueron tiempos difíciles, dado que Noruega pasaba por un época crítica para su desarrollo político y económico. En el país dominaba la pobreza, el hambre, y la carestía. Antes en 1789 había comenzado la Revolución francesa, y años más tarde, el gran conquistador Napoleón en el apogeo máximo de su poder e influencia sobre Europa, había forzado a Noruega a la unión política con Dinamarca, y aunque ambas naciones pretendieron ser neutrales en el transcurso de las guerras que se desencadenaron, sufrieron un fuerte ataque naval de Inglaterra en Copenhague (1801), y un bloqueo de la costa noruega en 1807, además de tener que afrontar posteriormente un enfrentamiento militar con Suecia (1813). Tras las guerras napoleónicas, dado que los noruegos habían realizado varios intentos de independizarse de Suecia sin éxito, su padre, un profundo nacionalista, y habida cuenta de su actividad política , fue considerado para ser elegido miembro en el cuerpo legislativo del Storting o Parlamento Noruego, encargado en 1814 de reescribir la constitución noruega con el fin de disolver la unión con Dinamarca y pactar la anexión a Suecia.

Unos años antes, Søren había llevado a cabo varias campañas eficaces, como la fundación de la primera Universidad noruega en Cristianía (actual Oslo) que tuvo lugar en 1811, la cual se pudo crear al proveerse de un cuerpo docente constituido por los mejores maestros de la Escuela Catedralicia de Cristianía (existente desde la Edad Media), inaugurando la docencia universitaria en 1813. Pero Noruega estaba inmersa en una profunda crisis, y el padre de Abel fue incapaz de resolver la precaria situación familiar, por lo que difícilmente pudo lograr escolarizar a su primogénito y a Niels Henrik.



Cristianía en julio de 1814
Pintura de Margrethe Kristine Tholstrup

A la edad de trece años, en 1815, su hijo Niels ingresaría a duras penas en la Escuela Catedralicia de Cristianía, en la moderna ciudad de Oslo. La escuela tenía una inmejorable reputación, pero acababa de perder a parte de sus mejores profesores que se habían mudado a la Universidad Real Frederik, lo que provocó que parte del entusiasmo intelectual de los alumnos de la Catedralicia se viera pronto frenado. Al principio de su instrucción, Abel se mostraría como un estudiante indiferente, más bien mediocre y sin que ni siquiera las matemáticas le despertaran atracción alguna. Sin embargo, afortunadamente, se produjo un inesperado cambio en su actitud tras la muerte de un condiscípulo suyo ante los malos tratos recibidos por un maestro brutal que se excedía con métodos pedagógicos mediante castigos corporales a sus alumnos. El maestro fue entonces relevado (1818) por un joven aunque capaci-

Bernt Michael Holmboe

tado profesor matemático llamado Bernt Michael Holmboe (1795-1850), quien inició su misión motivando a sus alumnos para que resolvieran por sí mismos algunos problemas de álgebra y geometría. Supo así vislumbrar entonces el gran potencial de Abel, teniendo que escoger cuestiones especiales para él, a la vista de su enorme capacidad. Según coinciden varios historiadores, es en aquel momento crucial de la vida de Abel, cuando *"se consagra a las matemáticas con la pasión más ardiente"*, adquiriendo rápidamente un pleno conocimiento de las matemáticas elementales.

Bajo las enseñanzas de Holmboe, el joven Abel comenzó a familiarizarse con trabajos de mayor nivel como los de L. Euler (1707-1803) sobre el cálculo (obras que fueron textos universitarios durante más de cien años)[6], Lagrange y Laplace. Registros Bibliotecarios, acreditan que durante su primer año universitario, Abel había solicitado en préstamo, la *Arithmetica Universalis* y *Principia Mathematica* de I. Newton, *Disquisitiones Arithmmeticae* de C. F. Gauss, o *Calcul de fonctions* de J. L. Lagrange entre otras obras de grandes maestros. Años más tarde le preguntaron cómo pudo situarse tan rápidamente en primera fila, a lo que Abel replicó:

> *"...estudiando a los maestros, no a sus discípulos."*

En esta época, la carrera política del padre de Abel acababa de forma inesperada y trágica en Septiembre de 1818, expulsado del Parlamento debido a falsas acusaciones contra algunos de sus colegas. Inmerso en una profunda depresión, Søren se había refugiado en la bebida como válvula de escape a sus problemas lo que le hizo enfermar gravemente. El padre de Abel fallecía sólo dos años después en 1820. En su funeral, su viuda Anne Marie Abel bebió en exceso y se fue a la cama con uno de sus sirvientes a la vista de todos los asistentes al acto. Esta pérdida sumiría a la familia en una situación crítica, recayendo sobre Abel una gran responsabilidad para su sustento, ya que su hermano mayor estaba incapacitado para trabajar por enfermedad. Su madre cayó en una profunda depresión difícil de superar lo que la hizo convertirse en una alcohólica.

Niels Henrik Abel (retrato original)
Este es el único retrato de Abel que se hizo en vida. Se trata de un grabado realizado por Johan Gørbitz en otoño de 1826 durante su estancia en París. ©Matematisk Institutt, Universidad de Oslo.

En 1821, a pesar de la precaria situación en la que vivían él y su familia, Abel logra ser matriculado en la Universidad Real Frederik y en atención a

[6]A los 16 años, Abel generalizó el teorema del binomio formulado por Isaac Newton (y extendido luego a los números racionales por Euler), dando una prueba válida, no sólo para números enteros y racionales, sino también para los casos de exponentes irrarionales e imaginarios.

una solicitud tramitada por su mentor Holmboe, se le concede a Abel con carácter excepcional, alojamiento gratuito y una modesta aportación monetaria para pequeños gastos (parte de la misma sufragada particularmente por el propio Holmboe). En aquel entorno universitario y en su ciudad, Abel ya estaba reconocido como un genio sobre el que sus profesores comenzaban a depositar grandes esperanzas desde el punto de vista científico.


Antigua Universidad de Cristianía (en el actual Oslo)

Durante su último año en la universidad, cuando sólo tenía veinte años, Abel comenzó a atacar el viejo problema de encontrar la solución de la ecuación general quíntica mediante operaciones algebraicas. En términos concretos, se trataba de encontrar la solución mediante radicales de la ecuación general de quinto grado $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$; es decir, hallar una fórmula que exprese sus raíces en términos de coeficientes a, b, c, d, e y f dados, de modo que sólo incluya un número finito de las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y extracción de raíces. Abel no sólo estuvo al tanto de los trabajos desarrollados por Cardano y Bombelli para las ecuaciones cúbica y cuártica, sino que conocía muy bien la problemática pendiente, estimulado por el trabajo de algunos maestros como Lagrange y su obra *"Réflexions sur la résolution algébrique des équations"* (1770)[7] donde había reconsiderado críticamente los métodos y fracasos de todas las tentativas de búsqueda de soluciones para las ecuaciones algebraicas. Paolo Ruffini (1765-1822) en 1813 intentó probar la imposibilidad de la resolución algebraica de la ecuación general de grado $n > 4$. Había tenido éxito en demostrar haciendo uso del método de Lagrange que no existe ninguna ecuación *resolvente*[8] que satisfaga una ecuación de grado menor que cinco. Ruffini hizo uso, aunque sin demostrarlo, de un teorema ya hoy conocido como el teorema de Abel, en el que se afirma que si una ecuación es resoluble con el uso de radicales, las expresiones para las raíces pueden darse de tal forma que los radicales en ellas sean funciones racionales con coeficientes racionales de las raíces de la ecuación dada y las raíces de la unidad. A pesar de todo, no se pudo lograr una fundamentación completa. En trabajos posteriores, formularía una regla de cálculo aproximado de raíces. El primer triunfo real del problema corresponde a Abel quien, al parecer, independientemente de Ruffini, anduvo por el mismo camino. Al igual que otros que habían considerado erróneamente resolver el problema antes que él, Abel creyó en un principio haber descubierto la resolución del problema de la quíntica; sin embargo, a la vista de que ni Holmboe ni ninguno de los mejo-

[7]Este trabajo influyó tanto en Ruffini como en Abel para el caso $n > 4$ y también condujo a Galois a su *Teoría de Grupos*. Debe añadirse que Abel tuvo conocimiento de Ruffini por una referencia que de éste realizó Cauchy en su trabajo de 1815.

[8]El término *resolvente* (del latín *aequatio resolvens* significa ecuación que resuelve. Los referidos intentos de resolución eran equivalentes al establecimiento de la teoría algebraica de la *resolvente*, es decir, el hallazgo de otra ecuación algebraica de grado menor (en general) cuyos coeficientes sean funciones racionales de los coeficientes de la ecuación de partida, y tal que aquella permita hallar las raíces de esta última.

res matemáticos de Noruega (Christopher Hansteen, Søren Rasmussen,...) pudieron comprobar la veracidad de su conjetura, envió a través de Holmboe la presunta resolución al matemático profesor Ferdinand Degen en Copenhague, para que la presentase a la Real Sociedad de Ciencias de Dinamarca. Degen le contestó requiriéndole algún ejemplo numérico, y sin comprometerse a dar su opinión. Esa respuesta contenía la advertencia de que "estudiara las integrales elípticas"[9]. Fue entonces cuando Abel se puso a trabajar en la búsqueda de ejemplos, hallando más tarde un error en su razonamiento, lo que le suscitó su primera gran decepción, aunque este hecho le motivaría para reconducir su estrategia en la dirección correcta. Abel se dio cuenta de que su estrategia no era la adecuada y no había tenido éxito en su empresa y aparcó de momento el problema de la quíntica. Fue entonces cuando centró su atención y sus energías en las integrales elípticas y se dio cuenta de que las funciones inversas de las integrales elípticas, esto es las funciones elípticas, tenían propiedades muy interesantes.

Con respecto a sus gustos, aficiones y carácter, Abel mostraba un gran interés por el teatro, pero nulo por la música. A veces mostraba un espíritu impetuoso, mientras que otras entraba en profundas depresiones; todo esto sugiere que sufría cambios de humor con tendencias maníaco depresivas. Era muy modesto y aparentemente amable, y siempre estaba dispuesto a ayudar a sus amigos cuando fuera necesario. Abel no ofrecía nada notable en su aspecto general. Era de estatura media, complexión delicada y ojos azul claro, y vestía siempre con un atuendo simple y descuidado. Quizás lo único destacable de su carácter era que no resultaba ser una persona demasiado extrovertida. En 1822 conseguiría la graduación.

Residencia de estudiantes en Oslo

Durante su estancia en la Universidad, fueron los propios profesores quienes le ayudaron a su manutención. Abel había encontrado en cierto modo una acogida lo más similar posible a un ambiente familiar en la casa del científico, explorador, catedrático de Oslo y profesor de Astronomía Christopher Hansteen, quien le había dado un techo en una habitación del ático de su vivienda, y consideraba a su esposa como una segunda madre, ya que ésta cuidó de él como si de un hijo se tratara, y en estos años difíciles le ayudó enormemente. Abel publicó su primer artículo en una revista de Ciencias Naturales (*Magazin for Naturvidenskaben*) impresa en Noruega, y de la que Hansteen era uno de sus editores. Se publicaron algunos breves trabajos de Abel, pero pronto se comprobó que aquel material que Abel presentaba no era muy común. En 1823, escribió un ensayo en francés titulado "*Solution*

[9]Esto hizo que Abel se iniciara en la que sería su segunda contribución fundamental para las matemáticas, que le condujo a su famosa memoria de París y su posterior competición con Jacobi.

de quelques problèmes a l'aide d'intégrales définies", aparece por primera vez el planteamiento y la solución de una ecuación integral. Buscó financiación en la Universidad para poder publicarlo, sin embargo el trabajo se perdió mientras estaba siendo revisado.

Christine Kemp, retrato de Johan Gørbitz, 1835

Al contrario que Noruega, Dinamarca contaba con una buena escuela de matemáticas. Por ello en el verano de 1823, con la edad de veintiún años, y a instancias de su benefactor Hansteen, el profesor Rasmussen concedió a Abel una modesta beca de 100 *speciedaler*[10](propulsada con la ayuda de profesores de la Universidad) para visitar a Ferdinand Degen o von Schmidten entre otros célebres matemáticos daneses en Copenhague. Una vez allí, Abel realizó algunos estudios acerca del último teorema de Fermat. El tío de Abel, Peder Mandrup Tuxen, trabajaba en la base naval de Christianshavn, en Copenhague,donde conoció a una joven llamada Christine Kemp, hija de un comisario de guerra en Dinamarca, con quien entabló una relación sentimiental. Se dice de ella que no era especialmente bella, pero gozaba de un excepcional buen carácter. En 1824, Christine se mudaría a Son en Noruega donde trabajó como institutriz para estar cerca de su novio, y en las navidades de ese mismo año se prometerían.

Tras su retorno de Copenhague, Abel retomó nuevamente el problema de la ecuación quíntica. Ya a finales de 1823, fue capaz de demostrar correctamente que en general, ésta no podía ser resuelta mediante radicales, resultado ampliado más tarde por Galois a las ecuaciones de grado mayor. Publicó su primera demostración en 1824 en una memoria que comenzaba así:

> *"Los geómetras se han ocupado mucho de la solución general de las ecuaciones algebraicas y varios de ellos trataron de probar la imposibilidad. Pero, si no estoy equivocado, ellos no han tenido éxito hasta el presente."*

y seguía,

> *"Uno de los problemas más interesantes del Álgebra es el de la solución algebraica de las ecuaciones, y observamos que casi todos los matemáticos distinguidos se han ocupado de este tema. Llegamos sin dificultad a la expresión de las raíces de las ecuaciones de los cuatro primeros grados en función de sus coeficientes. Fue descubierto un método uniforme para resolver estas ecuaciones, y se creyó sería aplicable a las ecuaciones de cualquier grado, pero, a pesar de todos los esfuerzos de Lagrange y de otros distinguidos matemáticos, el fin propuesto no fue alcanzado. Esto llevó a la creencia de que la solución de las ecuaciones generales era algebraicamente imposible; pero esta creencia no podía ser comprobada, dado que el método seguido sólo llevaba a conclusiones decisivas en los casos en que las ecuaciones eran solubles. En efecto, los matemáticos se proponían resolver ecuaciones sin saber si era posible. Así se podía llegar a una solución, pero*

[10]Moneda Noruega en circulación entre 1816 y 1875. Más tarde sería sustituida por el *rigsdaler specie*, y este a su vez por la corona noruega. Al cambio 1 corona noruega = $^1/_4$ *speciedaler*.

si por desgracia la solución era imposible, podríamos buscarla durante una eternidad sin encontrarla. Para llegar infaliblemente a una conclusión debemos por tanto seguir otro camino. Podemos dar al problema tal forma que siempre sea posible resolverlo, cosa que podemos hacer con cualquier problema. En lugar de preguntarnos sí existe o no una solución de relación que no nos es conocida, debemos preguntarnos si tal relación es en efecto posible... Cuando se plantea un problema de esta forma, el enunciado contiene el germen de la solución e indica el camino que debe seguirse, y yo creo que habrá pocos ejemplos donde seamos incapaces de llegar a proposiciones de más o menos importancia, hasta cuando la complicación de los cálculos impide una respuesta completa al problema."

Abel sigue diciendo que debe seguirse el método científico, pero ha sido poco usado debido a la extraordinaria complicación de los cálculos algebraicos que supone.

"Pero en muchos ejemplos esta complicación es sólo aparente y se desvanece en cuanto se aborda."

y añade,

"He tratado de esta forma diversas ramas del Análisis, y aunque muchas veces me he encontrado ante problemas más allá de mi capacidad, he llegado de todos modos a gran número de resultados generales que aclaran la naturaleza de esas cantidades cuya dilucidación es el objeto de las Matemáticas. En otra ocasión mencionaré los resultados a que he llegado en esas investigaciones y el procedimiento que me ha conducido a ellos. En la presente memoria trataré el problema de la solución algebraica de las ecuaciones en toda su generalidad."

Desafortunadamente el resultado de la impresión de este trabajo dejó mucho que desear, fundamentalmente debido a que Abel sólo utilizó seis páginas para ello con el objetivo de ahorrar costes de impresión, lo que le infirió un carácter bastante ecléptico e incluso ilegible en ocasiones. Una versión mucho más elaborada aparecería más tarde en 1826, en el primer volumen del *Journal* de Crelle (del que hablaremos más adelante).

Para entonces el Senado de la Universidad de Cristianía, reconoció la excepcional habilidad de Abel, y decidió que debía ser considerado receptor de una beca para estudiar alemán y francés, y visitar los centros matemáticos más importantes del continente (en Alemania y Francia). Los fondos necesarios provendrían del Estado (200 speciedaler anuales por un periodo de dos años). En agosto de 1825, Abel junto a otros cuatro jóvenes científicos de la universidad (Christian P. B. Boeck, Balthazar M. Keilhau, Nicolay B. Møller and Otto Tank) emprendieron su viaje por las universidades de Francia y Alemania. El plan original consistía en que primeramente Abel debía visitar a Degen en Dinamarca, pero a su llegada encontró que éste ya había fallecido.

En su viaje por tierras germanas, Abel decidió acompañar a sus compañeros que se dirigían a Berlín. Previamente hizo un alto en las proximidades de Hamburgo, en Altona, donde contactó con el astrónomo Heinrich Christian Schumacher (amigo de Gauss). Una vez llegaron a Berlín, decidieron que pasarían allí el invierno. Abel gastó gran parte de sus fondos en Berlín, pero tuvo la gran suerte de que entró en contacto, previa misiva de recomendación de von Schimidten, con August Leopold Crelle (1780-1855), quien se convertiría en un personaje vital en su vida tanto personal como profesional.

Berlín, Heinrich Hintze, 1829

Crelle era un exitoso ingeniero civil que dirigía grandes obras públicas de ferrocarril en Prusia, y gozaba de un mayor peso específico en el mundo matemático que su gran benefactor hasta el momento Holmboe. Nacido en 1780, había desarrollado una temprano interés por las matemáticas, y publicado algunas obras sobre matemáticas aplicada y escolar. En 1826, cuando llegó Abel, Crelle acababa de fundar el *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Diario sobre matemáticas pura y aplicada), llamado comúnmente *Journal* de Crelle. Este hecho provocó que debido a la emisión regular del diario, Berlín fuera considerada una importante ciudad en el mundo matemático. Aunque su objetivo era cubrir también aspectos formales de matemáticas aplicadas, pronto se centra prácticamente de forma exclusiva en la matemática pura. Crelle sostenía que:

August Leopold Crelle

> *"...las matemáticas puras deberían ser explicadas en primera instancia sin prestar atención a sus aplicaciones. Debería desarrollarse puramente desde y para sí misma, para que sólo de esta manera pueda ser libre para moverse y evolucionar en cualquier dirección. En la enseñanza de las aplicaciones matemáticas, éste es el resultado particular que la gente busca. Serán extremadamente sencillas de encontrar para aquellos que estén científicamente entrenados, y los que hayan captado su espíritu."*

En el prefacio del primer número de su *Journal*, Crelle declaró sus objetivos: no sólo se publicarían nuevos artículos sino que una selección de artículos publicados en otras lenguas serían traducidos al Alemán. El propio Crelle había traducido al alemán el libro de geometría de Legendre y algunos de los trabajos de Lagrange. Pronto, el *Journal* adquirió carácter internacional, gracias a los contactos de Crelle en París entre otros lugares. Tenía un don extraordinario para descubrir jóvenes prometedores matemáticos y animarlos. Los primeros trabajos de Abel, Dirichlet, Eisenstein, Grassmann, Hesse, Jacobi, Kummer, Lobachevski, Möbius, Plücker, von Staudt, Steiner y Weiertrass fueron todos publicados en el *Journal* de Crelle.

Crelle era un hombre de carácter afable y sociable. Después de que Abel lo conociera en Enero de 1826, éste escribió a su antiguo profesor Holmboe:

> *"No puede usted imaginar qué hombre tan excelente es, exactamente tanto como uno mismo debería ser; pensativo y sin embargo terriblemente cortés como multitud de gente, bastante honesto llegado el caso. Cuando me encuentro con él, me siento tan agusto como cuando estoy con usted o con otros buenos amigos."*

Cuando Abel llegó a Berlín, Crelle estaba pensando en lanzarse a esta gran aventura con sus propios medios económicos y Abel tuvo una parte en que tomara la decisión. Existen dos relatos acerca de la primera visita de Abel a Crelle, ambos interesantes. Por aquella época Crelle desempeñaba un cargo del gobierno para el que tenía poca aptitud y menos gusto: el de examinador del Instituto de Industria (Gewerbe-Institut) en Berlín. El relato de Crelle, de tercera mano (Crelle a Weierstrass y éste a Mittag-Leffler), de esta visita histórica es el siguiente:

> *"Un buen día, un joven muy desconcertado, con un rostro juvenil e inteligente, penetró en mi habitación. Creyendo que se trataba de un candidato para ingresar en el Instituto le expliqué que eran necesarios diversos exámenes. Al fin, el joven abrió su boca y dijo en muy mal alemán: ¡No exámenes, sólo Matemáticas!."*

Con los ánimos, el apoyo y la amistad de Crelle, Abel publicó sus trabajos de forma regular en el *Journal*; para entonces Crelle ya se había percatado de que estaba ante un auténtico genio matemático. El primer volumen por sí sólo contenía siete de sus trabajos, y los siguientes volúmenes muchos más la mayoría de ellos de importancia suprema. En total llegó a publicar 22.

La estancia de Abel en Berlín, de unos cinco meses, influyó sobremanera en su vida profesional. Allí leyó el *Analyse Algébrique* de A. L. Cauchy (1789-1857) por quien manifestaría más adelante una gran admiración por el conjunto de sus trabajos. En uno de sus artículos sobre la quíntica, ya Abel había usado resultados de Cauchy sobre permutaciones.

En una carta a Hansteen, Abel habla fundamentalmente de dos temas, el primero la necesidad de inferir al Análisis Matemático un fundamento firme, y el segundo una imagen de su humanidad y optimismo a pesar de todas las contrariedades con las que se había encontrado a lo largo de su vida.

> *"En el análisis superior pocas proposiciones han sido demostradas con un rigor suficiente. En todas partes encontramos el desgraciado procedimiento de razonar desde lo especial a lo general, y es un milagro que esta forma de razonar sólo rara vez nos haya llevado a la paradoja. Es en efecto extraordinariamente interesante buscar la razón de esto. Esta razón, en mi opinión, reside en el hecho de que las funciones que hasta ahora se presentan en el Análisis pueden ser expresadas en su mayor parte por potencias... Cuando*

seguimos un método general ello no es muy difícil [para evitar trampas]; pero tengo que ser muy circunspecto, pues las proposiciones sin prueba rigurosa (es decir sin prueba alguna) se han apoderado de mí en tal grado que constantemente corro el riesgo de usarlas sin nuevo examen. Estas bagatelas aparecerán en el Journal publicado por el Sr. Crelle."

Expresa luego la gratitud a como fue tratado en Berlín.

"Cierto es que pocas personas se interesaron por mí. Pero estas pocas han sido infinitamente cariñosas y amables. Quizá pueda responder en alguna forma a las esperanzas que han puesto en mí, pues es desagradable para un bienhechor ver perderse todos sus esfuerzos."

En la primavera de 1826, era el momento de que Abel se dirigiera a París. Crelle prometió acompañarle e intentar realizar una parada en Gotinga y concertar una visita con Gauss. Desafortunadamente asuntos de negocios impidieron a Crelle dejar Berlín. Previamente Abel había enviado a C. F. Gauss una copia de sus trabajos con la demostración del problema de la quíntica, motivo principal por lo que en el viaje se había planificado hacer un alto en Gotinga para tener una entrevista con él. Cabe destacar la gran decepción y desengaño que sufrió Abel cuando se enteró de la noticia de que Gauss, sin ni siquiera echar un vistazo al breve folleto con la demostración de la resolución de la quíntica por radicales, manifestaba textualmente:

"¡He aquí otra de esas monstruosidades!"

Es claramente evidente que si Gauss se hubiera dignado a enterarse de algunos de los párrafos de la obra, hubiera mostrado otro interés por el trabajo que llegó a sus manos. Quizás no atribuyó la importancia que merecía a la resolubilidad por radicales, y no supo vislumbrar que estaba ante el nacimiento del álgebra moderna, de la que tanto Abel como Galois deben ser considerados los padres naturales. Cuando Abel se enteró de la reacción de Gauss, decidió no visitarlo, no ocultando desde entonces su antipatía por aquél, que manifestaba siempre que encontraba ocasión. Así, Abel llegaría a decir de Gauss:

"Jamás en sus grandes trabajos descubre la idea generadora. Es como el zorro, que con la cola va borrando el camino que sigue, para que nadie pueda ir detrás."

Durante la estancia de Abel en Berlín, surgió un puesto vacante de profesor en su *alma mater*[11] de forma inesperada, pero antes incluso de que Abel conociera este hecho la vacante fue ocupada por su mentor Holmboe. Abel fue considerado demasiado joven e inexperto. Una vez conoció la noticia se sintió terriblemente desdichado, puesto que sería bastante difícil que volviera a surgir una oportunidad similar en bastante tiempo. Quería casarse pero difícilmente podría hacerlo sin una posición asegurada. Quizás el querer resarcirse

[11] *Alma mater* es una expresión procedente de la locución latina, que significa literalmente "madre nutricia" (que alimenta) y que se usa para referirse metafóricamente a una universidad, aludiendo a su función proveedora de alimento intelectual, generalmente para referirse al sitio en donde determinada persona cursa o cursó sus estudios universitarios.

de esta decepción fue el motivo por el que en lugar de encaminarse a París, Abel decidió prolongar su viaje (a todas luces, en perjuicio de su salud y de su carrera, además de tratarse de un viaje que poco tenía que ofrecerle desde el punto de vista científico) para disfrutar en algunas "juergas" con sus compañeros estudiantes, dirigiéndose hacia Venecia y el norte de Italia, para atravesar los Alpes en su ruta hacia la capital francesa. Como justificación, Abel escribiría a Hansteen:

> *"Pensé al principio marchar directamente desde Berlín a París, satisfecho con la promesa de que el Sr. Crelle me acompañaría. Pero el Sr. Crelle tuvo dificultades, y tendré que viajar solo. Estoy constituido de tal modo que no puedo tolerar la soledad. Cuando estoy solo me hallo deprimido, me siento pendenciero, y tengo poca inclinación para el trabajo. Por tanto me he dicho a mí mismo que sería mucho mejor ir con el Sr. Boeck a Viena, y este viaje me parece injustificado por el hecho de que en Viena hay hombres como Litrow, Burg, y otros, todos ellos excelentes matemáticos; añádase también que será la única ocasión en mi vida de hacer este viaje. ¿Hay algo que no sea razonable en este deseo mío de ver algo de la vida del Sur? Puedo trabajar activamente mientras viajo. Una vez en Viena, existe para ir a París, una vía directa por Suiza. ¿Por qué no ver un poco todas estas cosas? ¡Dios mío! también a mí me gustan las bellezas de la naturaleza como a cualquier otro. Este viaje me hará llegar a París dos meses más tarde, esto es todo. Podré rápidamente recuperar el tiempo perdido. ¿No le parece que este viaje me hará mucho bien?."*

Visitaron Leipzig, Freiburgo, Dresden, Praga, Viena, Graz, Trieste, Venecia, Verona, Innsbruck, Lucerna, Zurich, y Basilea. En Freiburgo, visitó a Georg Amadeus Carl Friedrich Naumann y su hermano el matemático August Naumann, y fue aquí donde Abel llevó a cabo descubrimientos interesantes sobre teoría de funciones, sobre todo elípticas e hiperelípticas, y unas clases de funciones que son ahora conocidas como *funciones abelianas*.

París, Seyfert, 1818

Era Julio cuando Abel llegó a París y con la ayuda de su amigo Johan Gørbitz encontró acomodo con una familia pobre pero codiciosa que le proporcionaba dos malas comidas por día y un inmundo aposento a cambio de un elevado alquiler. Había mandado a Berlín la mayoría de sus trabajos para la publicación en el *Journal*, pero se había reservado el que consideraba el más importante para presentarlo en la Acedemia de Ciencias de Francia. El trabajo en cuestión era un teorema sobre funciones trascendentales. Las vacaciones de verano habían comenzado recientemente, por lo que aquellos matemáticos con los que esperaba entrevistarse estaban fuera de la ciudad. Por lo tanto Abel continuó trabajando en su teorema hasta Octubre momento en el que lo finalizó para su presentación en la Academia.

Cuando los profesores regresaron, Abel sintió que éstos eran demasiado inaccesibles, además de que difícilmente le entendían quizás porque su francés no era lo suficientemente fluido. Legendre, cuya principal especialidad eran las integrales elípticas, tuvo su primer encuentro efímero con Abel antes de subir a un carruaje, y sólo tuvo tiempo de saludarle costésmente y presentarle sus excusas pues debía marcharse. Cauchy también lo recibió con su característica descortesía. Abel comentó sobre este encuentro en una carta fechada el 24 de octubre de 1826, dirigida a Holmboe:

> *"Le diré que esta ruidosa capital del continente me ha producido por el momento el efecto de un desierto. Prácticamente no conozco a nadie, a pesar de hallarnos en la más agradable estación cuando todos se hallan en la ciudad ... Hasta ahora he conocido a Sr. Legendre, a Sr. Cauchy y a Sr. Hachette y a algunos matemáticos menos célebres, pero muy capaces: Sr. Saigey, editor del Bulletin des Sciences y Sr. Lejeune-Dirichlet, un prusiano que vino a verme el otro día creyéndome compatriota suyo. Es un matemático de gran penetración. Con Sr. Legendre ha probado la imposibilidad de resolver la ecuación*
>
> $$x^5 + y^5 = z^5$$
>
> *en enteros, y otras cosas importantes. Legendre es un hombre extraordinariamente cortés, pero desafortunadamente tan viejo como las piedras. Cauchy es un excéntrico, y no se puede llegar a ningún lado con él, aunque es el matemático que sabe en estos momentos cómo desarrollar la matemática. Al principio no comprendía prácticamente nada, pero ahora veo algunas cosas con más claridad. Cauchy es extremadamente Católico y fanático. Una cosa muy extraña en un matemático (...). Es el único que se preocupa de las matemáticas puras. Poisson, Fourier, Ampére, trabajan exclusivamente en problemas de magnetismo y en otras materias físicas. Sr. Laplace creo que ahora no escribe nada. Su último trabajo fue un complemento a su teoría de las probabilidades. Muchas veces le veo en el Instituto. Es un buen sujeto(...) Poisson es un hombre bajo con una tripita muy graciosa. Es un agradable camarada y sabe comportarse con dignidad. También Fourier (...) Lacroix es extremadamente viejo. El lunes Sr. Hachette me presentará a varios de estos caballeros. Por otro lado, los franceses no me gustan tanto como los alemanes; los franceses son anormalmente reservados hacia los extranjeros. Es difícil acercarse a ellos. Y no me atrevo a presentar mis pretensiones. Todo el mundo trabaja en sus propios asuntos sin importarle los otros. Todo el mundo quiere enseñar y nadie aprender. El más absoluto egoísmo prevalece por todos los sitios. Lo único que buscan los franceses de los extranjeros son la práctica (...) puede imaginar qué difícil es hacerse notar, especialmente para un principiante (...) He realizado un trabajo sobre ciertas clases de funciones trascendentes, para presentarlo al Instituto (...) He decidido que lo vea Cauchy, pero seguramente ni se dignará a mirarlo. Y me atrevo a decir sin jactancia, que es un buen trabajo. Siento gran curiosidad por conocer el juicio del Instituto."*

Luego cuenta lo que está haciendo, y añade un resumen de sus proyectos no muy optimistas.

"Lamento haber pedido dos años para mis viajes, pues año y medio habrían sido suficientes."

El estudio fue presentado al Secretario de la Academia de Ciencias de París, Joseph Fourier, el 30 de octubre de 1826, para ser publicado en su revista. El trabajo se remitió a Cauchy y Legendre, con Cauchy como responsable principal, para que fuera evaluado. Para aquel entonces, Legendre contaba ya con 74 años, y consideró pobre y difícilmente legible el manuscrito, manifestando:

"...percibimos que la memoria era apenas legible; estaba escrita con una tinta casi blanca y las letras defectuosamente formadas; estuvimos de acuerdo en que el autor debió proporcionarnos una copia más limpia para ser leída."

por lo que confió a Cauchy (con 39 años) para que se encargara del informe, informe que Abel esperaba lleno de esperanza pero que nunca llegaba. Lamentablemente como más tarde se confirmaría, no recibió respuesta en vida sobre el trabajo presentado. Sumergido en su propia tarea, Cauchy quizás no le prestó la atención merecida, tal vez porque vislumbrara en aquel mísero estudiante noruego un pobre diablo con ensoñaciones imposibles o incluso quizás por indiferencia al principiante. Al igual que Legendre, Cauchy extravió y olvidó aquel ensayo del que era depositario. Al parecer, cuando Abel se enteró de que Cauchy no lo había leído, aguardó con paciente resignación el veredicto de la Academia (que nunca recibiría), como así reveló a Holmboe en otra carta:

"Espero todos los días la decisión sobre los trabajos que presenté en el Instituto. Pero los lentos nunca acaban. Legendre y Cauchy fueron los jueces, Cauchy es el principal y Legendre simplemente se deja llevar."

Pero cuando tuvo constancia de que su manuscrito se había extraviado, hizo además otra cosa, redactar de nuevo el principal resultado. El artículo, aún siendo el más profundo de todos sus trabajos, constaba tan sólo de dos breves páginas. Abel lo llamó estrictamente teorema; no tenía introducción alguna, ni contenía observaciones superfluas, ni aplicaciones.

Como hemos comentado antes, Holmboe había sido contratado como profesor de la Universidad de Oslo. Holmboe no quería el puesto, pensando en que Abel era verdaderamente merecedor de él, pero lamentablemente no tuvo elección, ya que la Universidad de Oslo no podía aguardar la decisión, y en caso de no contestar (Abel para entonces se encontraba en Berlín), se lo ofrecerían a otro candidato. Desafortunadamente este hecho significó la imposibilidad de que Abel pudiera ocupar un puesto apropiado regular en la enseñanza superior de matemáticos.

Después del tiempo transcurrido en Berlín con Crelle, Abel se había cargado de deudas y, aunque su colega y amigo quiso que volviera a Berlín con algunas ofertas para intentar retenerle, una vez agotado incluso el préstamo de Holmboe, Abel quería volver a casa. Sobre todo porque la situación familiar, especialmente la de sus hermanos, era ya desesperada.

En una carta, Abel expresa su necesidad de abandonar la Europa Continental, pues quería dedicarse en profundizar en su matemática.

"Muchas cosas me quedan por hacer, pero en tanto me halle en el extranjero todo lo que haga será bastante malo. ¡Si yo tuviera mi cátedra como el Sr. Kielhau tiene la suya!. Mi posición no está asegurada, pero no me inquieto acerca de esto; si la fortuna no me acompaña en una ocasión, quizá me sonría en otra."

Regresó a Cristianía en Mayo de 1827, y para ganar algún dinero tuvo que dar instrucción a algunos escolares. Su novia Christine se empleó como institutriz en casa de unos amigos de su familia en Frøland. Abel pasó el verano con su novia en esa ciudad. Estaba a la sazón, dedicado a la teoría de funciones elípticas, en su competición con Jacobi, escribiendo algunos artículos sobre la misma. En la Navidad de ese año, hubo de viajar en trineo para visitar a su novia en Frøland, llegando tras su viaje bastante enfermo. El riguroso clima noruego ya le había hecho desde hacía tiempo padecer tuberculosis pulmonar, de la que tuvo conocimiento médico durante su estancia en París y que Abel había atribuido a un frío persistente. Quizás el trajín y la excesiva tensión de aquel largo viaje al extranjero de más de año y medio de duración, contribuyeron a que esa enfermedad le llevara más tarde a su fatal desenlace.

Casa donde murió Abel en Frøland

En 1828, Hansteen recibió una subvención para investigar el magnetismo terrestre en Siberia y se nombró entonces a Abel para que lo sustituyera en su puesto docente en la Universidad y también en la Academia Militar. Este hecho mejoró su precaria situación económica. Pero Abel continuaba entregado en cuerpo y alma a su investigación matemática, si bien su salud se iba deteriorando cada día. Las vacaciones veraniegas de 1828 las pasó junto a su novia en Frøland y volvería a viajar de nuevo a esta ciudad para celebrar la Navidad de ese año. A mediados de enero de 1829, Abel empeoró notablemente. Supo que no viviría mucho tiempo, a causa de una hemorragia que no fue posible detener. Con anterioridad ya había escrito a su amigo Keilhau, con quien Abel se sentía profundamente unido, implorándole que se hiciera cargo de la asistencia de su madre; y además de aquel requerimiento, al visitarle le aconsejó que entablara una relación seria con Christine (a quien Keilhau no conocía), manifestándole:

"No es bella; tiene el cabello rojo y es pecosa, pero se trata de una mujer admirable."

(un tiempo después de que Abel muriera, resultó que ambos se casaron). Así fueron los últimos días de Abel en Frøland en el hogar de la familia inglesa en la que Christine era institutriz. La debilidad y la creciente tos hicieron que sólo pudiese estar fuera de la cama unos pocos minutos. Ocasionalmente intentaba trabajar en su matemática, pero ya no podía escribir. A veces revivía el pasado, hablando de su pobreza y de la bondad de la Señora Hansteen. Padeció su peor agonía durante la noche del 5 de abril. En la madrugada llegó a sentirse más tranquilo, y durante la mañana a las once en punto del 6 de abril de 1829, exhaló su último suspiro. Tenía 26 años y ocho meses.

Dos días más tarde de la muerte de Abel llegaba una carta de Crelle, quien se había encargado de intermediar con el ministro de educación en Berlín para que Abel obtuviera una plaza definitiva como profesor de la Universidad de Berlín en un nuevo Instituto Tecnológico. Allí tendría por compañeros de trabajo a Dirichlet, Jacobi y Steiner. Lamentablemente la carta llegaba demasiado tarde. El propio Gauss, con el fin de reparar dignamente su anterior comportamiento para con Abel, había intermediado junto a Humboldt, solicitando una cátedra para él. Legendre, Poisson y Laplace, habían escrito asimismo al rey de Suecia para que Abel ingresara en la Academia de Estocolmo. Para entonces Cauchy no había aún emitido informe alguno sobre el primer ensayo de Abel, a pesar de que Legendre había emitido varias protestas al respecto, pero para este momento ya se conocía la esencia de la misma a través del *Journal* de Crelle.

El propio Crelle escribió un largo elogio en su *Journal* en el que decía:

> *"Todo el trabajo de Abel lleva la imprenta de la genialidad y la fuerza de su intelecto que es extraordinario y en ocasiones increíble, aún cuando la juventud del mismo no fuera tomada en consideración. Se puede decir que fue capaz de salvar todos los obstáculos hasta llegar a la raíz de los problemas con un vigor que parecía inagotable. Atacaba los problemas con extraordinaria energía; él los consideraba desde su superficie y era capaz de vislumbrar con tal perspectiva su estado, que todas las dificultades parecían desvanecerse bajo el victorioso ataque de su genio...Pero no sólo era su gran talento lo que fomentó el respeto de los demás por Abel y lo que hace infinitamente lamentable su pérdida. Se distinguió por la pureza y la nobleza de su carácter y por una rara modestia que le hizo ser una persona tan apreciada como su genialidad."*

Al final de sus días, ajeno al conocimiento de Abel y otras instituciones noruegas competentes, ocurrió que C. G. Jacobi (1804-1851) tuvo noticias del teorema de Abel por el propio Legendre (con quien Abel sostuvo correspondencia después de su regreso a Noruega) y en una carta a Legendre fechada el 14 de marzo de 1829, éste comentó:

> *"¡Qué descubrimiento es ese Abel!(...) ¿Cómo es posible que ese descubrimiento, quizás el más importante que se haya hecho en nuestro siglo, se comunicara a su Academia hace dos años y se escapara a la atención de sus colegas?."*

Esta noticia llegó hasta Noruega, lo que unido a las expectativas que en su momento se habían depositado en la figura de Abel, hizo que el propio cónsul de Noruega en París interpusiera una reclamación diplomática con la firme intención de que el manuscrito perdido se recuperara. La Academia indagó y casualidades de la vida Cauchy encontró dicho manuscrito en 1830. En una carta fechada en abril de 1829 que contestaba a la del 14 de marzo a Jacobi, Legendre comenta que una vez hallado el manuscrito, Cauchy se dispuso a redactar el correspondiente informe, pero que ambos se vieron retenidos al sopesar que Abel ya había publicado parte de la memoria en el *Journal* de Crelle. Cuando, tras su muerte, la fama de Abel ya estaba cimentada, su apreciadísimo ensayo afortunadamente no se había extraviado, sin embargo no fue publicado hasta el año 1841 en *Mémoires des savants etrangers, vol.7, 176-264*. Para colmo de desgracias, editor, impresor, o ambos, perdieron el manuscrito antes de que fueran leídas las pruebas de imprenta. La Academia en 1830, quiso sincerarse con Abel, concediéndole el Gran Premio de Matemáticas, en unión con Jacobi, pero Abel ya había fallecido.

Los siguientes párrafos de la memoria muestran su objeto:

> *"Las funciones transcendentes hasta ahora consideradas por los matemáticos son escasas en número. Prácticamente toda la teoría, de funciones transcendentes se reduce a la de funciones logarítmicas, circulares y exponenciales, funciones que en el fondo forman una sola especie. Tan sólo recientemente se ha comenzado a considerar algunas otras funciones. Entre las últimas, las transcendentes elípticas, algunas de cuyas notables y elegantes propiedades han sido desarrolladas por Sr.Legendre, ocupan el primer lugar. El autor [Abel] considera, en la memoria que tiene el honor de representar a la Academia, una clase muy extensa de funciones, todas aquellas cuyas derivadas pueden expresarse por medio de ecuaciones algebraicas cuyos coeficientes sean funciones racionales de una variable, y ha demostrado para estas funciones propiedades análogas a la de las funciones logarítmicas y elípticas... y ha llegado al siguiente teorema*[12]*:*
>
> *"Si tenemos varias funciones cuyas derivadas pueden ser raíces de una, y la misma ecuación algebraica cuyos coeficientes son funciones racionales de una variable, podemos siempre expresar la suma de cualquier número de tales funciones por una función algebraica y logarítmica, siempre que establezcamos cierto número de relaciones algebraicas entre las variables de las funciones en cuestión."*
>
> *El número de estas relaciones no depende en modo alguno del número de funciones, sino sólo de la naturaleza de las funciones particulares."*

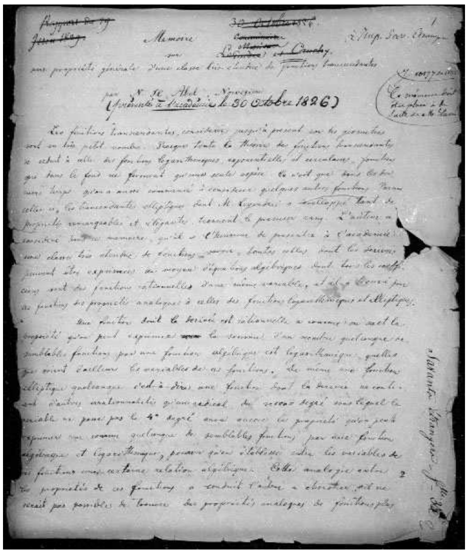
Realmente, y aparte de la escasez de sus recursos, lo más razonable es deducir que después del episodio acaecido, la estancia de Abel en París sólo pudo proporcionarle una amarga tristeza en todos los sentidos. Resulta evidente que a Abel, resumiendo, le sobrarían razones para sentir resentimiento de la actitud de Cauchy, aún cuando jamás dudase de que éste fuera indiscutiblemente un gran maestro del análisis.

Cabe destacar, que para mayor gloria de la ciencia, fue determinante la atención que Jacobi solicitó para con Abel, como muestra de su noble rivalidad, además del mismo requerimiento por parte de toda la Alemania científica, para que se buscase con empeño la admirable memoria de Abel. Con todo lo escrito anteriormente, no acabaron aún las peripecias habidas con el manuscrito de Abel. Cuando los matemáticos noruegos Ludwing Sylow y Sophus Lie elaboran en la década de 1870-1880 la publicación de las obras completas de Abel

[12]Conocido hoy en día como *Teorema de Abel*.

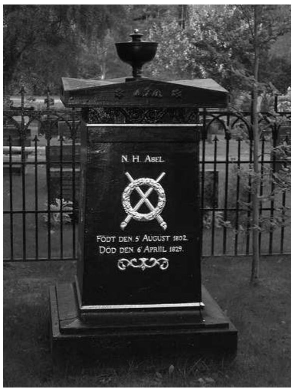
se encontraron con la desagradable sorpresa de que el manuscrito que Abel había presentado a la Academia de París se había perdido. ¿Qué había ocurrido esta vez?. Según se pudo averiguar más adelante, a un profesor matemático italiano, Guglielmo Libri, alumno de Legendre, le fue asumida la responsabilidad de seguir la impresión de *Mémoires des savants* antes citadas. En 1952, siglo y cuarto después de que Abel presentara la Memoria sobre funciones elípticas a la Academia de París fue finalmente encontrada por Viggo Brun, de Oslo, en la biblioteca Moreniana de Florencia (Italia). Brun, que visitaba la ciudad, aprovechó para saber si en la biblioteca matemática había legados de Guglielmo Libri, sospechando la implicación de éste en la desaparición del manuscrito. Después de realizar algunas pesquisas, Brun encontró lo que buscaba, es decir la Memoria original de Abel que el pícaro de Libri había ocultado en el archivo de Sophie Germain.

La narración de la vida de Abel es terriblemente triste, claro ejemplo como en muchos casos, de la íntima conexión entre la pobreza y la tragedia. Su corta vida y su trágica muerte ha dado lugar a numerosos mitos sobre su persona. Algunos lo han considerado como el Mozart de la ciencia. Junto a Galois, ambos son considerados como los precursores del álgebra moderna. Ambos vivieron la época del Romanticismo en su plenitud, y como otros tantos jóvenes incomprendidos dejaron su existencia terrenal a muy corta edad. Sin embargo su legado fue tan inmenso que será imposible que sus nombres queden en el olvido. Como dijo Charles Hermite en referencia a Abel, *"Ha legado a los matemáticos algo que les mantendrá activos durante 500 años"*.

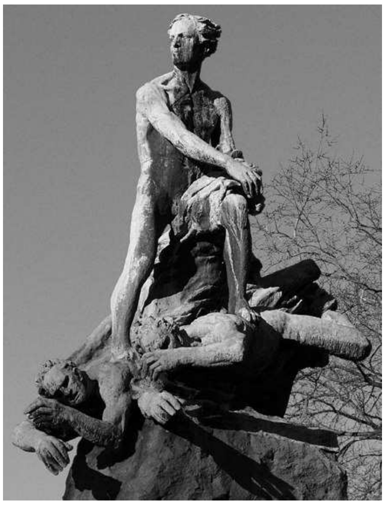


Primera página de la Memoria que Abel presentó a la Academia de París

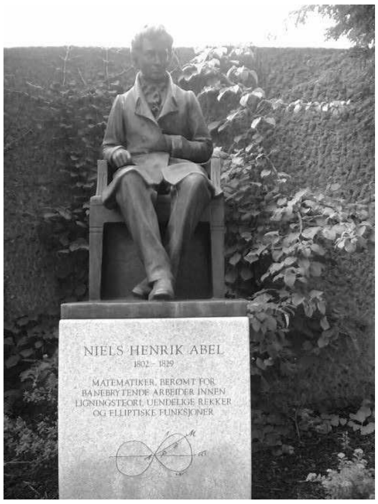
En Noruega, Abel es considerado un héroe nacional. El centenario de su nacimiento es ampliamente celebrado, y varios han sido los honores a título póstulo otorgados al joven sabio, como un cráter lunar o un asteroide que llevan su nombre, una calle del distrito duodécimo de París denominada "rue Abel", una estatua en bronce realizada por el escultor Gustav Vigeland en 1908 que se encuentra en el "Jardín Abel" del Royal Park de Oslo, y que constituye hoy día una de las imágenes más representativas de la ciudad, o una estatua en la Universidad de Oslo. Además de todas estas muestras de afecto, su rostro aparece en multitud de tiradas de sellos filatélicos, o en antiguos billetes noruegos.



Tumba de Abel en Frøland



Escultura de Abel en el Royal Park de Oslo



Estatua de Abel en la Universidad de Oslo

Sellos conmemorativos del centenario de la muerte de Abel (Noruega-1929)

Sello conmerativo de Abel (Noruega-2002)

Sello conmemorativo de Abel (Noruega-1983)

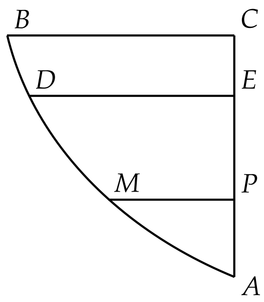
Billete de 500 coronas noruegas (1978)

De estudiante, Abel vivió en Lille Grensen 5. En 2002 la Sociedad Patrimonial de Oslo colocó una placa en su recuerdo.

3. Solución de un problema de mecánica

Veamos en esta sección como Abel resolvió de una manera muy elegante el famoso *"Problema de la Braquistócrona"* haciendo uso del *"Cálculo Fraccional"*, esto es el cálculo de derivadas e integral de orden no entero. De aquí en adelante el lector considerará que está leyendo el propio trabajo al respecto que Abel editó en el *Journal* de Crelle en 1826.

Sea $BDMA$ una curva cualquiera. Sea BC una recta horizontal y CA una recta vertical. Sea una partícula que se mueve sobre la curva bajo la acción de la gravedad, comenzando en el punto D. Sea τ el tiempo transcurrido hasta que la partícula alcanza el punto A, y sea a la distancia EA. La magnitud τ es una función de a que depende de la forma de la curva e inversamente, la forma de la curva dependerá de esta función. Investigaremos cómo es posible encontrar la ecuación de la curva mediante una integral definida, si τ es una función de a continua dada.



Sea $AM = s$, $AP = x$ y sea t el tiempo en el que la partícula describe el arco DM. Por las reglas de la mecánica tenemos:
$-\frac{ds}{dt} = \sqrt{a-x}$,[13] donde $dt = -\frac{ds}{\sqrt{a-x}}$. Consecuentemente, integrando desde $x = a$ a $x = 0$,

$$\tau = -\int_a^0 \frac{ds}{\sqrt{a-x}} = \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{a-x}} ,$$

donde $\int_\alpha^\beta$ significa que los límites de integración corresponden a $x = \alpha$ y $x = \beta$ respectivamente. Sea ahora $\tau = \phi(a)$ la función dada; entonces

$$\phi(a) = \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{a-x}}$$

será la ecuación por la que s se determinará como una función de x. En lugar de esta ecuación consideraremos otra más general,

$$\phi(a) = \int_0^a \frac{ds}{(a-x)^n} , \quad [0 < n < 1]$$

de la que intentaremos obtener la expresión para s en términos de x.

Si designamos a $\Gamma(\alpha)$ como la función

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^1 dx \left(\log \frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} , \quad \left[= \int_0^\infty e^{-z} z^{\alpha-1} dz\right]$$

[13]Si designamos por $v_0 = 0$ y v las velocidades de la partícula en los puntos D y M respectivamente y por g la aceleración debido a la gravedad, entonces la ecuación de la energía resulta $v^2 - v_0^2 = 2g(a-x)$, donde

$$v = \frac{ds}{dt} = -\sqrt{2g}\,\sqrt{a-x}$$

Por lo tanto la ecuación del texto corresponde a la elección de unidades de tal forma que $2g = 1$.

se sabe que

$$\int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}dy = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

donde α y β deben ser mayores que cero. Considerando $\beta = 1-n$ nos encontramos

$$\int_0^1 \frac{y^{\alpha-1}dy}{(a-y)^n} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-n)}{\Gamma(\alpha+1-n)},$$

donde, considerando $z = ay$

$$\int_0^a \frac{z^{\alpha-1}dz}{(a-z)^n} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-n)}{\Gamma(\alpha+1-n)} \cdot a^{\alpha-n}$$

Multiplicando por $\frac{da}{(x-a)^{1-n}}$ e integramos desde $a=0$ a $a=x$:

$$\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \int_0^a \frac{z^{\alpha-1}dz}{(a-z)^n} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-n)}{\Gamma(\alpha+1-n)} \int_0^x \frac{a^{\alpha-n}da}{(x-a)^{1-n}}.$$

Considerando $a = xy$ tenemos

$$\int_0^a \frac{a^{\alpha-n}da}{(x-a)^{1-n}} = x^\alpha \int_0^1 \frac{y^{\alpha-n}dy}{(1-y)^{1-n}} = x^\alpha \cdot \frac{\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}$$

por lo tanto

$$\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \int_0^a \frac{z^{\alpha-1}dz}{(a-z)^n} = \frac{x^\alpha\Gamma(n)\Gamma(1-n)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Pero, por una propiedad de la función Γ,

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha),$$

entonces, sustituyendo,

$$\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \int_0^a \frac{z^{\alpha-1}dz}{(a-z)^n} = \frac{x^\alpha}{\alpha}\Gamma(n)\Gamma(1-n)$$

Multiplicando ésta por $\alpha\phi(\alpha)d\alpha$ e integrando con respecto a α [entre límites constantes cualesquiera], tenemos

$$\int_0^x \frac{dx}{(a-x)^{1-n}} \int_0^a \frac{\left(\int \phi(\alpha)\alpha z^{\alpha-1}d\alpha\right) dz}{(a-z)^n} = \Gamma(n)\Gamma(1-n) \int \phi(\alpha)x^\alpha \, d\alpha.$$

Considerando

$$\int \phi(\alpha)x^\alpha \, d\alpha = f(x)$$

y diferenciando, tenemos

$$\int \phi(\alpha)\alpha x^{\alpha-1}d\alpha = f'(x), \quad \int \phi(\alpha)\alpha z^{\alpha-1}d\alpha = f'(z).$$

Entonces
$$\int_0^x \frac{da}{(a-x)^{1-n}} \int_0^a \frac{f'(z)\,dz}{(a-z)^n} = \Gamma(n)\Gamma(1-n)f(x)$$ [14]

o, como
$$\Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} n\pi},$$
$$(1) \quad f(x) = \frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi} \int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \int_0^a \frac{f'(z)\,dz}{(a-z)^n}.$$

Por medio de esta fórmula es sencillo encontrar s de la ecuación
$$\phi(a) = \int_0^a \frac{ds}{(a-x)^n}.$$

Multiplicando esta ecuación por $\frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi} \cdot \frac{da}{(x-\alpha)^{1-n}}$ e integrando desde $a = 0$ a $a = x$ tenemos
$$\frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi} \int_0^x \frac{\phi(a)\,da}{(x-a)^{1-n}} = \frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi} \int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \int^a \frac{ds}{(a-x)^n};$$

por lo tanto, por (1),
$$s = \frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi} \int_0^x \frac{\phi(a)\,da}{(x-a)^{1-n}}$$ [15]

[14] Esta identidad se obtiene inmediatamente de la fórmula de Dirichlet
$$(*) \quad \int_0^x da \int_0^a F(a,z)\,dz = \int_0^x dz \int^x F(a,z)\,da$$
(Bôcher, *An introduction to the study of integral equations*, 1909, p. 4) con ciertas restricciones para $f(z)$. Por ejemplo, basta con asumir que $f'(z)$ es continua y $f(0) = 0$. Considerando en (*)
$$F(a,z) = (x-a)^{n-1}(a-z)^{-n}da.$$
Sustituyendo $a = z + t(x-z)$ en la integral, la reduciremos a
$$\int_0^1 t^{-n}(1-t)^{n-1}dt = \Gamma(n)\Gamma(1-n)$$
con el resultado final
$$\int_0^x (x-\alpha)^{n-1}da \int_0^a (\alpha-z)^{-n} f'(z)dz = \Gamma(n)\Gamma(1-n) \int_0^x f'(z)dz = \Gamma(n)\Gamma(1-n)f(x).$$

Hablando estrictamente, el método usado en el texto establece la igualdad en cuestión sólo para las funciones $f(x)$ que pueden ser expresadas mediante integrales definidas de la forma
$$\int \phi(\alpha)x^\alpha d\alpha$$
pero la investigación demuestra que tal expresion, requiere la solución de una ecuación integral de expresión mas complicada que la especificada.

[15] Dos observaciones deben realizarse concernientes a la solución obtenida.

1. Ya que la función s reemplaza a $f(x)$ de (1), esta debe satisfacer las restricciones impuestas a $f(x)$, por ejemplo $s'(x)$ debe ser continua y $s(0) = 0$, lo que es natural desde el punto de vista de la interpretación física de $s(x)$. Esto supone ciertas restricciones sobre la función dada $\phi(a)$; se puede demostrar fácilmente que las condiciones anteriores se satisfacen siempre que $\phi'(a)$ sea continua y que $\phi(0) = 0$. La última condición nuevamente surge de manera natural de la ecuación integral del problema.
2. Si todas las condiciones anteriores son satisfechas, la igualdad (1) ofrece inmediatamente que la solución del problema es única, entonces la integral se reduce a $\phi(a)$, lo que nos da la solución obtenida en el texto.

Sea ahora $n = \frac{1}{2}$, entonces

$$\phi(a) = \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{a-x}}$$

y

$$s = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{\phi(a)da}{\sqrt{x-a}}.$$

Esta ecuación expresa s en términos de la abcisa x, y la curva por lo tanto está completamente definida.

Aplicaremos la expresión anterior a algunos ejemplos.

I. Si

$$\phi(a) = \alpha_0 a^{\mu_0} + \alpha_1 a^{\mu_1} + \ldots + \alpha_m a^{\mu_m} = \sum \alpha a^{\mu}$$

la expresión para s será

$$s = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{da}{\sqrt{x-a}} \sum \alpha a^{\mu} = \frac{1}{\pi} \sum \left(\alpha \int_0^x \frac{a^{\mu} da}{\sqrt{x-a}} \right).$$

Considerando $a = xy$ tenemos

$$\int_0^x \frac{a^{\mu} da}{\sqrt{x-a}} = x^{\mu+\frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{y^{\mu} dy}{\sqrt{1-y}} = x^{\mu+\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\mu+\frac{3}{2}\right)};$$

por lo tanto

$$s = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\pi} \sum \frac{\alpha\Gamma(\mu+1)}{\Gamma\left(\mu+\frac{3}{2}\right)} x^{\mu+\frac{1}{2}}$$

o, como $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$,

$$s = \sqrt{\frac{x}{\pi}} \left[\alpha_0 \frac{\Gamma(\mu_0+1)}{\Gamma\left(\mu_0+\frac{3}{2}\right)} \cdot x^{\mu_0} + \ldots + \alpha_{\mu} \frac{\Gamma(\mu_m+1)}{\Gamma\left(\mu_m+\frac{3}{2}\right)} \cdot x^{\mu_m} \right].$$

Si $m = 0$ y $\mu_0 = 0$, la curva en cuestión es una isócrona, y resulta que

$$s = \sqrt{\frac{x}{\pi}} \alpha_0 \frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{\alpha_0}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \sqrt{\frac{x}{\pi}} = \frac{2\alpha_0}{\pi} \sqrt{x}$$

conocida por ser la ecuación de una cicloide.[16]

[16] Omitimos el ejemplo II, donde se asume que la función $\phi(a)$ se expresa por diferentes fórmulas en diferentes intervalos.

En un artículo anterior mencionado anteriormente, Abel dio la misma fórmula final para la solución pero basando su discusión en la asunción de que s puede expresarse como una suma de términos de la forma

$$s = \sum \alpha^{(m)} x^m.$$

Entonces comenta casos particulares donde el tiempo de descenso es proporcional a una potencia de la distancia vertical a o es constante (curva isócrona). Al final del artículo Abel ofrece una sor-

Referencias

[1] ABEL, Niels Henrik. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Vol. I, pp. 153–157, Berlín, 1826. *Göttinger Digitalisierungzentrum* http://gdz.sub.uni-goettingen.de/no_cache/dms/load/toc/?IDDOC=238618

[2] BELL, Eric Temple. *Men of Mathematics*, pp. 307–326, Simon & Schuster, Inc, New York, 1986.

---

prendente expresión de la solución mediante el uso de la notación de las derivadas e integrales de orden no entero. Definimos como la derivada de orden α de una función $\psi(\lambda)$ a la expresión

$$\frac{d^\alpha \psi(x)}{dx^\alpha} = D_x^\alpha \psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_c^x (x-z)^{-\alpha-1} \psi(z) dz \text{ si } \alpha < 0 \\ \frac{d^p}{dx^p} D_x^{\alpha-p} \psi(x) \text{ si } p \text{ es un número entero y } 0 \leq p-1 < \alpha \leq p \end{cases}$$

siendo c una constante que resulta igual a 0 en la discusión de Abel. Si consideramos sin demostración que $D^\alpha D^\beta \psi = D^{\alpha+\beta}\psi$ entonces la ecuación integral de Abel puede expresarse

$$\phi(x) = \Gamma(1-n) D_x^{n-1} D_x s = \Gamma(1-n) D_x^n s,$$

la cual puede ser resuelta inmediatamente mediante la fórmula

$$s(x) = \frac{1}{\Gamma(1-n)} D_x^{-n} \phi = \frac{1}{\Gamma(1-n)\Gamma(n)} \int_0^x \phi(a)(x-a)^{n-1} da.$$

Para justificar esta operación Abel demuestra la identidad

$$D_x^{-n-1} D_x^{n+1} f = f,$$

que también puede obtenerse de la igualdad (1) antes vista. Para el caso particular de $n = \frac{1}{2}$, Abel expresa la ecuación y su solución respectivamente como

$$\psi(x) = \sqrt{\pi} \frac{d^{1/2} s}{dx^{1/2}}; \quad s = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d^{-1/2} \psi}{dx^{-1/2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int^{1/2} \psi(x)\, dx^{1/2}.$$

Al final del artículo Abel expresa:

> *"De la misma manera con la que he encontrado s de la ecuación*
>
> $$\psi(a) = \int_{x=0}^{x=a} \frac{ds}{(a-x)^n}$$
>
> *he determinado la función ϕ de la ecuación*
>
> $$\psi(a) = \int \phi(xa) f(x)\, dx$$
>
> *donde ψ y f son funciones dadas y se toma la integral entre límites cualquiera (¿constantes?); pero la solución a este problema es demasiado larga para darla aquí."*

Esta solución nunca fue publicada por Abel.

Debe comentarse finalmente que la ecuación de Abel y otras análogas fueron resueltas por Liouville mediante el uso de derivadas e integrales de orden no entero. El procedimiento de Liouville es puramente formal, y parece que no se percató de los resultados de Abel. Fue también Liouville quien resolvió la ecuación de Poisson (*Note sur la détermination d'une fonction arbitraire placée sous un signe d'intégration définie*, Journal de l'École Polytechnique, Cahier 24, Vol. 15, 1835, pp.55–60). La ecuación de Poisson es

$$F(r) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}\, r^{n+1} \int_0^x \psi(r \cos \omega) \operatorname{sen}^{2n+1} \omega\, d\omega$$

donde $F(r)$ es una función dada y la función desconocida $\psi(a)$ se considera impar, es decir $\psi(-u) = -\psi(u)$. La ecuación de Poisson se reduce a una del tipo de Abel utilizando $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ como intervalo de integración y haciendo la sustitución $\cos \omega = \left(\frac{z}{x}\right)^{1/2}$, $r^2 = x$.

[3] Hayek, Nácere. *Una Biografía de Abel*, Revista *Números*, Vol. 52, pp. 3–26, Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas, diciembre 2002.

[4] James, Ioan. *Remarkable Mathematicians*, pp. 91–97, Cambridge University Press, The Mathematical Association of America, Cambridge, 2002.

[5] Katz, Victor J. *A History of Mathematics: An Introduction*, 2nd. Ed., pp. 665–666, Adisson Wessley Educational Publishers, Inc., USA, 1998.

[6] Pesic, Peter. *Abel's Proff*, The MIT Cambridge Press, Massachusetts, Londres, 2003.

[7] Rouse Ball, Walter William. *A Sourt Account of The History of Mathematics*, 4th. Ed., pp. 461–462, MacMillan and Co., Limited, Londres, 1919.

[8] Smith, David Eugene. *A Source Book in Mathematics*, pp. 656–662, McGraw-Hill Book Company,Inc., New York, 1929.

[9] Stewart, Ian. *Historia de las Matemáticas (En los últimos 10.000 años)*, 1ª.Ed. pp. 190–193, Crítica Editorial, Colección Drakontos, 2008.

[10] The Abel Prize Website. *Página completa dedicada a la figura de Abel*, http://www.abelprisen.no/en/abel/

[11] Wikipedia. *Niels Henrik Abel*, http://en.wikipedia.org/wiki/Niels_Henrik_Abel

Evgeniy Kulanin, Alexei Myakishev

Algunas cónicas relacionadas con el triángulo

Moscú
2007

Resumen. Estudiamos tres resultados sobre el triángulo y algunas cónicas relacionadas con él.

1. Cónicas plus Triángulo: tres problemas.

El objetivo de este artículo es presentar al lector algunas propiedades interesantes de ciertas cónicas relacionadas con un triángulo.
Consideremos tres problemas propuestos por *Evgeniy Kulanin*:

1.
Probar que la recta que une el punto de Nagel y el punto de Gergonne de un triángulo escaleno es paralela a un lado de este triángulo, si y solamente si el punto de Feuerbach está sobre la mediana que pasa por el vértice opuesto a dicho lado.

2.
Probar que la recta que une el baricentro y el punto de Lemoine de un triángulo escaleno es paralela a un lado del triángulo, si y solamente si el punto de Steiner pertenece a la recta que contiene a la mediana que pasa por el vértice opuesto a dicho lado.

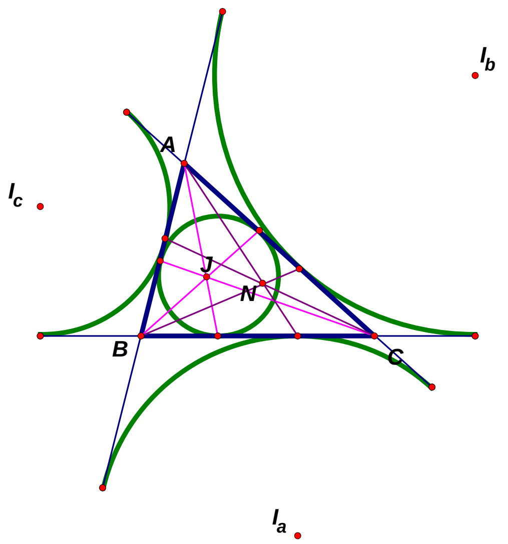
3.
Probar que la hipérbola de Kiepert es tangent a la elipse de Steiner circunscrita al triángulo si y solamente si la parabola de Kiepert es tangent a la elipse de Steiner inscrita en el triángulo.

Antes de presentar las soluciones invitamos al lector a dar un corto paseo por la *tierra de las cónicas del triángulo.*
Las demostraciones de los resultados que siguen (en la sección 2) se encuentran en [1],[2],[3].

2. Algunos resultados de la Geometría del Triángulo. Principales propiedades de las cónicas del triángulo.

a. Puntos notables del triángulo.

Según fuentes históricas, los antiguos griegos conocieron cuatro puntos notables – el baricentro G, circuncentro O, incentro I y ortocentro H. Desde aquella época se han añadido muchos puntos a esta lista..
Por ejemplo, los puntos de Gergonne J y de Nagel N.
Puntos de Gergonne y Nagel.
El punto de Gergonne es el punto de intersección de las rectas que unen los vértices del triángulo con los puntos de tangencia del círculo inscrito con los lados respectivamente opuestos.
El punto de Nagel es el punto de intersección de las rectas que unen los vértices del triángulo con los puntos de tangencia de los círculos exinscritos con los lados respectivamente opuestos.

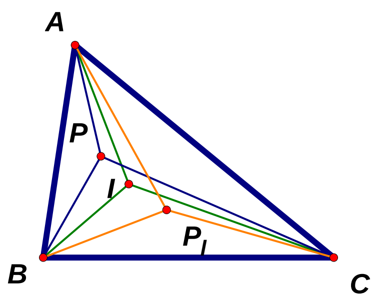


□

b. Conjugados isogonales e isotómicos. Puntos fijos.

Conjugado isogonal.

Supongamos que P es un punto del plano del triángulo ABC, no situado en ninguna de las rectas que contienen los lados. Se halla la recta simétrica de AP respect de la bisectriz interior del ángulo A; la de BP y la de CP respecto de las bisectrices análogas. Las tres rectas simétricas concurren en el punto *isogonal conjugado* de P, que llamamos P_l .

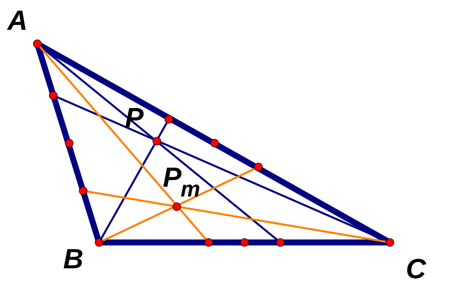


La conjugación isogonal, considerada como una transformación F_l del plano, tiene cuatro puntos fijos : el incentro y los exincentros I, I_a, I_b, I_c .

Por ejemplo, el circuncentro *O* y el ortocentro *H* forman un par de isogonales conjugados.

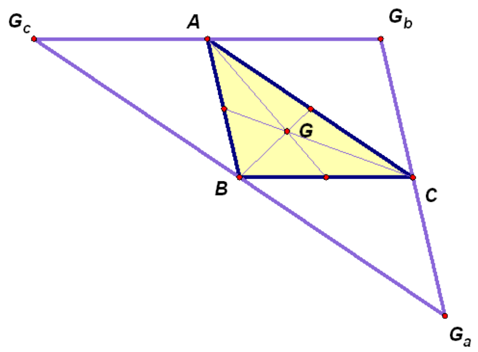
Conjugado isotómico.

Sea *P* un punto del plano del triángulo *ABC*, no situado en las rectas que contienen los lados. Sean A_1, B_1, C_1 los puntos en los que las rectas *AP*, *BP*, *CP* cortan a las rectas *BC*, *CA*, *AB*, respectivamente. Los simétricos de A_1, B_1, C_1 respecto de los puntos medios de los lados *BC*, *CA*, *AB* son los puntos A_2, B_2, C_2, respectivamente. Las rectas AA_2, BB_2, CC_2 concurren en el *conjugado isotómico* de P, P_m.



La conjugación isotómica, considerada como una transformación F_m del plano, tiene cuatro puntos *fijos* : el baricentro y los vértices del triángulo anticomplementario (el triángulo cuyo triángulo medial es *ABC*) - G, G_a, G_b, G_c.

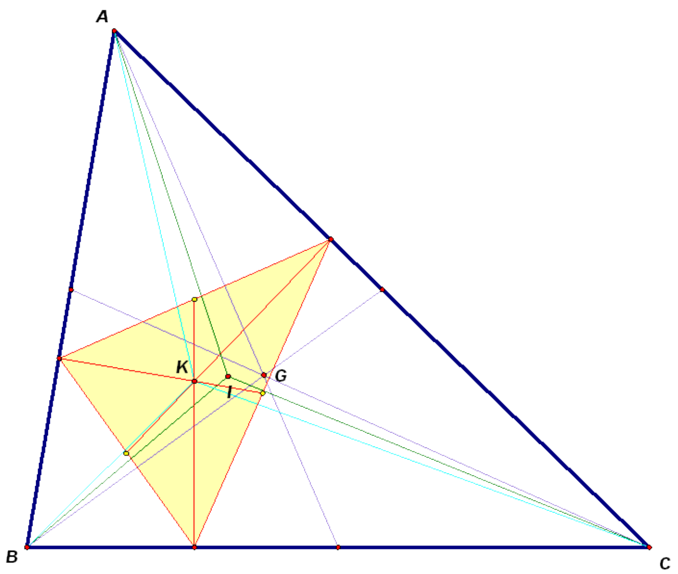
Por ejemplo, el punto de Gergonne J y el de Nagel N *son un par de puntos conjugados isotómicos*.



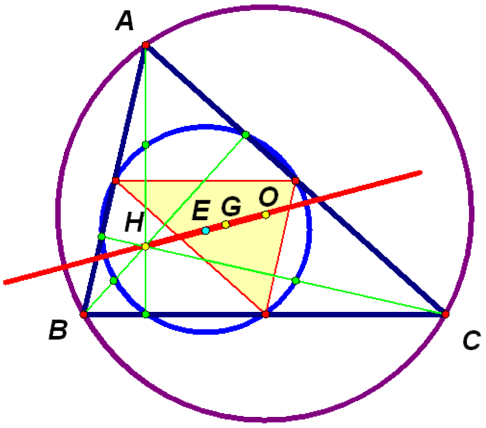
c. El punto de Lemoine.

El conjugado isogonal del baricentro G es el punto de Lemoine K (también llamado *punto simediano*).

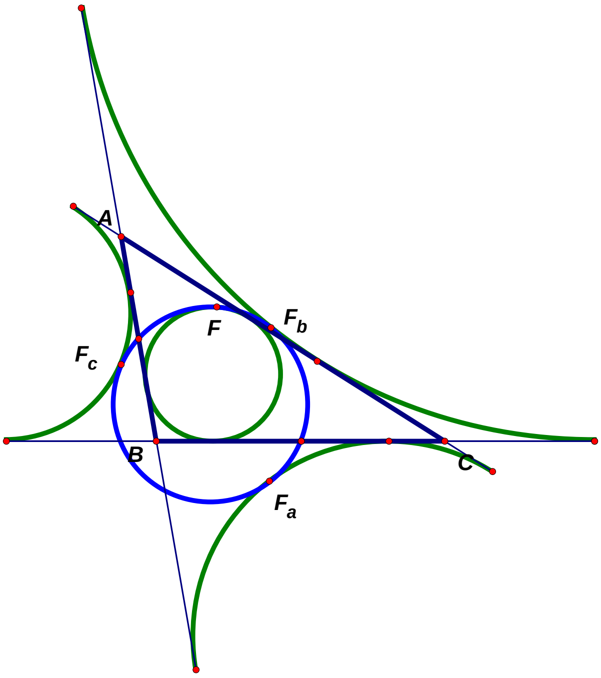
K es el único punto que es el baricentro de su propio triángulo *pedal* (*o mejor dicho, podario).*



d. La recta de Euler y el círculo de Euler. El teorema de Feuerbach y el punto de Feuerbach.



La recta de Euler
El circuncentro O, el ortocentro H y el baricentro G de un triángulo no equilátero están alineados. Además, $OG : GH = 1 : 2$.
La recta OGH es la recta de Euler del triángulo.
El círculo de Euler
Sea ABC un triángulo dado, con
(i) A_1, B_1, C_1 los puntos medios de los lados BC, CA, AB,
(ii) P, Q, R las proyecciones ortogonales de los vértices A, B, C sobre sus lados opuestos; las alturas AP, BQ, CR concurren en el ortocentro H,
(iii) X, Y, Z los puntos medios de los segmentos AH, BH, CH.
Los nueve puntos A_1, B_1, C_1, P, Q, R, X, Y, Z son *concíclicos*.
Éste es el círculo de Euler (o de los nueve puntos) de ABC. El centro de este círculo es E, que es el circuncentro del triángulo medial.
El centro E del círculo de los nueve puntos está en la recta de Euler y es el punto medio del segmento OH.
El teorema de Feuerbach.
En 1822 Karl Feuerbach publicó el siguiente notable resultado:
El círculo de los nueve puntos de un triángulo es tangent interiormente al incírculo y externamente a cada uno de los círculos exinscritos.



El punto F de tangencia del círculo inscrito con el de Euler se llama *punto de Feuerbach*

e. Otras rectas notables.

Diámetro de Brocard

Es la recta que pasa por el circuncentro O y el punto de Lemoine K.

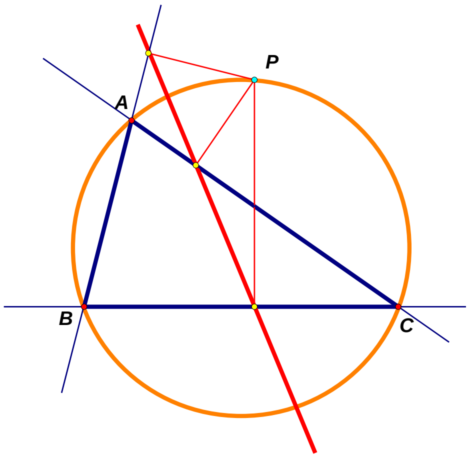
La recta de Gergonne.

Es la recta que une los puntos de Gergonne G y de Nagel N. Contiene además a los puntos H_m, I_m - conjugados isotómicos del incentro I y del ortocentro H.

La recta de Lemoine.

El punto de Lemoine K, el antiortocentro H_m y el baricentro G de un triángulo no equilátero están alineados y $KG : GH_m = 1 : 2$.

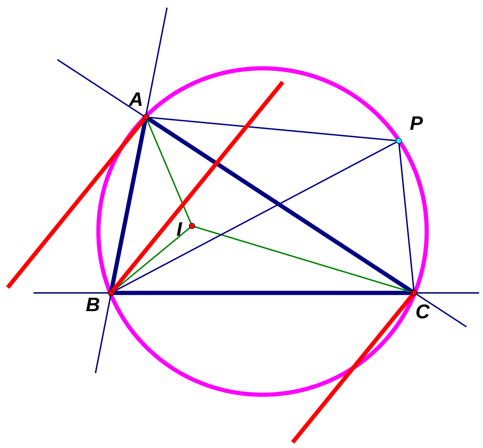
La recta de Simson.



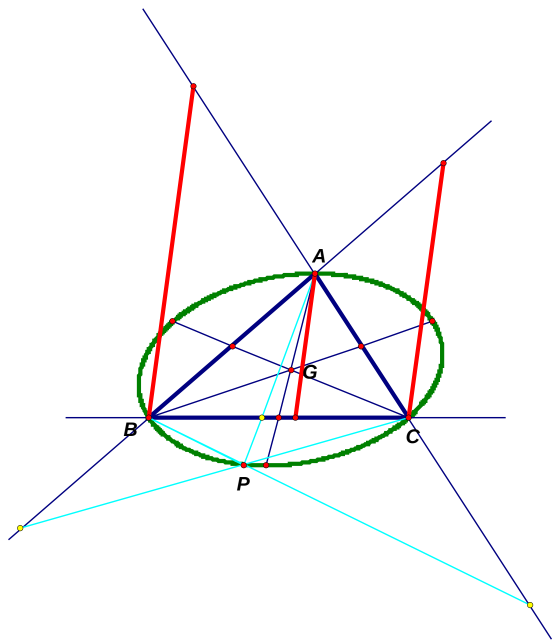
Dado un punto P sobre la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, construimos sus proyecciones ortogonales sobre las rectas que contienen los lados del triángulo. Estas proyecciones están alineadas sobre la llamada *recta de Simson* s(P) of P.

f. Puntos del infinito. Recta del infinito y conjugados.

Desde el punto de vista de la geometría *proyectiva*, toda familia de rectas paralelas tiene un punto común – llamado *punto del infinite* . Y todos los puntos del infinito del plano proyectivo forman la llamada *recta del infinitoy*. La recta del infinito es la conjugada isogonal de la circunferencia circunscrita.



Es también la transformada isotómica de la *elipse circunscrita de Steiner* (cuyo centro es el baricentro *G*)



g. Algunas propiedades generales de las cónicas.

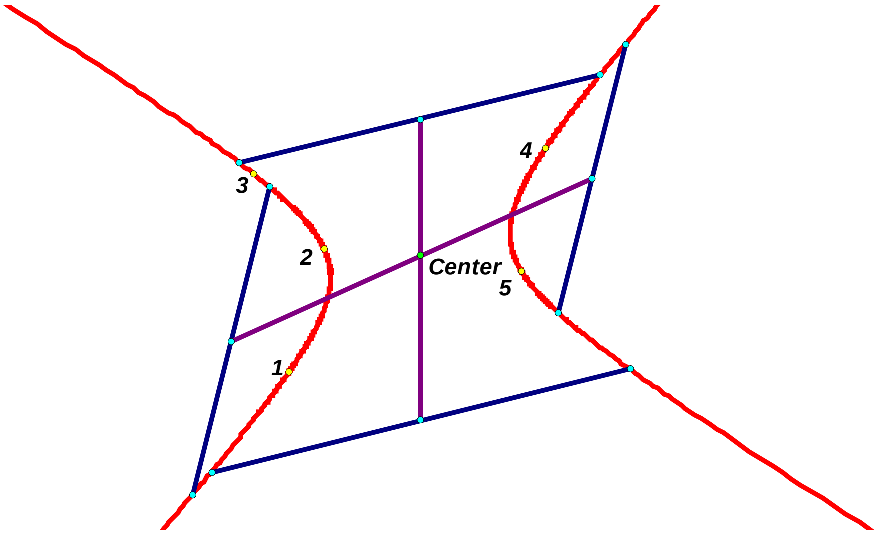
Todas las cónicas son *pryjectivamente equivalentes*, es decir, una cónica arbitraria puede transformarse en otra por una transformación proyectiva.

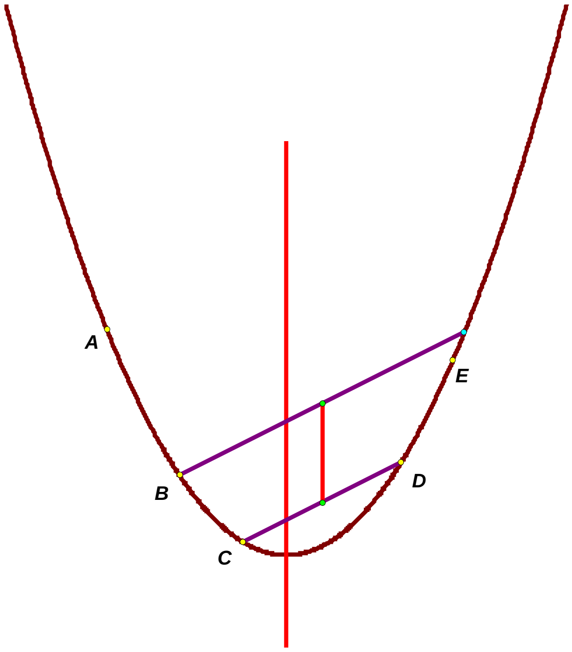
La Hipérbola tiene dos puntos de intersección con la recta del infinito; la *parábola* es tangente a ella (en otras pañabras, tiene un solo punto común con esa recta) y la *elipse* no tiene puntos comunes con la recta del infinito.

Cinco puntos del plano determinan una cónica, así como cinco rectas tangentes en el plano.

La hipérbola y la elipse son curvas *centro-simétricas* (en el caso de la parábola se puede considerer el punto del infinito del eje de la parábola como su centro).

Cualquier recta que une los puntos medios de dos cuerdas paralelas de la cónica pasa por el centro de ésta (en el caso de la parábola es una recta paralela al eje de la parábola).

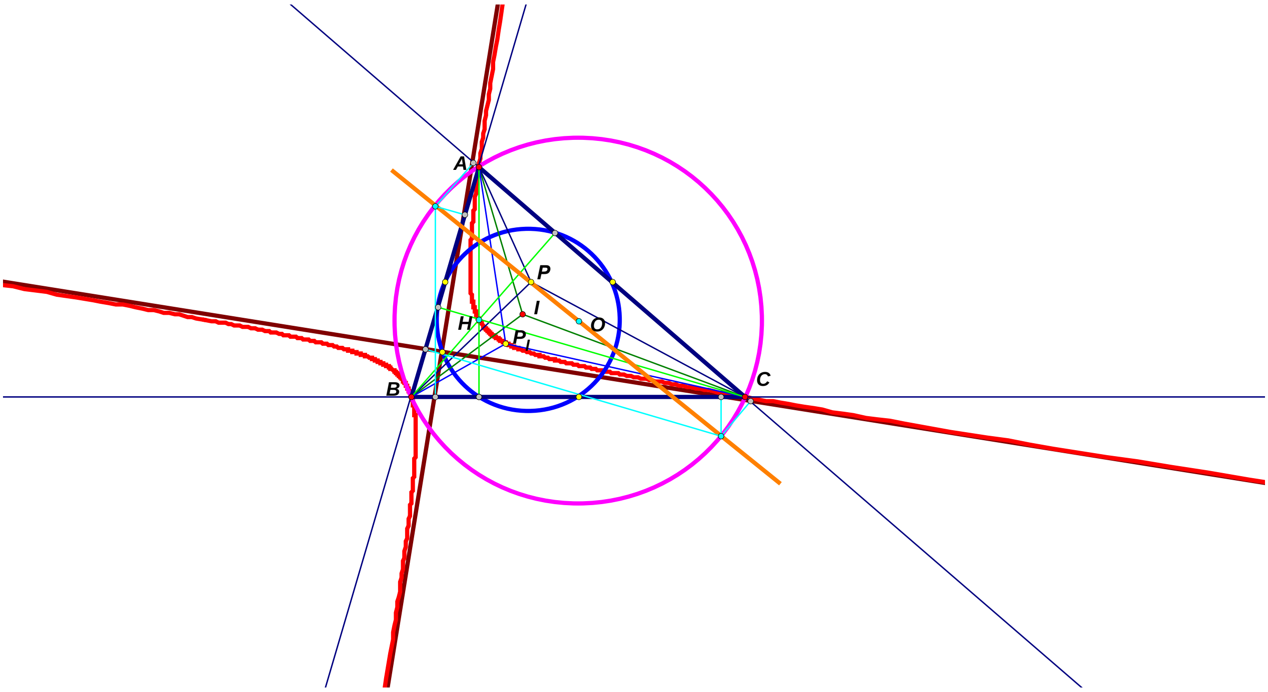




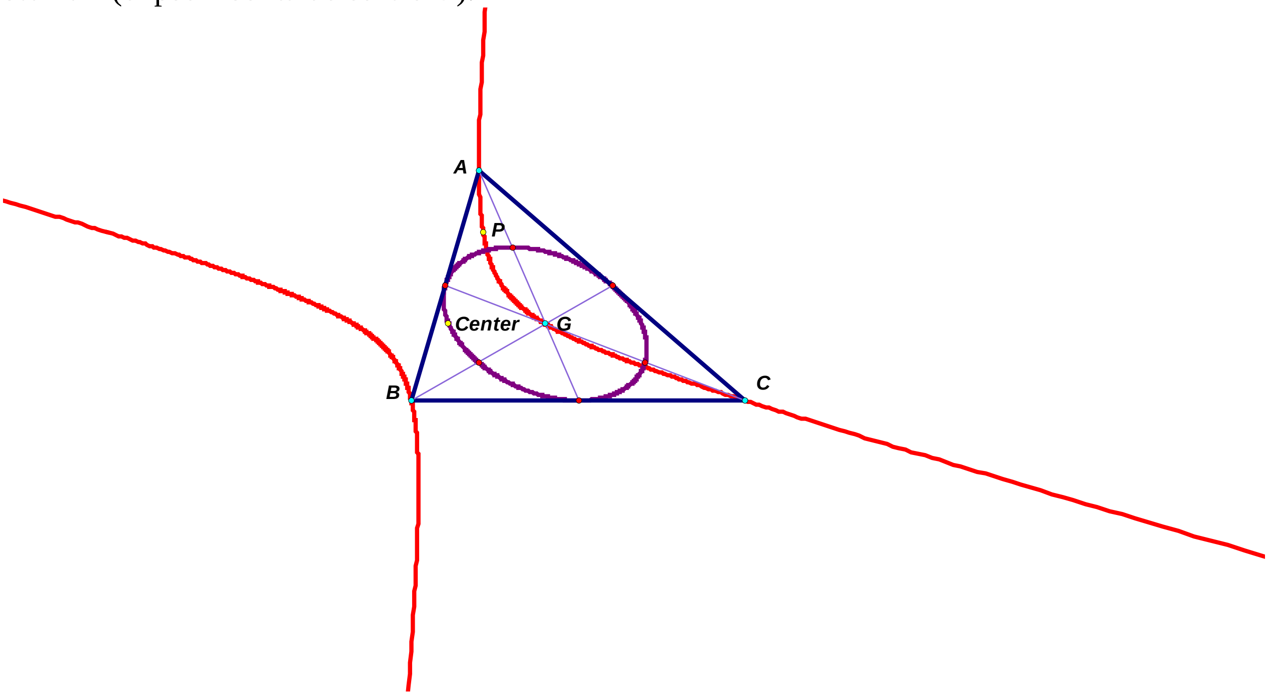
h. Cónicas circunscritas e inscritas.

Una *circucónica* pasa por los vertices del triángulo de referencia y puede considerarse la transformada isogonal (o isotómica) de una recta.
La circunferencia circunscrita es la transformada isogonal de la recta del infinito. Por lo tanto, una cónica circunscrita es una elipse, una hipérbola o una parábola según que su transformada isogonal corte a la circunferencia circunscrita en 0, 1, o 2 puntos reales.
Aparte de los tres vertices, la cónica circunscrita corta a la circunferencia circunscrita al triángulo en el conjugado isogonal del punto del infinito de la recta.(En el caso de la transformada isotómica de la recta debemos considerar la *circunelipse de Steiner* en vez del círculo circunscrito).

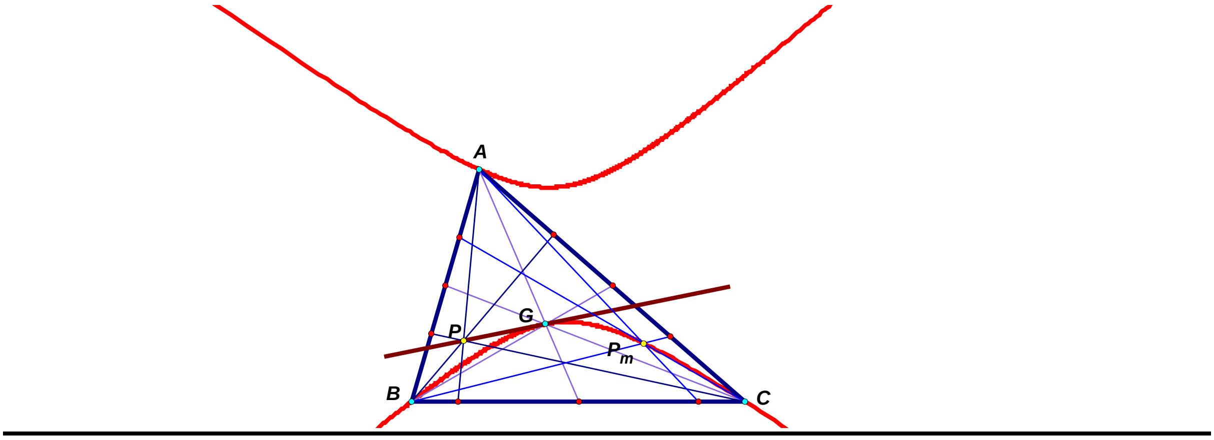
La cónica circunscrita es una hipérbola rectangular si y solamente si esta curva pasa por el ortocentro *H*.
Sean *R* y *T* puntos diametralmente opuestos de la circunferencia circunscrita. Las asíntotas de la circun-hipérbola rectangular que es la transformada isogonal de *RT* son las rectas de Simson de *R* y *T*. Se deduce de aquí que el centro de la circun-hipérbola rectangular es la intersección de esas rectas de Simson, y es un punto del círculo de los nueve puntos.

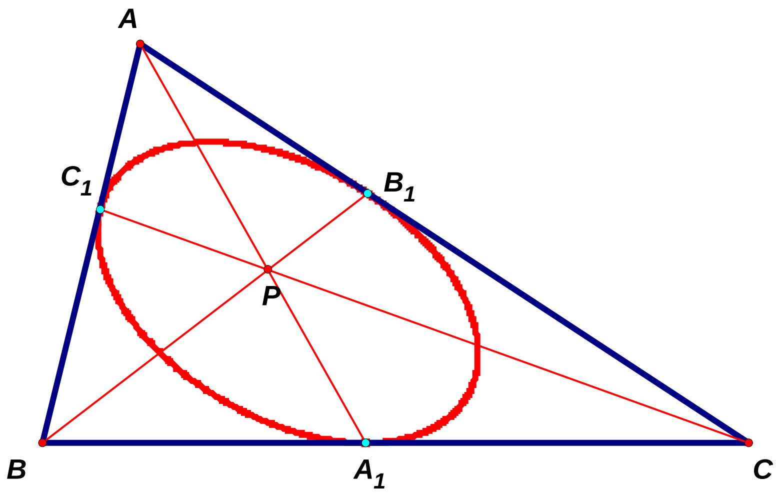


El centro de una circun-hipérbola que pasa por el baricentro *G* es un punto de la *in-elipse de Steiner* (elipse inscrita de centro *G*).



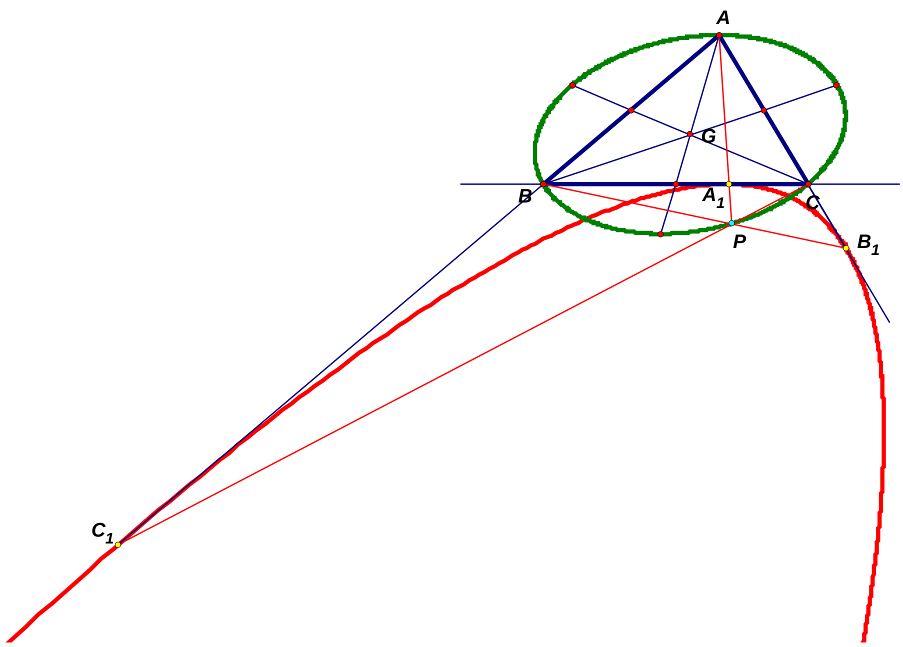
Si la circuncónica es la transformada isogonal (isotómica) de una recta que pasa por un *punto fijo* de la conjugación correspondiente, entonces esta recta es tangente a la cónica en dicho punto (la figura siguiente ilustra el caso de la transformación isotómica de una recta que pase por *G*.)





Una cónica *inscrita* es tangente a las tres rectas que contienen los lados del triángulo *ABC*.
Los puntos de tangencia forman un triángulo perspectivo con *ABC*, que llamaremos el *perspector* de la cónica inscrita.

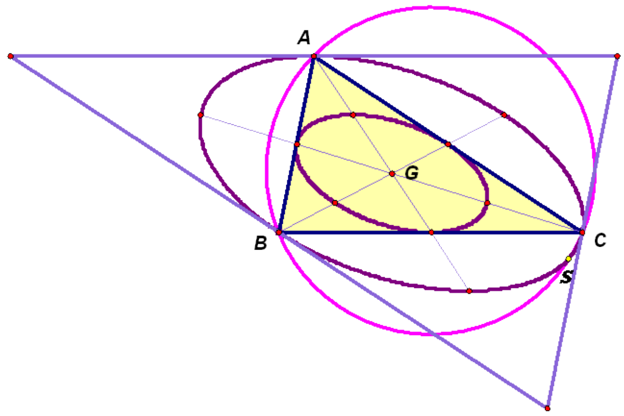
El perspector de una parábola inscrita es un punto de la *circun elipse de Steiner*



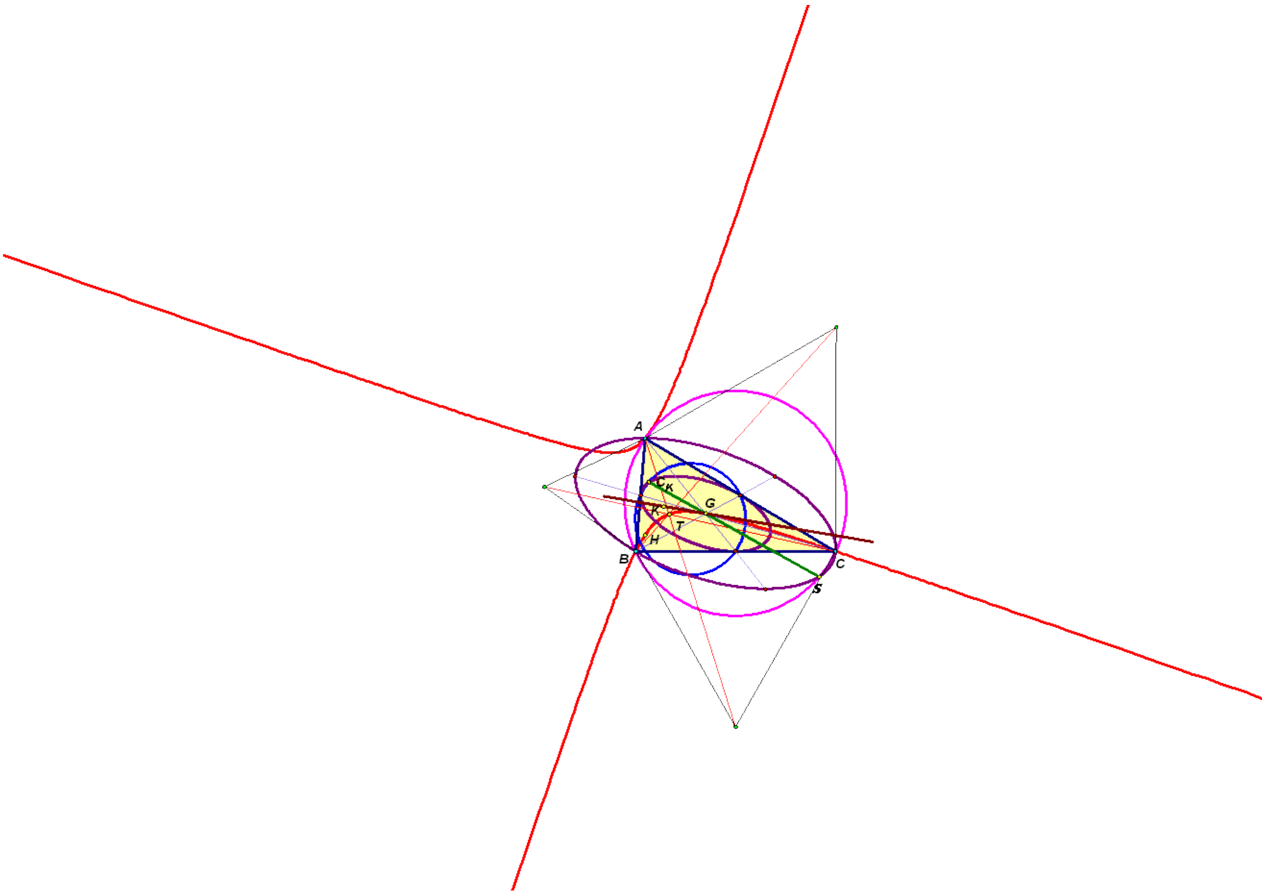
La *directriz* de una *parábola inscrita* pasa por el ortocentro *H* y el foco pertenece a la circunferencia circunscrita.

i. Cinco cónicas notables.

La circun-elipse de Steiner y la in-elipse de Steiner. El punto de Steiner **S**.
La circun-elipse de Steiner es una elipse circunscrita de centro *G*.
La in-elipse de Steiner es una elipse inscrita de centro *G*.
La circun-elipse de Steiner es la imagen de la *in-elipse de Steiner* en la *homotecia* h(*G*,-2) (observes que el circuncírculo es la imagen del círculo de Euler en esta homotecia).
Los lados del *triángulo anticomplementario son tangentes* a la circun-elipse de Steiner en los vértices del triángulo de referencia.
El punto de Steiner point **S** es el *cuarto punto* de intersección de la *circun-elipse de Steiner* con el *circuncírculo.*

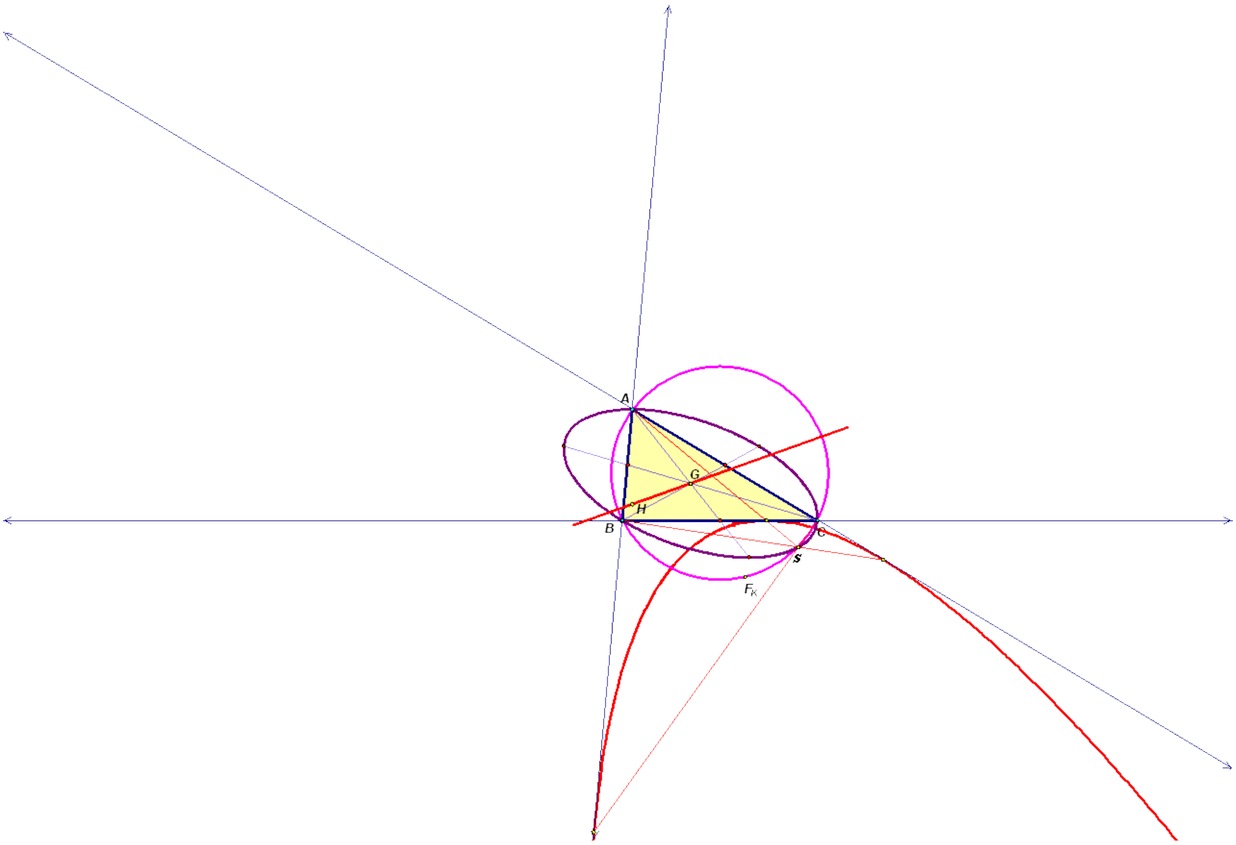


La hipérbola de Kiepert.
Es una hipérbola rectangular circunscrita, que pasa por *G* y *H*. El conjugado isogonal de la hipérbola de Kiepert es el diámetro de Brocard, y el conjugado isotómico es la recta de *Lemoine* , que es tangente a la hipérbola en el baricentro *G* (ver las seccionese **2.e, 2.h**).
Las rectas que unen los vertices del triángulo dado y los correspondientes *picos* de los triángulos isosceles concurren y el lugar de esos puntos es también la hipérbola de Kiepert (en el caso de los *triángulos equiáateros* se obtiene el famoso punto de *Fermat-Torricelli T*).
De acuerdo con **2.h**, el centro C_K de la hipérbola de Kiepert es el *cuarto punto* de intersección de la *in-elipse de Steiner* con el *círculo de Euler.* Se sigue que el punto de Steinert **S** es la imagen de C_K en la homotecia h(*G*,-2), luego los puntos **S**, G, C_K están alineados y $\frac{SG}{GC_K} = \frac{2}{1}$.



La parabola de Kiepert .

Es la parabola inscrita cuya directriz es la recta de Euler. Su perspector coincide con el punto de Steiner point **S**, y su foco está en la circunferencia circunscrita; es el resultado de la composición $F_l \circ F_m$(**S**).

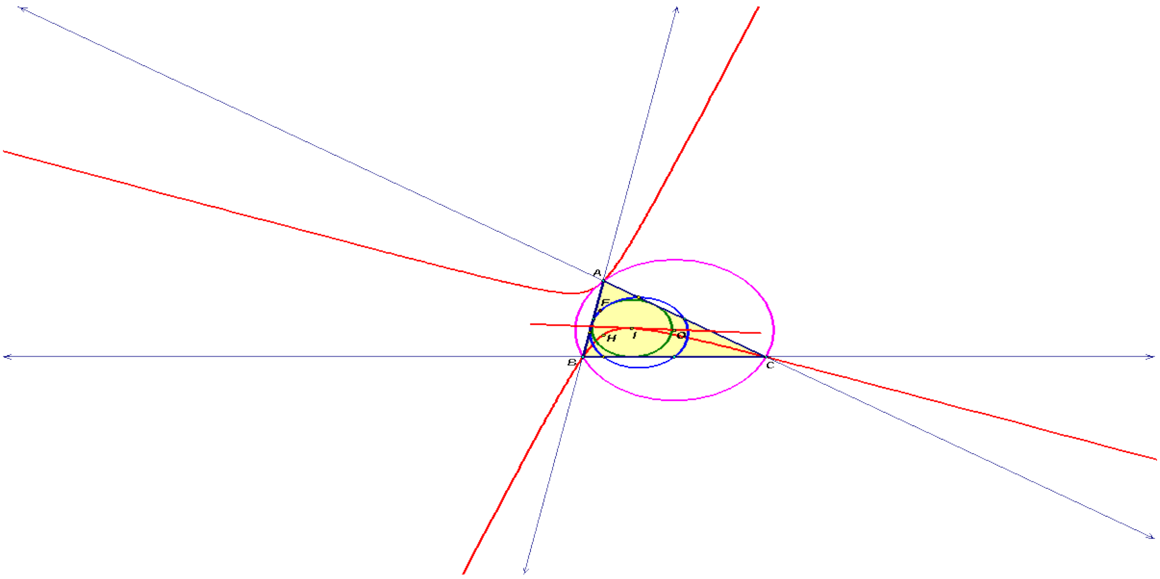


La hipérbola de Feuerbach .

Es una hipérbola rectangular circunscrita que pasa por el incentro I y el ortocentro H. Además pasa por el punto de Gergonne J y el de Nagel N. El conjugado isogonal de la hipérbola de Feuerbach es la *recta OI* (que es tangente a la hipérbola en el incentro I) y el conjugado isotómico es la *recta de* Gergonne (ver **2.e**).

El centro de la hipérbola de Feuerbach es el punto de Feuerbach F.(vere **2.d**)

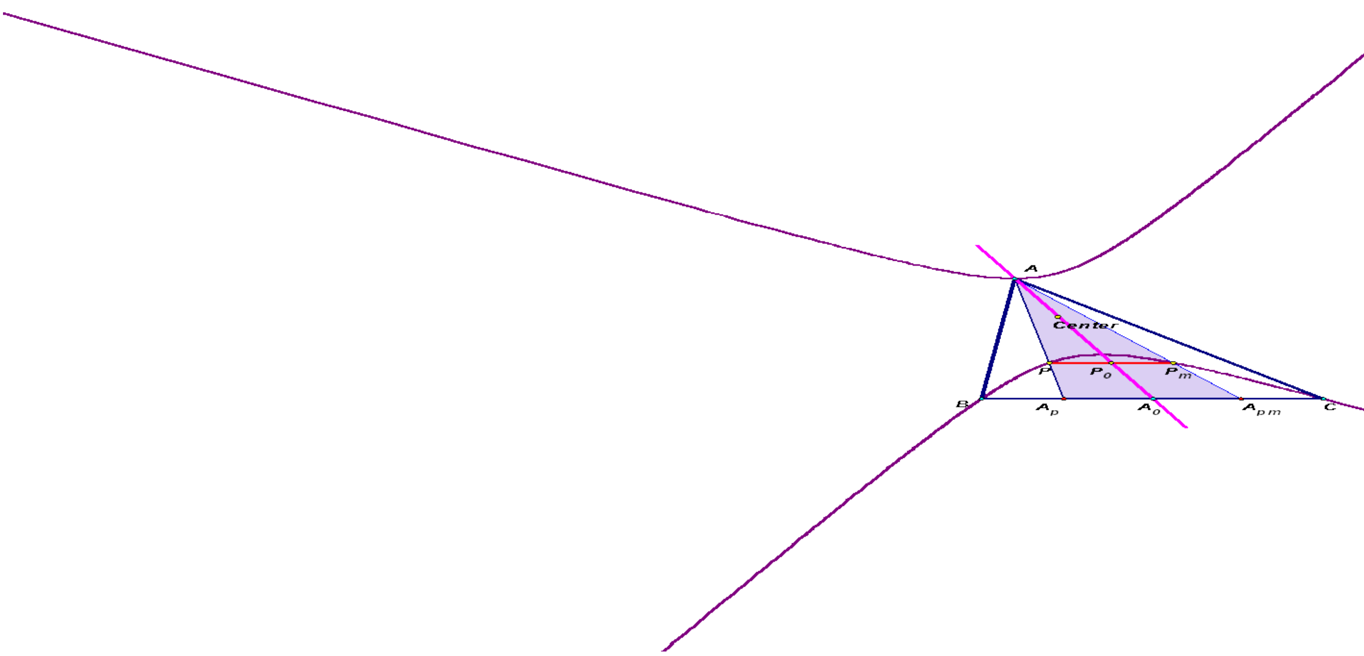
⋁



3. Las soluciones.

Ahora estamos en disposición de resolver los problemas planteados al principio, en la sección **1**. Comenzaremos con el siguiente

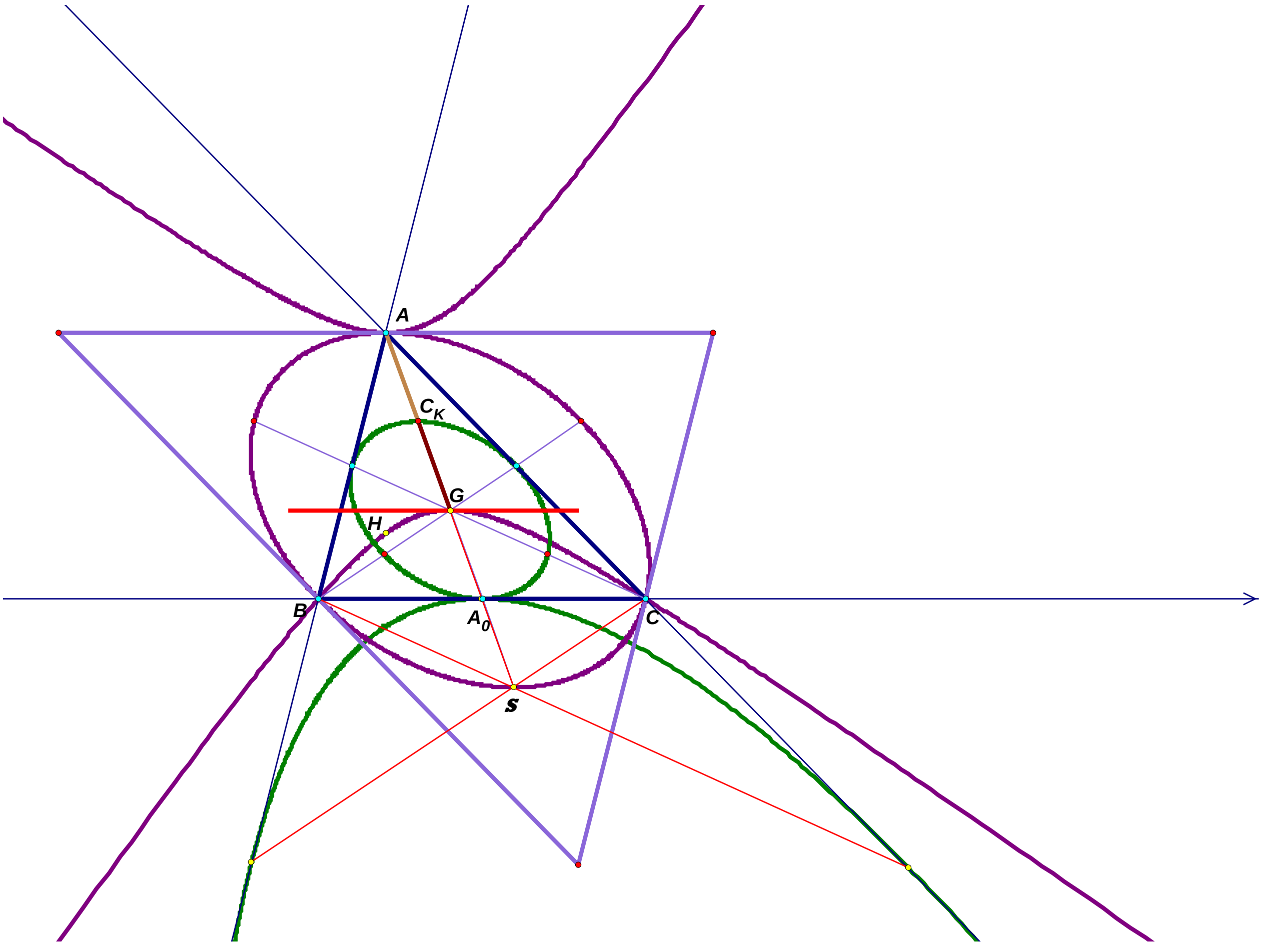
Lema:



Seant P y P_m *un par de puntos conjugados isotómicos con respect al triángulo ABC. Entonces la* *recta PP_m es paralela a la recta BC si y solamente si el centro de la cónica circunscrita que pasa por P y P_m está en la mediana AA_0.*

Demostración:
De acuerdo con **2.g**, cinco puntos del plano determinan una cónica, luego existe una cónica que pasa por A,B,C,P,P_m. Supongamos que la recta PP_m es paralela a la recta BC. Sean A_P y $A_{P\,m}$ los puntos de intersección de las rectas AP y AP_m, respectivamente. Esos puntos son simétricos con respect al punto A_0 - punto medio del segmento BC. Luego A_0 es también el punto medio del segmento $A_P A_{P\,m}$. Se sigue que P_0 - el punto de intersección de la mediana AA_0 y la recta PP_m - es el punto medio del segmento PP_m. Obviamente, tenemos dos cuerdas paralelas de la cónica, con A_0 y P_0 como sus puntos medios. Por lo tanto (por **2.g**) el centro de la cónica está sobre la mediana AA_0.
La demostración del recíproco es similar.
□
Volviendo ahora a los problemas 1 y 2, obsérvese primero que en el caso de un *triángulo isósceles* (por ejemplo, con $AB = AC$) las rectas *JN* y *GK* coinciden con la mediatriz de *BC*, **lo que excluye cualquier paralelismo**.

Solución del problema 1
Por **2.b**, el punto de Gergonne J y el de Nagel N son conjugados isotómicos. La cónica circunscrita que pasa por esos puntos es la *hipérbola de Feuerbach*, con el *punto de Feuerbach* como centror.(por **2.i**)
Y, por el *Lema*, hemos terminado.
□
Solución del problema 2.
Por ejemplo, supongamos que la recta *GK* es paralela a la recta *BC*. Ahora consideramos la hipérbola de Kiepert. Según **2.i**, la recta de Lemoine *GK* es tangent a la hipérbola en el baricentro *G*. Usando de nuevo el *Lema* (en el caso en que los puntos P y P_m coinciden con el baricentro *G*), obtenemos que la recta *GK* es paralela a la recta $BC \Leftrightarrow$ el centro de la hipérbola de Kiepert C_K está en la mediana AA_0 (que contiene a *G*). Pero, por **2.i**, los puntos $\mathbf{S}$, *G*, C_K están alineados.
□
Solución del problema 3
Supongamos que la hipérbola de Kiepert es tangente a la circun-elipse de Steiner del triángulo *ABC*. Entonces el punto de tangencia coincide con uno de los vertices del triángulo, por ejemplo A (pues aquí tenemos tres vertices del triángulo y un par de puntos coincidentes en el punto de tangencia).
Obsérvese que la recta tangent a la circun-elipse en el vértice A es paralela a *BC* (como el lado correspondiente del triángulo anticomplementario). Entonces esa recta es también tangent a la hipérbola de Kiepert. Ahora tenemos la cuerda de la hipérbola – el segmento BC con su punto medio A_0. Se sigue que el centro C_K está en la mediana AA_0 (en el caso degenerado de la tangent el punto medio de la segunda cuerda coincide con el punto de tangencia). Por la colinealidad de los puntos $\mathbf{S}$, G, C_K resulta que el punto de Steiner $\mathbf{S}$ está en la mediana AA_0.
Queda por señalar que el perspector de la parábola de Kiepert es el punto de Steiner $\mathbf{S}$.(ver **2.i**)
La demostración del recíproco es similar.



Referencias:

[1] *Kimberling C.* Encyclopedia of triangle centers “ETC”. [http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/].
[2] *Kimberling C.* Triangle centers and central triangles. Winnipeg: Utilitas Mathematica Publ., 1998.
[3] *Yiu P.* Introduction to the Geometry of the Triangle. [http://www.math.fau.edu/yiu/geometry.html]

Autores:

Evgeniy D. Kulanin,
lucas03@mail.ru

Alexei G. Myakishev,
alex_geom@mtu-net.ru

DISQUISITIONES.
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

ROBERTO BOSCH CABRERA

Abstract. Con este artículo pretendemos abordar diversos temas relacionados con la resolución de problemas en matemáticas. Nuestro principal objetivo es demostrar que está estrechamente vinculada con la investigación. También queremos darle un carácter enciclopédico - pedagógico, trataremos de dilucidar los procesos cognitivos involucrados en la resolución de problemas y por último ver esta como arte, ciencia y deporte.

The mathematician's main reason for existence is to solve problems
(Paul Halmos 1980).

La motivación de este trabajo fue el libro Mosaico Ajedrecístico de A.Karpov, E.Guik. Donde se estudia el ajedrez desde las tres aristas antes propuestas: arte, ciencia y deporte. Nos preguntamos, puede la resolución de problemas enmarcarse en este contexto ? Y creemos que la respuesta es si. Comenzemos por ver esta en un contexto general.

1. Contexto general

La resolución de problemas es considerada como la más compleja de todas las actividades intelectuales. Ha sido definida como el proceso cognitivo que requiere la modulación y el control de habilidades fundamentales. La resolución de problemas ocurre cuando un organismo o un sistema de inteligencia artificial necesita moverse de un estado dado a un estado final o meta. Veamos cuales son las técnicas de resolución de problemas.

1.1 Técnicas generales

- Abstracción: Resolver el problema en un modelo de el sistema antes de ser aplicado al sistema real.
- Analogía: Usar una solución que resuelve un problema análogo.
- Reunión creativa: Especialmente entre grupos de personas, sugiriendo un gran número de soluciones o ideas y combinando y desarrollando estas hasta alcanzar el óptimo.
- Divide y vencerás: Particionar un problema complejo en pequeños problemas solubles.
- Prueba de Hipótesis: Asumir una posible explicación al problema y tratar de probar (o desaprobar) lo asumido.
- Pensamiento lateral: Aproximarse a una solución indirectamente y creativamente.
- Análisis medio - fin: Seleccionar una acción en cada estado (paso) para acercarse más a la meta.

- Método de focalizar objetos: Sintetizar características aparentemente no relacionadas de diferentes objetos en algo nuevo.
- Análisis morfológico: La evaluación de las interacciones de un sistema completo.
- Reducción: Transformar el problema en otro el cual posee solución.
- Investigación: Emplear ideas o soluciones existentes a problemas similares.
- Análisis causa raíz: Eliminar la causa del problema
- Prueba y error: Probar posibles soluciones hasta encontrar la correcta.

Todo lo anterior fue tomado de [1].

2. Trabajos de George Polya y Alan Schoenfeld

Dada la complejidad y la madurez necesaria para entender la obra de Polya y Schoenfeld hemos decidido solo escribir algunos apuntes y preferimos referir al lector a las obras ya establecidas de los anteriores. Un análisis riguroso y exhaustivo de estos va más allá de las pretensiones de este trabajo. Veamos:

George Polya dedicó un esfuerzo considerable en tratar de caracterizar los métodos usados para resolver problemas, y describir como la resolución de problemas debe ser enseñada y aprendida. Escribió 4 libros sobre el tema:

- How to solve it.
- Mathematical Discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving.
- Mathematics and plausible reasoning. Volume 1: Induction and analogy in mathematics.
- Mathematics and plausible reasoning. Volume 2: Patterns of plausible reasoning.

Polya sugiere los siguientes pasos a la hora de resolver un problema matemático:

(1) Entender el problema.
(2) Hacer un plan.
(3) Llevar a cabo el plan.
(4) Ir atrás en el trabajo y ver como puede este ser mejorado.

Si esta técnica falla existe un problema más fácil que puede ser resuelto: encontrarlo. Si no se puede resolver el problema propuesto, tratar de resolver primero algún problema relacionado. Polya le da mucha importancia al reconocimiento de patrones, simetría, analogías y al proceso de inducción. Habla de hacer figuras y gráficas y de buscar un modelo. Es muy importante también la heurística y la generalización. Estos son a muy grandes rasgos los temas que aborda Polya en su obra. Recomendamos el divertimento "Los diez mandamientos del profesor" en la REOIM 10; ver `http://www.oei.es/oim/revistaoim/divertimentos10.htm`. Además sugerimos el capítulo 1 de [30] el cual está inspirado en los trabajos de Polya.

Alan Schoenfeld recomienda que la enseñanza de la matemática debe ser abordada a través de la resolución de problemas. Su teoría está basada en un extenso análisis de estudiantes vinculados a esta. La estructura teórica descansa en la psicología cognitiva, particularmente en los trabajos de Newell - Simon. Schoenfeld enfatiza en la importancia de la metacognición y las componentes culturales en el aprendizaje de las matemáticas. El éxito en la resolución de problemas depende de una combinación de conocimiento de recursos, heurística, procesos de control y confianza. Para Schoenfeld es muy importante que los estudiantes

- Busquen soluciones, no solo memorizen procedimientos.
- Exploren patrones, no solo memorizen fórmulas.
- Formulen conjeturas, no solo resuelvan ejercicios.

Recomendamos los siguientes libros:

- Mathematical problem solving.
- Cognitive science and mathematics education.
- Learning to think mathematically : problem solving, metacognition, and sense making in mathematics.

3. Consideraciones Generales

La resolución de problemas mayormente se asocia a las olimpiadas matemáticas y a las numerosas revistas que existen dedicadas al tema. Con este artículo queremos hacer un análisis sistemático y analizar varios factores que influyen en la resolución de problemas. Demostraremos que este campo de la matemática no está desligado de la investigación. De hecho grandes investigadores alguna vez han hecho resolución de problemas de forma muy activa, un caso notable es el de Terence Tao [30]. Curiosamente muchos exitosos olimpistas abandonan esta una vez que entran a la universidad, aunque algunos participan en olimpiadas y competencias a este nivel. Pero una vez que estos estudiantes se graduan abandonan por completo la resolución de problemas , es notable que concursantes con un altísimo rendimiento en Olimpiadas, cabe citar al moldavo Iurie Boreico, actual estudiante de la Universidad de Harvard, veamos sus comentarios una vez realizada la Putnam 2010 : básicamente afirmó que la investigación matemática trataba con problemas más difíciles y que había participado en la Putnam 2010 casi que por casualidad. También está el caso de un colega cubano, Jorge Erick, un gran olimpista, quien en comunicación personal me comentó que la resolución de problemas fue una parte de su vida, pero ahora estaba dedicándose exclusivamente a la investigación. Esta afirmación fue en respuesta a mi propuesta de hacer un Compendio Iberoamericano, que incluiría todas las olimpiadas iberoamericanas y sus bancos de problemas, algo similar al ya famoso IMO Compendio. Qué hace que estudiantes con un gran talento y habilidades en Olimpiadas Matemáticas abandonen este campo ? A mi entender una de las causas es que la resolución de problemas y los concursos muchas veces se toman como hobby o como actividad extracurricular, también algunos olimpistas ven este campo como una serie de técnicas y habilidades y se enfocan solamente en resolver problemas, sin llegar a ver la interconexión con la investigación matemática al más alto nivel. Es lamentable que varios colegas cubanos muy exitosos en Olimpiadas actualmente se encuentren sumergidos a tiempo completo en programas de maestría y doctorado. Cabe citar Andrés Sánches Pérez, Mario Garcia Armas, Gerandy Montes de Oca, Hector Raul Fernandez Morales. Muchas veces estudiantes involucrados en los concursos pueden sufrir decepciones, dado que no alcanzan una alta calificación, estos casos deben ser atendidos personalmente por el entrenador y estudiar a fondo que factores influyeron en esto. Los factores pueden ser variados: falta de concentración, incapacidad para resolver un problema determinado en muy poco tiempo. Estos alumnos deben ser estimulados y no rechazados, ese mismo problema fuera de la olimpiada se puede hacer con calma y buscando varias vias de ataque.

No obstante existen ex-olimpistas los cuales están muy activos, un caso notable es Daniel Lasaosa, Universidad Pública de Navarra , España. Ver sus contribuciones en la Revista Escolar de la OIM y la Revista Mathematical Reflections.

Según Kolmogórov el interés por las matemáticas en edades tempranas suele ser temporal y no siempre se conserva, este criterio es sostenido en [2] basados en casos encontrados en escuelas secundarias chinas. Sin embargo curiosamente en Cuba no ocurre así generalmente, hay varios colegas que desde niños estuvieron involucrados en los concursos matemáticos y conservaron sus habilidades e interés por la matemática en general.

Un matemático debe tener todos sus conocimientos en la mente , o debe tener punteros hacia determinados libros y artículos ? Esta es una larga discusión intelectual que tuve con mi amigo y colega Felix Gotti, mi modesta opinión es la segunda, inspirado en mi profesora de Análisis de primer año Sofía, este método de investigación y de resolución de problemas me ha traido muy buenos resultados, la deficiencia que vemos en lo primero es que el estudiante se prepara para un examen y muchas veces memoriza las ideas, una vez que se gradúa no está preparado para la investigación, el papel que juegan los exámenes debe ser considerado y estudiado seriamente. El trabajo en equipos de investigación es mucho más interesante y eficiente desde nuestro modesto punto de vista. La resolución de problemas aparejada con la investigación es crucial, un problema puede motivar la reflexión y el intercambio de ideas, es más flexible que los rígidos exámenes. Debe darse mucho valor al método socrático.

Las olimpiadas matemáticas así como las olimpiadas deportivas son y deben serlo siempre un puente entre las naciones, entre las distintas culturas, un medio para intercambiar ideas. Las revistas matemáticas no deben dar preferencia a subscriptores locales, deben estar por encima de cualquier limitación ideológica o política. Aunque cada editor está en el derecho de seleccionar el material a ser publicado. Debe dársele crédito a todas las personas que de una forma u otra colaboran con la revista.

El entrenamiento excesivo para las Olimpiadas puede ser dañino para los estudiantes, debe vincularse la resolución de problemas con puzzles y juegos, charlas educativas de cine, arte , literatura. Es necesario detectar las habilidades de cada estudiante y darle una atención personalizada, siempre se deben suministrar al alumno grupos de problemas desafiantes pero en orden creciente de dificultad, el autoestudio es también muy importante, esto fomenta independencia en el estudiante y hace que mediante la autorreflexión surgan preguntas e inquietudes. Surge la pregunta : hasta que punto puede un estudiante autodidácticamente mejorar sus habilidades en resolución de problemas y en matemática en general

? Creemos que esto es posible, siempre y cuando se disponga de suficiente bibliografía actualizada y acceso a sitios de Internet vinculados con la matemática, páginas web de olimpiadas, forum, revistas, etc. La correspondencia con otros alumnos y matemáticos ya sea online o por correo postal puede ser muy estimulante. Pero el lector debe estar diciendo que hay una contradicción en todo lo anteriormente dicho, por un lado se necesita un equipo multidisciplinario de entrenadores y por otro lado existe la opción de que el estudiante trabaje por su cuenta, creemos que debe ser parte y parte, expliquemos esto en más detalle, un alumno muy joven, un niño por ejemplo, necesita de todo un equipo de especialistas, pero un estudiante graduado universitario puede perfectamente mejorar sus habilidades en la resolución de problemas de manera autodidacta. Existe un antiguo mito sobre la participación de muchachas en olimpiadas. Ver [31] para un estudio demográfico minucioso por regiones con numerosas estadísticas sobre países y estudiantes.

5. Puzzles y juegos

Es conocida la importancia de los puzzles y juegos en la vinculación de los niños y jóvenes a la matemática. En este campo es notable el trabajo de Andy Liu. Seleccionamos algunos por puro gusto personal pero existen muchos otros igual de interesantes, ver [3][4].

Sudoku:

Un tablero Sudoku relativamente fácil puede ser resuelto con una cadena de implicaciones de principio a fin. Esto permite introducir conceptos de lógica formal didácticamente. Ver anexo, Sudoku 1. Sin embargo hay tableros Sudokus muy difíciles los cuales requieren del método de reducción al absurdo, en algunos casos con una suposición basta, pero en otros hay que hacer hasta 2 suposiciones, si en el camino no se llega a contradicción queda resuelto el tablero , de lo contrario cambiamos de número y seguimos el proceso. Las cadenas de implicación y el método de reducción al absurdo son cruciales en resolución de problemas. Hablando de problemas, construir un tablero Sudoku ! Esto es posible a mano o es necesaria una computadora ? Este fue un debate que tuve con mi amigo Hector Armando Riso. El me comentaba que la idea apropiada era aplicar un algoritmo backtracking, recursividad. Ver anexo, Sudoku 2 el cual es muy difícil.

Cubo Rubik:

El cubo Rubik fue creado por el arquitecto húngaro Ernő Rubik , ver el excelente libro [5] para conocer como surgió este formidable juego. El cubo Rubik sirve para mejorar la percepción espacial en niños y jóvenes, puede ser utilizado en clases de matemática para introducir conceptos combinatorios, y a un nivel superior (preuniversitario - universidad) para introducir ideas de la teoría de grupos [33]. Veamos todo esto en detalle:

Se puede formular la pregunta en clase: cuántas configuraciones posibles tiene el cubo ? Esta es una pregunta sumamente difícil, el objetivo no es que los alumnos encuentren la respuesta exacta, sino motivar el conteo de configuraciones, una vez que los estudiantes detecten la dificultad del problema se les puede ir guiando hasta la solución, este ejercicio debe ser orientado para trabajar en grupo (trabajo cooperativo). La respuesta es 43252003274489856000 configuraciones, y un ordenador necesitaría cerca de 14000 millones de años a un ritmo de 100 configuraciones por segundo para imprimirlas [5]. A un nivel superior son considerables los trabajos de Emmanuel Halberstad - quien vincula el teorema de Jordan Holder.

Mi amigo Ariel Velazques estando en la escuela vocacional V.I.Lenin intentó componer el cubo sin conocer un algoritmo previo y mi amigo y colega Jesús Cabrera intentó mediante la observación componer los cubos esquinas en la tercera fase de un algoritmo que ambos conocíamos pero no recordábamos , esto es excelente para niños y jóvenes con una gran imaginación, conlleva a la experimentación y al reconocimiento de patrones. Este método debe ser aplicado aproximadamente por una semana, después de este tiempo se le debe enseñar un algoritmo al estudiante, en caso de que no haya encontrado uno por si solo. Son notable el trabajo de Andy Liu con clubes de matemática en este sentido y de Jerry Slocum con la Slocum Puzzle Foundation la cual promueve el uso de puzzles con fines educativos. Ver [23]

Ajedrez:

Ver los problemas 3 y 4 en el apéndice de [6]. Estos problemas interrelacionan la matemática con el ajedrez, son considerables los trabajos de Noam Elkies en la vinculación ajedrez - matemática [7]. En [8] se puede estudiar la regla del cuadrado: promoción del peón o también la obstrucción Novotny. En [4] se pueden encontrar también temas vinculados con el ajedrez y la matemática.

Tickets:

Este es un juego matemático muy popular en la Facultad de Matemática y Ciencia de la Computación de la Universidad de la Habana. Consiste en una serie de 6 dígitos con los cuales usando operaciones matemáticas elementales debe obtenerse el número 100. Pero como influye esto en la resolución de problemas ? Es una forma excelente de ejercitar la mente, hace que un estudiante pueda resolver problemas en poco tiempo y gane en concentración, aspectos indispensables en las olimpiadas matemáticas. Veamos un ejemplo muy simple: 405050; obtenemos 100 de la siguiente forma: $(4+0)*(5+0)*(5+0) = 100$.

Tetris:

Un juego ideal para introducir los polyominoes (Solomon Golomb). Ver [9] para información muy detallada, muy interesante la sección sobre el efecto del juego sobre el cerebro.

15 - Puzzle:

Para la historia de como surgió este puzzle y otras cuestiones ver [10]. Este juego es apropiado tanto para niños como para investigadores, un niño con mucha fuerza de voluntad puede ser capaz de encontrar el algoritmo que resuelve este puzzle y a estudiantes que están tomando un curso de teoría de grupos se les pueden presentar preguntas muy interesantes sobre grupos de permutaciones, existe una amplia bibliografía que puede ser encontrada en [11]. Siendo estudiante en la Facultad de Matemática y Ciencia de la Computación formé parte de una discusión intelectual con varios colegas, dos de ellos de ciencia de la computación Dayron Edmundo Acosta y Douglas , Willy Valcarce y Felix Gotti (matemáticos) sobre este puzzle, la verdad no recordaba que siendo niño había jugado este en la escuela primaria, la discusión se centraba en tomar un tablero 15-puzzle con una configuración arbitraria y ver si era soluble o no. Pensé que el problema podía ser solucionado buscando un invariante pero confieso que no lo encontré, mucho después encuentro el artículo [12] , y descubro que la idea está en la Teoría de Grupos. Una muestra más que ideas sencillas pueden llevar a la investigación, y que la resolución de problemas no está necesariamente desligada de la investigación.

6. Revistas

Existen numerosas revistas dedicadas a la resolución de problemas:

Kőmal:

Fundada el 1ero de Enero de 1894, "KőmaL - Kőzépiskolai Matematikai és Fizikai Lapok" es publicada en húngaro con algunas excepciones en inglés. Paul Erdős fue uno de sus más grandes colaboradores. El sitio web oficial es [13]. Recomendamos el artículo: On János Bolyai's Bicentennial. Elemér Kiss. Es una tarea muy ambiciosa pero sería ideal que se recopilaran todos los ejemplares en idioma inglés.

Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem:

Esta revista es publicada por la Canadian Mathematical Society (CMS). Ha sido referida como "la mejor revista de resolución de problemas en el mundo". Crux incluye una sección titulada "Olympiad Corner" la cual es muy útil para estudiantes preparándose para competiciones matemáticas. Esta es una excelente revista, donde se pueden encontrar problemas de variados niveles de dificultad y artículos. Tiene contribuyentes de todo el mundo, y fue muy popular entre un grupo de colegas que estubímos involucrados con los concursos de matemática y la resolución de problemas. Son notables los problemas de Walther Janous, por solo mencionar uno de sus colaboradores. Cabe destacar el hecho de que todos los ejemplares anteriores al 2006 sean de libre acceso, esto permite a estudiantes muy jóvenes consultar estos archivos y sumergirse en el fascinante mundo de la resolución de problemas.
Recomendamos al lector el siguiente problema:
Volume 17, number 1, January 1991.
(1984 : 74) West point proposal:
Determine the maximum of the convex hull of four circles C_i, $i = 1, 2, 3, 4$ each of unit radius, which are placed so that C_i is tangent to C_{i+1} for $i = 1, 2, 3$.
Con solución muy elegante del experimentado Richard K. Guy. El sitio web de la revista es [14].

Revista Escolar OIM:

La Revista Escolar de Matemáticas digital para uso de alumnos y profesores de Educación Media es promovida por el profesor Francisco Bellot Rosado, Catedrático del I.E.S. "Emilio Ferrari" de Valladolid, representante para Europa de la World Federation of National Mathematics Competitions. La mayor fuerza de esta revista estriba en que estudiantes iberoamericanos puedan acceder a material actualizado y didáctico sobre resolución de problemas, aunque hoy en día es vital para todo problemista dominar varios idiomas, la política editorial de la REOIM de publicar solo en español es excelente. Esta revista tiene un enfoque ligero y ameno, cabe destacar sus divertimentos, los problemas propuestos no son extremadamente difíciles pero si motivadores. La mayor colaboración viene dada por los españoles, aunque se han ido sumando problemistas de todo el mundo. Más adelante hablaremos de un problema propuesto en la revista por su editor. Su sitio web oficial es [17]

Eureka:

Excelente revista brasilera, cubre totalmente las Olimpiadas Brasileras de Matemática a todos los niveles. Esta fue la primera revista que conocí estando en la escuela vocacional Lenin, recuerdo que mi amigo Jorge Erick poseía algunos ejemplares. Un tema geométrico muy interesante es el propio logo de la revista vinculado con la inversión, ver [15]. Esta revista recibe el apoyo del prestigioso IMPA, actual centro donde estudian varios colegas. El sitio web oficial es [18]

Mathematical Reflections:

Esta revista fue fundada en el 2006, por el profesor Dr. Titu Andreescu. Se proponen 24 problemas en cada ejemplar siendo una publicación bimensual. Los problemas están divididos en 4 categorías, Junior, Senior, Undergraduate and Olympiad. Los problemas propuestos abarcan muchos temas pero se pudiera decir que las desigualdades es el fuerte de la revista. Tiene suscriptores de 54 paises, con predominio de las contribuciones de Rumania. Recientemente se acaba de publicar un libro que compila los años $2006 - 2007$. El sitio web es [16]

American Mathematical Monthly:

Fundada por Benjamin Finkel en 1894. Una revista con artículos muy interesantes de gran valor científico y a su vez entendibles por estudiantes universitarios. La sección de problemas es ya legendaria, y la dificultad de estos es considerable. Cubre la competición Putnam.

Kvant (Quantum):

Revista fundada en la ex-Unión Soviética en 1970 por un grupo de prominentes físicos y matemáticos soviéticos. Siendo sus editores Isaak Kikoin y Andrés Kolmogórov. Con el derrumbe del campo socialista la circulación de la revista disminuyó considerablemente. En 1991 surge Quantum publicada por Springer - Verlag. Kvant era publicada por la Academia de Ciencias y por la Academia de Ciencias Pedagógicas. En Kvant alguna que otra vez aparecían entrevistas a prominentes matemáticos y físicos como V. Arnold, I. Gelfand, A. Kolmogórov, S. Novikov, R. Graham. Ver [19] y para información específica sobre Quantum ver [20].

Math Horizons:

Revista publicada por la MAA. Publica artículos muy interesantes en un tono relativamente ligero accesibles a un amplio público. Sus editores son Stephen D. Abbott, F. Torrence. Se publican 4 ejemplares al año. El sitio web oficial es [21]. Posee ilustraciones y portadas muy bellas.

7. La Gran Biblioteca

Este es un proyecto utópico, pudiera parecer ciencia ficción pero creemos que es realizable con un trabajo bien organizado por parte de un equipo multidisciplinario. Veamos; una serie de computadoras en paralelo, conectadas a una máquina central que es la que contiene la base de datos, todas estas máquinas deben ser capaces de tener una gran posibilidad de procesamiento de datos, reconocimiento de patrones, filtros y buscadores. La base de datos debe ser accesible en todos los idiomas. El propósito es principalmente de consulta, deben estar disponibles todos los libros de resolución de problemas publicados, revistas y sitios web, todas las olimpiadas matemáticas, biografías de problemistas, etc. Parte de lo anterior existe pero en otro contexto, ver ArXiv, o los archivos del Bulletin of AMS, pero por ejemplo American Mathematical Monthly no (a pesar de JSTOR), es sumamente difícil vincular un problema con su solución, ya que pueden llegar a pasar años entre la publicación de uno y otro. En este sentido es notable el sitio web `http://www.artofproblemsolving.com/`, pero hablamos de algo más abarcador. No confundir las publicaciones electrónicas de revistas con esta idea, estamos hablando de una biblioteca inteligente. Esta idea está inspirada por La Biblioteca de Babel de Borges, a su vez tiene relación con EL LIBRO de Erdős. Esta biblioteca debe ser de libre acceso, y debe ser actualizada constantemente. Pero donde quedan los tan apreciados libros de papel ?, el que escribe particularmente prefiere estos últimos, nuestra modesta opinión es que deben seguir siendo publicados, lo mismo con las revistas, etc. La función de las editoriales debe seguir vigente, ya que la Gran Biblioteca repetimos sería de consulta. Hay una gran disyuntiva entre comprar o leer online, debe haber un equilibrio.

8. Temas geométricos olvidados

Es notable que no se propongan problemas de estereometría en la IMO desde hace varios años. El último problema propuesto fue 10(ICE) Lista corta 1990. Ver [24]. No obstante existe bibliografía dedicada a este tema [25][26][27]. Otro tema geométrico que ha quedado un poco en el pasado son las construcciones geométricas con regla y compás y los lugares geométricos. Estos resultan temas muy desafiantes. El libro [28] posee muy buenos problemas. Ahora veamos un bello problema propuesto por Oleg Mushkarov a Mathematical Reflections sobre un lugar geométrico:

O137. Encontrar el lugar geométrico de los centros de los triángulos equiláteros inscritos en un cuadrado dado.

9. Especialización

Es notable que haya especialización en resolución de problemas. Consideremos el caso de Walther Janous en el campo de las desigualdades, Ovidiu Furdui con integrales relacionadas con funciones parte entera y funciones parte fraccionaria, K. R. S. Sastry con los triángulos heronianos, Toshio Seimiya en la geometría y por último Nairi Sedrakyan con los hexágonos en particular. Estos famosos problemistas trabajan en otras áreas de las matemáticas como es de suponer pero creemos estas son sus especialidades y trataremos de demostrarlo con varios ejemplos. Se podían haber incluido otros nombres, no lo hemos hecho por brevedad.

Walther Janous:

- Problemas $1366, 1484, 1606, 2093, 2468, 2152, 2159, 2172, 2173, 2179, 2190, 2202, 2214, 2233, 2299$. (Revista CRUX).
- Problema 2 IMO 2008. Ver generalización en [29].
- `http://depmath.ulbsibiu.ro/genmath/gm/vol15nr1/janous/janous.pdf`

Ovidiu Furdui:

- Calcular $\int_0^1 \left\{\frac{1}{x}\right\}^4 dx$ Revista CRUX.
- Problemas $136, 157$ REOIM.
- `http://www.math.armstrong.edu/faculty/chang/spring/solutions_2010/PME1217.pdf`
- `http://www.siam.org/journals/problems/downloadfiles/07-002.pdf`

En el siguiente sitio web pueden ser encontrados muchos problemas en esta línea:
- `http://www.math.utoledo.edu/~ofurdui/Probleme.html`

K. R. S. Sastry:

- Problema 100 REOIM
- Problema 79 H. The Mathematical Gazette.
- Pares de triángulos heronianos con áreas y perímetros iguales: una descripción. REOIM 16.
- "Heron Triangles: A Gergonne-Cevian-and-Median Perspective." Forum Geometricorum 1, 17-24, 2001.
- `http://forumgeom.fau.edu/FG2001volume1/FG200104index.html.`

Toshio Seimiya:

- Problemas $2114, 2255, 2708, 2709, 2936$. Revista CRUX.
- $1990-14$, $1991-2$ IMO Compendium
- Toshio Seimiya, Peter Y. Woo. Solution of Problem 2338, Crux Mathematicorum 4/25 (1999) pp. 243-245.

Nairi M. Sedrakyan:

- Problema 5 IMO 1996.
- The story of the Creation of the 1996 IMO problem, Mathemathics Competitions, vol 9, no 2, 1996.
- Problema 6 IMO 2008
- On Hexagon-parallelogram, Mathematical education, 2001, N3, p18 (in russian)

- Problema O143 Mathematical Reflections.
Los siguientes problemas pertenecen a ICME 11, México 2008.
- Dado el hexágono $ABCDEF$ probar la desigualdad:
$(AB+DE)^2+(AF+CD)^2+(BC+EF)^2 \geq AD^2+BE^2+CF^2$.

- En el hexágono convexo $ABCDEF$ es conocido que $AD = BC + EF$, $BE = AF + CD$, $CF = AB + DE$. Probar que:
$\frac{AB}{DE} = \frac{CD}{AF} = \frac{EF}{BC}$.

10. Kolmogórov y la resolución de problemas

Kolmogórov se preocupó mucho por la educación integral de los jóvenes. Creía necesario que tuvieran literatura científica y se relacionaran con personalidades relevantes. Trabajó mucho en el perfeccionamiento de la enseñanza general de las matemáticas, elaboración de nuevos programas, libros de textos y formación de profesores. Formó parte en la organización de la Academia de Ciencias Pedagógicas de la Unión Soviética. Para Kolmogórov las capacidades creativas se dividían en:

(1) algorítmica

(2) intuitivo - geométrica

(3) lógica

En los años treinta siendo profesor de la Universidad de Moscú participa en el trabajo de círculos estudiantiles y en la organización de la 1era Olimpiada Matemática. Daba gran importancia a las olimpiadas como medio para detectar jóvenes talentos pero se pronuncia en contra de que tuvieran un carácter meramente deportivo. El principal objetivo debe ser el contacto entre jóvenes y la matemática y no el entrenamiento de campeones. Citamos textual de [32] lo siguiente:
" *De los éxitos en las olimpiadas es natural alegrarse e incluso enorgullecerse. Los fracasos en la olimpiada no deben entristecer excesivamente y llevar a desilusionarse de sus capacidades. El hecho de que se le asigne un tiempo muy limitado a la resolución de los problemas, convierte a muchos en incompetentes. Existen muchos problemas matemáticos, que pueden ser resueltos sólo como resultado de un largo tiempo de tranquila meditación.*"
Cuando se refiere al interés por las matemáticas en edades tempranas dice que suele ser temporal aunque "*cuando se cultivan de forma hábil sus capacidades, éstas gradualmente se desarrollan y, como regla, ya no se pierden*". Para desarrollar las capacidades creativas en los estudiantes a temprana edad es necesario sumergirlos en un ambiente de creación matemática y de investigación científica, todo esto aparejado por un gran apasionamiento.

Es preciso seleccionar personas capaces e interesadas en el desarrollo del talento matemático de los jóvenes. Estas ideas animaron el surgimiento de las escuelas de verano y las escuelas internados, anexas a las universidades. En uno de los meses de vacaciones, los ganadores de las olimpiadas se reunían con el fin de trabajar en matemáticas y descansar activamente. Kolmogórov participó personalmente en al menos 11 de estas escuelas de verano entre los años 1963 y 1977. La sesión diurna se dedicaba a las conferencias y a las clases de ejercicios y problemas. Las noches se destinaban a la realización de encuentros literarios o musicales. La práctica deportiva como los ejercicios matutinos era obligatoria; estamos en desacuerdo, creemos debe ser opcional.

Uno de los principios pedagógicos de Kolmogórov relacionado con la enseñanza de la matemática a estudiantes de talento era que un material bastante difícil se debía presentar en forma concreta más que abstracta.

11. Ciencia

11.1 Computación Simbólica

MAPLE:

Veamos dos problemas propuestos en Olimpiadas los cuales pueden ser vistos en un contexto muy general con la ayuda de Maple, bien pudiera usarse Mathematica también. Estudiando esta generalización como se dice "a mano" propuse a la revista escolar OIM el caso $n = 4$, sin saber que este problema fue propuesto a la IMC 2010. Pero veamos los problemas, el lector debe estar ansioso, denotemos por

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(nk+1)(nk+2)\cdots(nk+n)}$$

Calcular $S_3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}$ fue propuesto en la XXVI Olimpiada Brasileira de Matemática Universitaria. Ver solución publicada en la revista Eureka 22. Calcular S_4 con dos soluciones puede ser encontrado en [22]. Nosotros incluiremos la función gamma que permitirá un estudio de sumas del tipo inversos de coeficientes binomiales y un análogo integral fácilmente computable en un programa de matemática simbólica y creemos no aparece reflejada en ninguna de las anteriores soluciones.

Es notable la dificultad de calcular S_n para $n \geq 5$, es todo un desafío el caso $n = 5$. Hace un tiempo traté de encontrar una regla o patrón en las fórmulas explícitas para S_n. Es un problema abierto demostrar la irracionalidad de S_n.

Este es un magnífico ejemplo que vincula problemas de olimpiadas con la investigación, y se relaciona con un problema abierto. Discutí este problema con Dayron Edmundo Acosta (un colega estudiante de ciencia de la computación) , quién me ayudó a verificar los cálculos en Maple, los cuales yo había hecho a mano. Veamos como calcular $S_4 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)}$.

Tenemos que:

$$S_4 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(4n+4)!} = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(4n+1)\Gamma(4)}{\Gamma(4n+5)} = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \beta(4n+1, 4)$$

Recordar que

$$\begin{aligned}
\Gamma(a) &= \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx \quad a>0 \\
\Gamma(n+1) &= n! \\
\beta(a,b) &= \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \quad a>0,\ b>0 \\
\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} &= \beta(a,b)
\end{aligned}$$

Por tanto

$$S_4 = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 x^{4n}(1-x)^3dx = \frac{1}{6}\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n}(1-x)^3dx = \frac{1}{6}\int_0^1(1-x)^3\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n}dx$$

Pero

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n} = \frac{1}{1-x^4}$$

ya que es una serie geométrica, notar que converge debido a que $0<x<1$. Entonces

$$S_4 = \frac{1}{6}\int_0^1\frac{(1-x)^3}{1-x^4}dx = \frac{1}{6}\int_0^1\frac{(1-x)^2}{(1+x)(1+x^2)}dx$$

Notar que

$$\frac{(1-x)^2}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{2}{1+x} - \frac{1}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2}$$

De donde

$$\begin{aligned}
\int_0^1\frac{(1-x)^2}{(1+x)(1+x^2)}dx &= 2\int_0^1\frac{1}{1+x}dx - \int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx - \frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}dx \\
&= 2\ln(1+x)\mid_0^1 - \arctan(x)\mid_0^1 - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\mid_0^1 \\
&= 2\ln 2 - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Finalmente

$$S_4 = \frac{\ln 2}{4} - \frac{\pi}{24}.$$

De forma análoga puede expresarse

$$S_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1\frac{(1-x)^{n-1}}{1-x^n}dx$$

La fórmula explícita para S_5 es impresionante, convidamos al lector a encontrarla con Maple, sin embargo $S_6 = \frac{1}{4320}(192\ln 2 - 81\ln 3 - 7\sqrt{3}\pi)$, no es tan complicada !

Veamos otro problema el cual puede ser resuelto con la ayuda de Maple:

El triángulo ABC es isósceles, con $AB = AC$. Las rectas BD (con D en el lado AC) y CH (con H en el segmento BD) lo dividen en tres triángulos, cuyos incírculos tienen el mismo radio r. Encontrar la relación entre r y la longitud de CH.

Este problema fue propuesto por Hidetoshi Fukawaga y Francisco Bellot Rosado a la REOIM como problema 165. Puede verse la solución de Luis Gómez Sánchez, Venezuela. Intentar resolver este problema a mano es prácticamente imposible.

11.2 Generalización

Veamos varias generalizaciones a problemas IMO:

[36] Nairi M. Sedrakyan. Problema 2 IMO 2000.
[34] Alex Fink. Problema 4 IMO 2001.
[37] Oleg Mushkarov, Nikolai Nikolov. Problema 3 IMO 2003.
[29] Marian Dinca. Problema 2 IMO 2008.
[35] Jean - Louis AYME. Problema 2 IMO 2009.

El problema S2 de Mathematical Reflections propuesto por Ivan Borsenco permite introducir la fórmula de Descartes sobre el radio del círculo inscrito y circunscrito a tres círculos dados, e incluso (tratando de generalizar a esferas) estudiar las fórmulas de Soddy ya que el estudiante buscará la forma de encontrar fórmulas explícitas para R y r. Esto resulta bien difícil , y ahí es donde entra a jugar la inversión. No obstante un estudiante especializado en geometría puede usar directamente las fórmulas ya establecidas y darle al problema un carácter puramente algebraico al demostrar la desigualdad.

12. Deporte

Es vital para alcanzar buena puntuación en una olimpiada dominar varias técnicas. Tener en cuenta que se dispone de poco tiempo, una estrategia que funciona muy bien es haber visto muchos problemas similares durante el entrenamiento, los cuales van variando en dificultad, esto hace que el estudiante se apropie de esta herramienta. Este enfoque se pone de manifiesto en numerosos libros del experimentado Dr. Titu Andreescu, ver por ejemplo Mathematical Olympiad Challenges. Pero no obstante esta técnica puede poner en riesgo la creatividad, ya que puede haber una solución más elegante y el estudiante pasarla por alto. He ahí la genialidad de los olimpistas que combinan ambas cosas. Es notable hoy en día las numerosas técnicas de resolución de problemas que existen, las cuales han sido sistematizadas, de ahí que sea un reto la creación de nuevos problemas . El campo de las desigualdades es uno de los más desarrollados, pero curiosamente existen desigualdades poco conocidas en este campo que pueden originar nuevos problemas, los cuales son notablemente difíciles de atacar por otras vías, el siguiente problema fue propuesto por el que escribe a la revista Mathematical Reflections y tal vez aparezca en el próximo número:

Sea $0 < x < y < z$. Demostrar que

$$(x+y+z)(xy+yz+zx) < \left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}\right)^2 y(x+z)^2$$

solo adelantamos que la solución es una combinación de la Desigualdad de Kantoróvich (poco conocida en el ámbito olímpico) y la Desigualdad de Nesbitt. Retamos al lector a encontrar una solución por otra vía. Ver `http://mathworld.wolfram.com/KantorovichInequality.html`.. Este problema puede ser usado para motivar a los estudiantes a que investiguen bajo que condiciones se cumple la igualdad en la desigualdad de Kantoróvich (investigación).

Una técnica muy útil en la resolución de problemas es reconocer problemas similares. Esto permite ver un problema determinado dentro de todo un conjunto. Veamos un caso concreto: Los cuadriláteros bicéntricos. A continuación analizaremos una serie de problemas en los cuales es necesario demostrar propiedades de estos interesantes cuadriláteros.

Problema 1.
Un cuadrilátero bicéntrico es aquel que es inscribible y circunscribible. Demostrar que para tal cuadrilátero los centros de las dos circunferencias asociadas son colineales con el punto de intersección de las diagonales.

Este es conocido como el Teorema de Newton, fue propuesto por la India como problema 14, lista corta 1989, IMO. En `http://www.maa.org/editorial/knot/BicentricQuadri.html` aparece una explicación detallada de este problema con múltiples referencias bibliográficas y applets que ayudan a comprender mucho mejor el problema, es un excelente método para aprender geometría

Problema 2. J46. Ivan Borsenco. Mathematical Reflections.
Construir con regla y compás un cuadrilátero bicéntrico con todos sus lados distintos.

Problema 3. S94. Ivan Borsenco. Mathematical Reflections.
Probar que el producto de sus diagonales es una constante.

Es necesario acotar que por constante se entiende una relación que involucre solamente R y r, no necesariamente un número, este enunciado puede traer confusión.

Problema 4. S150. Ivan Borsenco. Mathematical Reflections.
Sea $A_1A_2A_3A_4$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia $C(O,R)$ y circunscrito a una circunferencia $w(I,r)$. Denotamos por R_i el radio de la circunferencia tangente a A_iA_{i+1} y tangente a las extensiones de los lados $A_{i-1}A_i$ y $A_{i+1}A_{i+2}$. Probar que la suma $R_1+R_2+R_3+R_4$ no depende de la posición de los puntos A_1, A_2, A_3, A_4.

De S94 obtenemos que el producto de las diagonales $d_1d_2 = 2r^2 + 2r\sqrt{r^2+4R^2}$ y por tanto sustituyendo en la expresión $R_1+R_2+R_3+R_4 = \frac{16R^2r}{d_1d_2}$ se demuestra que esta suma no depende de la posición de A_1, A_2, A_3, A_4.

Los resultados básicos sobre cuadriláteros bicéntricos pueden ser encontrados en la siguiente web: `http://mathworld.wolfram.com/BicentricQuadrilateral.html`. El estudio de artículos también es importante:

Martin Josefsson. Characterizations of bicentric quadrilaterals. Forum Geometricorum.

Por último queremos esbozar un posible método de entrenamiento el cual no hemos puesto en práctica y creemos puede tener tanto ventajas como desventajas. Queremos dejarlo a consideración del lector. A este método lo llamaremos de (No Aceptación). La idea clave es no dar completo reconocimiento al estudiante por sus logros, consiguiendo así un trabajo más intenso por parte de este en pos de alcanzar el éxito. Funciona principalmente en estudiantes con baja autoestima y un gran deseo de reconocimiento. Normalmente se van guiando a través de la resolución de problemas, una liga de problemas relativamente fáciles (motivación - elevar autoestima) hasta enfrentar problemas muy difíciles o incluso un método innovador (experimental): proponer un enunciado el cual no es cierto en su totalidad pero que estimula al estudiante a la investigación y posible correción del problema inicial. Son muy importantes los contraejemplos.

13. Arte

Trataremos de demostrar que en la resolución de problemas también hay arte. Veamos el siguiente problema el cual es una joya y en términos ajedrecísticos puede ser considerado una miniatura:

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Resolver (! numéricamente !) la ecuación

$$(ax - b)^2 + (bx - a)^2 = x,$$

sabiendo que admite una raíz entera.

(M. Becheanu, *Gazeta Matematica*, *Rumania*)

Según Francisco Bellot este es " el más bello problema sobre la ecuación de segundo grado jamás propuesto". La solución se puede encontrar en [38].

Veamos ahora un problema con un enunciado muy simple pero que es difícil de resolver, muy desafiante para la edad de los estudiantes a los que es propuesto. Otra miniatura.

Hay cuatro botes en una de las orillas del río; sus nombres son Ocho, Cuatro, Dos y Uno, porque esa es la cantidad de horas que tarda cada uno de ellos en cruzar el río. Se puede atar un bote a otro, pero no ms de uno, y entonces el tiempo que tardan en cruzar es igual al del más lento de los dos botes. Un solo marinero debe llevar todos los botes a la otra orilla. Cuál es la menor cantidad de tiempo que necesita para completar el traslado?

(IV Olimpiada de Mayo, primer nivel, 1998).

Retamos al lector a resolver este problema en apariencia tan sencillo !

La creación de problemas es todo un arte, debe lograrse un enunciado simple, motivador y desafiante a la vez. Considerar el siguiente:

Teorema de Sylvester-Gallai:
Dados $n \geq 3$ puntos en el plano no todos alineados existe una recta que solo contiene dos de estos.

Erdős conjetura este resultado en el 1933, pero no puede probarlo. Posteriormente Tibor Grunwald (Gallai) lo demuestra. Se cree que este problema fue primeramente propuesto por Sylvester en la revista Educational Times en 1893.

Teorema de Steiner - Lehmus:
Un triángulo con dos bisectrices iguales es isósceles.

Recomendamos la página web [39] donde aparece una demostración sintética , entre otras tantas, y [40] para referencias a trabajos vinculados con este bello teorema. Si este problema es propuesto a un grupo de estudiantes casi seguro buscarán la solución métrica (aproximación deportiva), pero sin embargo puede ser muy desafiante sugerir la búsqueda de una solución puramente sintética, y aun más, una solución directa sin el uso de reducción al absurdo (puro arte). Este pequeño experimento lo llevé a cabo con tres colegas: Mario Garcia, Jorge Erick, Yaser Quevedo (todos olimpistas), solo uno encontró la solución sintética !

Por último veremos un problema que puede ser encontrado con solución en [41] como problema 5 página 115.

Construir el menor y el mayor triángulo equilátero en un cuadrado dado.

Pero hay arte también en encontrar una solución elegante e ingeniosa. Muchas veces estas soluciones son premiadas en los concursos de matemática. Tenemos el caso del búlgaro Emmanouil Atanassou (que recibió un Premio Especial del Jurado por su solución durante el concurso), Problema 6 IMO 1988, Canberra, Australia. Ver solución en el artículo [42].

14. Palabras finales

Esperamos que el lector quede convencido de que la resolución de problemas está vinculada con la investigación. Por otro lado existen problemas los cuales es difícil catalogar como arte, ciencia o deporte exclusivamente. Veamos el Teorema de Victor Thebault, el cual puede considerarse como ciencia y como arte dadas las demostraciones existentes. Consideramos este como uno de los problemas geométricos más difíciles propuesto.

Teorema de Victor Thebault:

Dado un triángulo ABC, sea M un punto sobre BC. I el incentro. Sea P el centro de la circunferencia la cual toca MA, MC, y el circuncírculo y sea Q el centro de la circunferencia la cual toca MA, MB, y el circuncírculo. Probar que P, I, Q están alineados.

Ver [43] para una historia detallada del problema y para una solución que vincula la geometría analítica con la computación (ciencia). Sorprendentemente en [44] se puede encontrar una solución puramente sintética y toda una nueva descripción detallada del problema (arte). Existen varios trabajos vinculados a este problema inicialmente propuesto a la Monthly en 1938. Estudiarlos todos no es el propósito de esta sección, dejamos este reto al lector. También quedamos en deuda con el lector sobre los trabajos de Polya y Schoenfeld, un estudio minucioso debe ser hecho. Muchas de las soluciones (e incluso) a veces los propios enunciados de los problemas aquí mencionados han sido referidos y no planteados explícitamente, esto ha sido en aras de la brevedad, esperamos que un lector interesado y con mucha curiosidad y amor por la resolución de problemas pueda consultar la extensa bibliografía expuesta. El autor está abierto a críticas y sugerencias, cualquier comentario será bienvenido. Aquí termina nuestro artículo, pero seguimos con deseos de investigar y escribir sobre este fascinante mundo dentro de las matemáticas.

Bibliografía:

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Problem_solving
[2] Zonghu Qiu , Pak - Hong Cheung. Mathematics Competitions in China: success and deficiency. Mathematics Competitions. vol 10, no 1, 1997.
[3] E. Berlekamp, J.Conway, R.Guy. Winning Ways for Your Mathematical Plays, Vol. 1,2,3,4. 2001.
[4] E. Ya. Guik. Juegos matemáticos recreativos. Mir Moscú. 1989.
[5] El Cubo Mágico de Rubik. (fotocopia).
[6] Andy Liu. The Smart Club. Mathematics Competitions, vol. 10, no 1, 1997.
[7] Ravi Vakil. The Youngest Tenured Professor in Harvard History. Math Horizons, Sept. 1998, pp. 8-12.
[8] A. Karpov, E. Guik. Mosaico Ajedrecístico. Ráduga Moscú. 1984.
[9] http://en.wikipedia.org/wiki/Tetris
[10] http://en.wikipedia.org/wiki/Fifteen_puzzle
[11] http://mathworld.wolfram.com/15Puzzle.html.
[12] A. F. Archer. A modern treatment of the 15 puzzle. Amer. Math. Monthly, 9, November 1999.
[13] http://www.komal.hu/info/miazakomal.e.shtml
[14] http://www.math.ca/crux/
[15] Paulo Cezar Pinto Carvalho. O logotipo da olimpiada brasileira de matematica.
[16] http://awesomemath.org/mathematical-reflections/
[17] http://www.oei.es/oim/revistaoim/
[18] http://www.obm.org.br/opencms/revista_eureka/
[19] Serge Tabachnikov. Kvant Selecta. AMS. 1999.
[20] http://www.nsta.org/quantum/
[21] http://www.maa.org/mathhorizons/
[22] http://www.imc-math.org.uk/imc2010/imc2010-day1-solutions.pdf
[23] J. Slocum, D. Singmaster, Wei-Hwa Huang, D. Gebhardt, G. Hellings, E. Rubik. The Cube: The Ultimate Guide to the World's Bestselling Puzzle - Secrets, Stories, Solutions. 2009.
[24] D. Djukić, V. Janković, I. Matic, N. Petrović. IMO Compendium. Springer. 2010.
[25] V. Gúsiev, V. Litvinenko, A. Mordkóvich. Prácticas para resolver problemas matemáticos. Mir Moscú. 1989.
[26] I.F.Sharygin. Problems in Solid Geometry. Mir Publishers. 1986.
[27] T. Andreescu, R. Gelca. Mathematical Olympiad Challenges. Birkhäuser. 2000.
[28] V. Lidski. Problemas de matemáticas elementales. Mir Moscú. 1972.
[29] M. Dinca. Generalización de la desigualdad propuesta en la IMO 2008 (Madrid, España). REOIM 39.
[30] T. Tao. Solving mathematical problems. A personal perspective. 2005.

[31] T. Andreescu, J. A. Gallian, J. M. Kane, J. E. Mertz. Cross-Cultural Analysis of Students with Exceptional Talent in Mathematical Problem Solving. Notices of the AMS. Vol 55, number 10, November 2008.

[32] Carlos Sánchez Fernández, Concepción Valdés Castro. Kolmogórov. El zar del azar. Nivola. 2003.

[33] Group theory via Rubik's cube. Tom Davis. 2006.

[34] Alex Fink. A generalization of an IMO problem. Integers. 6, 2006.

[35] `http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/Docs/A20generalization20of20IMO202009.pdf`

[36] Nairi M. Sedrakyan. Remark on the problem 2 of the XLII IMO and its generalization, Mathemathics Competitions, vol 14, no 2, 2001.

[37] Oleg Mushkarov, Nikolai Nikolov. Semiregular polygons. Amer. Math. Monthly, Vol 113, No 4, April 2006.

[38] 10 matemáticos, 100 problemas. (Colectivo de autores). 2008.

[39] `http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~sillke/PUZZLES/steiner-lehmus`

[40] `http://mathworld.wolfram.com/Steiner-LehmusTheorem.html`

[41] J. S. Madachy. Mathematics on vacation. 1966.

[42] Francisco Bellot Rosado. Famosos problemas de la IMO. REOIM 41.

[43] R. Shail. A Proof of Thebault's Theorem. Amer. Math. Monthly, April 2001.

[44] Jean-Louis Ayme. Sawayama and Thebault's theorem. Forum Geometricorum, vol 3, 2003.

Correo electrónico:
`bobbydrg@gmail.com`

PROBLEMAS PARA LOS MÁS JÓVENES 42

CINCO PROBLEMAS DEL CONCURSO NACIONAL RUMANO "SPERANTZE RÂMNICENE", 2011

JUNIOR (12-13 AÑOS)

Agradecemos al Prof. Neculai Stanciu, de Buzau (Rumania), el habernos proporcionado estos enunciados.

PJ42-1

Si $a = 7 + 6 \cdot 7 + 6 \cdot 7^2 + \cdots + 6 \cdot 7^{2011}$, encontrar x tal que $x^2 = a$.

PJ42-2

Probar que si $a^2 + 9b^2 - 4a - 24b + 16 = 0$, entonces $2 \leq 3(a+b) \leq 18$.

PJ42-3

Con la notación $\overline{abc}$ representamos el número cuya cifra de unidades es c, decenas b y centenas a. Determinar todos los números $\overline{abc}$ tales que se verifique la igualdad $\sqrt{\overline{abc}} = \overline{ab} - \sqrt{c}$.

PJ42-4

El triángulo ABC es equilátero (AB = BC = CA), y P es un punto interior. Desde P se trazan las perpendiculares a los lados AB,BC y CA, a los que cortan en M, N y R, respectivamente (es decir, PM es perpendicular a AB, etc). Si se sabe que PM = 2009; PN = 2010; y PR = 2011, calcular el lado del triángulo equilátero.

PJ42-5

ABC es un triángulo rectángulo en A. D es un punto del lado BC; los puntos M y N equidistan, respectivamente, de A y D y de C y D; y los ángulos $\measuredangle ABM$ y $\measuredangle CAN$ son iguales. Demostrar que AD es perpendicular a BC.

PROBLEMAS DE OLIMPIADAS Y DE NIVEL MEDIO 42

Cinco problemas de la Competición Matemática Húngaro-Transilvana 2011

Agradecemos al Prof. Mihaly Bencze, de Brasov, por habernos facilitado los enunciados.

PO42-1

A es una matriz 2x2 cuyos elementos son números complejos. Supongamos que $\det(A)=\alpha$. Si I_2 es la matriz identidad 2x2, demostrar que

$$\det(A^2+A-\alpha I_2)+\det\left(A^2+\alpha I_2\right)=\alpha\left(1+4\alpha\right)$$

PO42-2

El triángulo ABC no es equilátero. Sean: A_1 el punto simétrico de A respecto de B; B_1 el simétrico de B respecto de C; C_1 el simétrico de C respecto de A. Sean O y H el circuncentro y ortocentro de ABC; y O_1 y H_1 el circuncentro y el ortocentro de $A_1B_1C_1$. Demostrar que OO_1HH_1 es un trapecio.

PO42-3

Sea ABCD un cuadrado, y $M\in\left(AD\right)$; y $N\in\left(BC\right)$ puntos tales que AM = BN.

Sea $P\in\left(MN\right)$ tal que $\frac{MP}{PN}=\left(\frac{AM}{MD}\right)^2$. Demostrar que AP es perpendicular a PB y hallar el lugar geométrico del punto P cuando M describe el segmento AD (excluidos los extremos).

PO42-4

Sea ABC un triángulo y M,N y P los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los lados BC, CA y AB, respectivamente. Si D es el punto medio del lado BC, y E es el punto de intersección de AD con NP, demostrar que ME es perpendicular a BC.

PO42-5

Hallar el menor entero positivo *m* que verifica la siguiente propiedad: entre cada *m* enteros positivos consecutivos existe uno de ellos tal que si se suman todos sus divisores propios, la suma no es menor que 4/3 de dicho número.

PROBLEMAS PROPUESTOS 206-210

Problema 206, propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España

Sea ABC un triángulo de lados a,b,c; circunradio R y sean r_a,r_b,r_c los radios de los círculos exinscritos en los ángulos A, B y C, respectivamente. Demostrar que

$$\sum\sqrt{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\frac{1}{c^2}}\geq\sqrt{\frac{1}{R}}\left(\sqrt{\frac{1}{r_a}}+\sqrt{\frac{1}{r_b}}+\sqrt{\frac{1}{r_c}}\right),$$

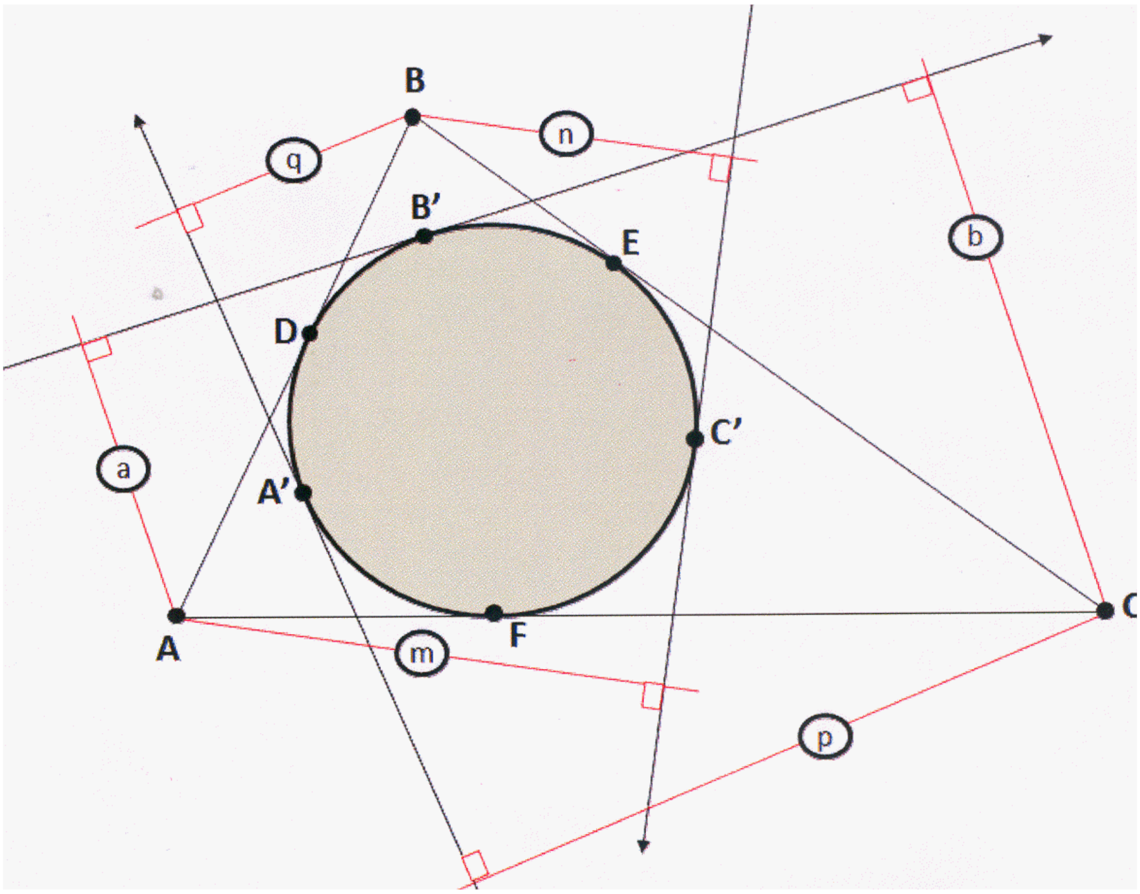
donde la suma es cíclica en a,b,c.

Problema 207, propuesto por Carlos Hugo Olivera Díaz, Lima, Perú

Se tiene un triángulo ABC y su circunferencia inscrita, tangente a los lados en los puntos D, E y F, como se indica en la figura. Por los puntos A',B',C' de la circunferencia inscrita se trazan las rectas tangentes a los arcos FD,DE y EF, respectivamente. Desde los vértices de ABC se trazan rectas perpendiculares a dichas tangentes (véase igualmente la figura adjunta).

Determinar los puntos de tangencia A',B' y C' para que se cumpla la siguiente condición:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{p}{q}\cdot\frac{n}{m}=1$$



Problema 208, propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Ávila, España

Demostrar que $\pi\sqrt{2} < \int_0^{\pi} \sqrt{3+\cos 4x}\,dx < \frac{3\pi}{2}\sqrt{2}$

Problema 209, propuesto por D.M. Batinetzu-Giurgiu, Bucarest, y Neculai Stanciu, Buzau, ambos de Rumania.

Determinar todos los números positivos x que verifican la ecuación

$$2^x + 2^{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} = 6 .$$

Problema 210, propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania

Se lanzan 3 veces un dado y se denota con z_i, con $i \in \{1,2,3\}$, la variable aleatoria que da el número de puntos obtenidos en la situación *i*. Si la probabilidad $P(z_1 + z_2 = z_3) = p \in [0,1]$, se considera la variable aleatoria

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ p & 1-p \end{pmatrix}.$$

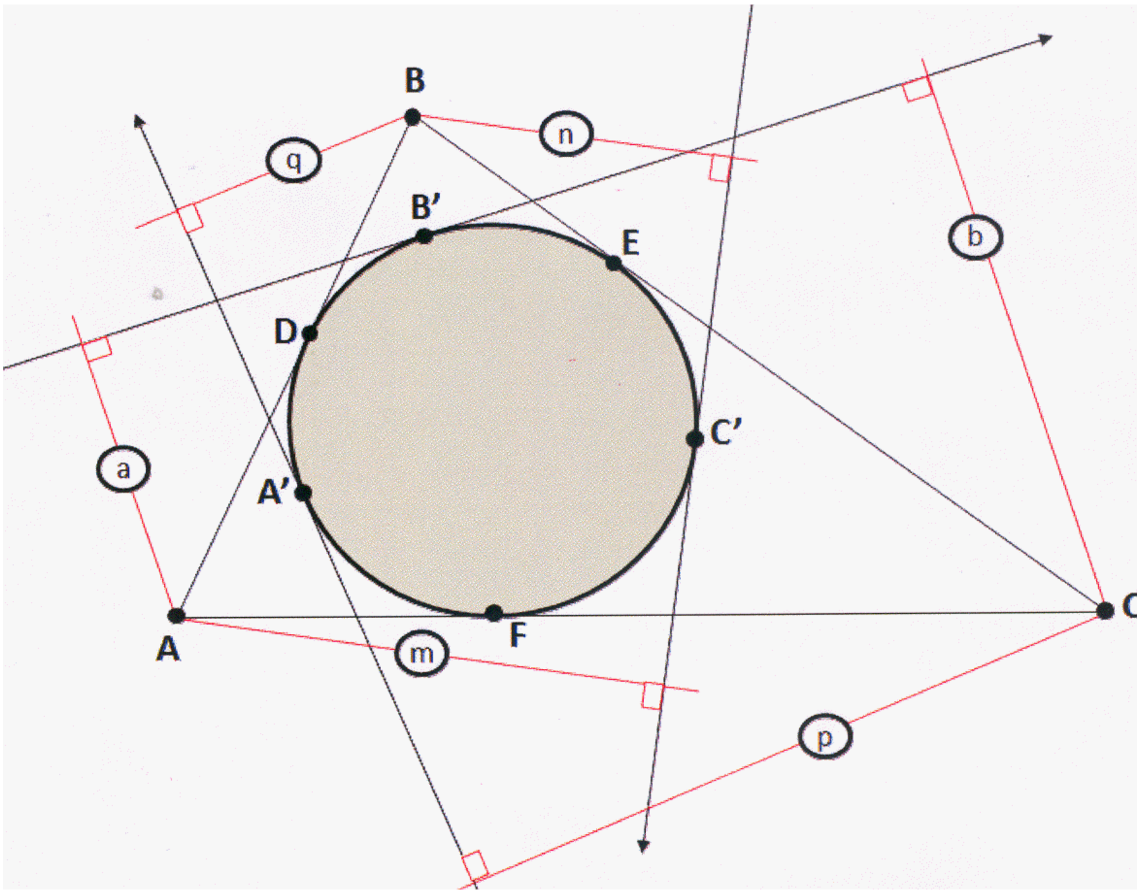
Por otra parte, se considera también la variable aleatoria

$$Y:\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ \alpha & \alpha^2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

donde $\alpha \in (0,1)$.

Se pide:

A) Comparar M(X) y M(Y)
B) Estudiar si X e Y son independientes y si están correlacionadas sabiendo que $P(X=1,Y=0)=\dfrac{35}{72}$ y $P(X=-1,Y=2)=\dfrac{1}{72}$.



Problema 208, propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Ávila, España

Demostrar que $\pi < \int_0^{\pi} \sqrt{3+\cos 4x}\,dx < \frac{3\pi}{2}$

Problema 209, propuesto por D.M. Batinetzu-Giurgiu, Bucarest, y Neculai Stanciu, Buzau, ambos de Rumania.

Determinar todos los números positivos x que verifican la ecuación

$$2^x + 2^{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} = 6 .$$

Problema 210, propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania

Se lanzan 3 veces un dado y se denota con z_i, con $i \in \{1,2,3\}$, la variable aleatoria que da el número de puntos obtenidos en la situación *i*. Si la probabilidad $P(z_1 + z_2 = z_3) = p \in [0,1]$, se considera la variable aleatoria

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ p & 1-p \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, se considera también la variable aleatoria

$$Y : \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ \alpha & \alpha^2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

donde $\alpha \in (0,1)$.

Se pide:

A) Comparar M(X) y M(Y)

B) Estudiar si X e Y son independientes y si están correlacionadas sabiendo que $P(X=1, Y=0) = \frac{35}{72}$ y $P(X=-1, Y=2) = \frac{1}{72}$.

Problema 21. Solución de Roberto Bosch Cabrera, Florida, USA.

En general se cumple que

$$\begin{aligned}(xy+yz+zx)^2 &= x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)\\ (x+y+z)^2 &= x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)\end{aligned}$$

Multiplicando por 2 la segunda ecuación del sistema original obtenemos

$$2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) = 2xyz(x+y+z)^3 = [(xy+yz+zx)^2-x^2y^2-y^2z^2-z^2x^2][x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)]$$

Denotemos

$$\begin{aligned}x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 &= a\\ xy+yz+zx &= b\end{aligned}$$

Entonces se cumple que

$$2a = (b^2-a)(\frac{1}{3}+2b)$$

Despejando a queda

$$a = \frac{6b^3+b^2}{6b+7}$$

Pero notar que

$$(xy+yz+zx)^2 = x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z) \leq 3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$$

de donde se deduce que $b^2 \leq 3a$, es decir $a \geq \frac{b^2}{3}$. Sustituyendo

$$\frac{6b^3+b^2}{6b+7} \geq \frac{b^2}{3}$$

pero $\frac{1}{3}+2b = (x+y+z)^2 \geq 0 \Rightarrow 6b+1 \geq 0 \Rightarrow 6b+7 > 0$, de donde obtenemos $18b^3 + 3b^2 \geq 6b^3+7b^2 \Rightarrow 4b^2(3b-1) \geq 0$ entonces si $b \neq 0$ se tiene que $b \geq \frac{1}{3}$. Lo cual implica que $xy+yz+zx \geq x^2+y^2+z^2$ pero es bien conocido que $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$, de donde $x^2+y^2+z^2 = xy+yz+zx$ y por tanto $x=y=z$. Sustituyendo en la primera ecuación del sistema obtenemos las soluciones $(x,y,z) = (\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ y $(x,y,z) = (-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$. Notar que $b=0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow xy=0, yz=0, zx=0$, de donde al menos dos variables son 0 y sustituyendo quedan las soluciones $(x,y,z) = (0,0,\pm\frac{\sqrt{3}}{3}), (x,y,z) = (0,\pm\frac{\sqrt{3}}{3},0), (x,y,z) = (\pm\frac{\sqrt{3}}{3},0,0)$.

Problema 38. Solución de Roberto Bosch Cabrera, Florida, USA.

Tenemos 40 cartas normales y 12 comodines. La probabilidad buscada es igual a casos favorables sobre casos posibles. Veamos los casos favorables:

1. Exactamente 1 comodín: $(12 \cdot 40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36) \cdot 6 = 5685189120$
2. Exactamente 2 comodines: $(12 \cdot 11 \cdot 40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37) \cdot \binom{6}{2} = 4342852800$
3. Exactamente 3 comodines: $(12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 40 \cdot 39 \cdot 38) \cdot \binom{6}{3} = 1564992000$
4. Exactamente 4 comodines: $(12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 40 \cdot 39) \cdot \binom{6}{4} = 277992000$
5. Exactamente 5 comodines: $(12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 40) \cdot \binom{6}{5} = 22809600$
6. Exactamente 6 comodines: $(12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7) = 665280$

De donde los casos favorables son la suma: 11894500800. Los casos posibles son $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 = 14658134400$ y finalmente la probabilidad buscada es igual a $\frac{11894500800}{14658134400} \approx 0{,}81$.

Problema 144, propuesto por Vicente Vicario García, Huelva, España

Dados los números α y β siguientes, probar o refutar que $\alpha = \beta$.

$$\alpha = \sqrt{13} + \sqrt{10 + 2\sqrt{13}}$$
$$\beta = \sqrt{5 + 2\sqrt{3}} + \sqrt{18 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{65 - 26\sqrt{3}}}.$$

Solución

$\alpha = \sqrt{13} + \sqrt{10+2\sqrt{13}}$; $\beta = \sqrt{5+2\sqrt{3}} + \sqrt{18-2\sqrt{3}+2\sqrt{65-26\sqrt{3}}}$.

El número α es solución de la ecuación $(\alpha - \sqrt{13})^2 = 10+2\sqrt{13}$. (1)

Cambiando α por x y desarrollando el cuadrado, después de reducir términos resulta

$$x^2 + 3 = 2\sqrt{13}\,(1+x)$$

y volviendo a elevar al cuadrado

$$(x^2+3)^2 = 52\cdot(1+x)^2 \quad \text{o bien} \quad x^4 - 46x^2 - 104x - 43 = 0 \ \ (2)$$

Para el número β, observando que

$$13 = (5 - 2\sqrt{3})\cdot(5+2\sqrt{3}),$$

tenemos que

$$18-2\sqrt{3}+2\sqrt{65-26\sqrt{3}} = 13 + (5-2\sqrt{3}) + 2\cdot\sqrt{13\cdot\left(5-2\sqrt{3}\right)} = \left(\sqrt{13}+\sqrt{5-2\sqrt{3}}\right)^2.$$

Por tanto

$$\beta = \sqrt{5+2\sqrt{3}} + \sqrt{13} + \sqrt{5-2\sqrt{3}}$$

y

$$(\beta - \sqrt{13})^2 = 5+2\sqrt{3} + 5 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{13} = 10 + 2\sqrt{13} \ \ (3).$$

Las expresiones (1) y (3) indican que los números α y β son iguales u opuestos. Al ser ambos positivos han de ser iguales. c.q.d.

Vamos a concluir hallando las otras tres soluciones de la ecuación (2) que verifica α (o β).

Si $\alpha = \sqrt{13} + \sqrt{10+2\sqrt{13}}$ es solución, también lo es $\alpha' = \sqrt{13} - \sqrt{10+2\sqrt{13}}$ como es fácil de comprobar. El polinomio de segundo grado que tiene a α y a α' por raíces es $x^2 - 2\sqrt{13}\,x + (3-2\sqrt{13})$. Dividiendo el polinomio de (2) por él se obtiene

$$x^2 + 2\sqrt{13}\,x + (3+2\sqrt{13})$$

que es el polinomio que contiene las otras dos raíces de la ecuación (2).

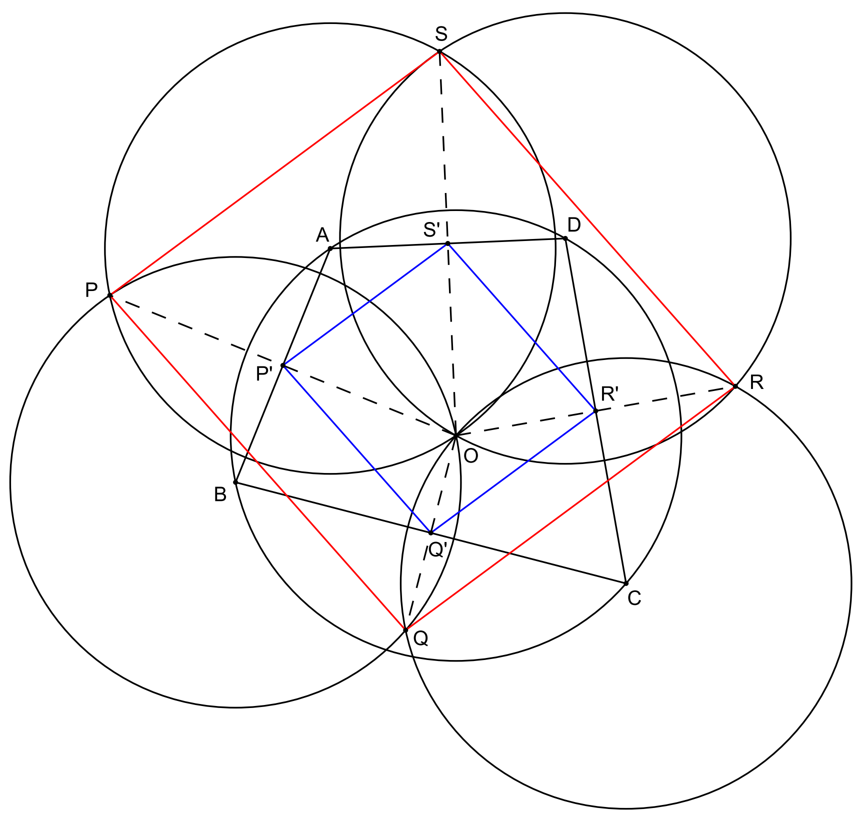
Resolviendo $x^2 + 2\sqrt{13}\,x + (3+2\sqrt{13}) = 0$ resulta $x = -\sqrt{13} \pm \sqrt{10-2\sqrt{13}}$.

Problema 201 (Propuesto por Roberto Bosch Cabrera, C. de la Habana, Cuba)

Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia c_0 de centro O interior al cuadrilátero. Se consideran las circunferencias $c_1(A; AO)$ (de centro A y radio AO), $c_2(B; BO)$, $c_3(C; CO)$ y $c_4(D; DO)$. Sean $c_1 \cap c_2 = \{P, O\}$, $c_2 \cap c_3 = \{Q, O\}$, $c_3 \cap c_4 = \{R, O\}$ y $c_4 \cap c_1 = \{S, O\}$. Demostrar que $PQRS$ es un paralelogramo.

Solución de Gabriel Alexander Chicas Reyes (El Salvador)

Sean P', Q', R', S' los puntos medios de AB, BC, CD y AD, respectivamente. Notemos que O y P son simétricos respecto a AB, ya que c_1 y c_2 tienen el mismo radio $OA = OB$. Luego P' está sobre OP y además es su punto medio, es decir $OP'/OP = 1/2$. De manera análoga vemos que $OP'/OP = OQ'/OQ = OR'/OR = OS'/OS = 1/2$, y de esto se desprende que los cuadriláteros $PQRS$ y $P'Q'R'S'$ son homotéticos desde O, con razón de homotecia $1/2$. Dado que $P'Q'R'S'$ es un paralelogramo (el paralelogramo de Varignon de $ABCD$), concluimos que $PQRS$ también es un paralelogramo. ■



Problema 202. Solución de Roberto Bosch Cabrera, Florida, USA.

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos

$$\sqrt[4]{a^2b^2 senC} + \sqrt[4]{b^2c^2 senA} + \sqrt[4]{c^2a^2 senB} \leq \sqrt{(ab+bc+ca)(\sqrt{senA} + \sqrt{senB} + \sqrt{senC})}$$

Ahora de la conocida desigualdad $ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2$ se deduce que $ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{4}{3}$ y también se cumple que

$$\sqrt{senA} + \sqrt{senB} + \sqrt{senC} \leq 3\sqrt{\frac{senA + senB + senC}{3}}$$

por la desigualdad Media Aritmética - Media Cuadrática y usando la conocida desigualdad

$$\frac{senA + senB + senC}{3} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

que es consecuencia de la desigualdad de Jensen obtenemos

$$\sqrt{senA} + \sqrt{senB} + \sqrt{senC} \leq 3\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$$

y finalmente basta multiplicar y extraer raíz cuadrada para obtener la desigualdad pedida.

PROBLEMA 203, *(propuesto por Vicente Vicario García, Huelva, España)*

Es bien conocido que existen números irracionales α, β tales que α^β es racional. Para la demostración clásica se parte del hecho de que $\sqrt{2}$ es irracional, y se considera el número $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Si este número es racional, ya tenemos identificados los irracionales α, β que cumplen la condición del teorema. Si no es racional, consideramos $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$, que es racional y se concluye la demostración. Se pide dar una demostración constructiva alternativa y construir infinitas parejas de números irracionales α y β tales que α^β es un número racional.

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Sean p, q, r tres primos cualesquiera (no necesariamente distintos). Es de sobra conocido (o fácilmente demostrable) que $\alpha_0 = \sqrt[q]{r}$ y $\beta = \sqrt[p]{q}$ no son racionales. Consideremos ahora $\alpha_i = \alpha_{i-1}^\beta$. Por trivial inducción, $\alpha_k = \alpha_0^{\beta^k}$, luego $\alpha_p = \alpha_0^{\beta^p} = \alpha_0^q = r$ es entero, luego racional. Sea ahora K el menor entero positivo tal que α_K es racional. Claramente K existe y es a lo sumo igual a p, y $\alpha = \alpha_{K-1}$ y β son irracionales tales que α_{K-1}^β es racional; se demuestra fácilmente que de hecho $K = p$.

Nótese que existe al menos una tal pareja de irracionales distintos para cada terna de primos (p, q, r); en caso de que existiera otra terna (p', q', r') que generara los mismos valores de α, β, claramente los valores de β han de ser iguales, y $\sqrt[p]{q} = \sqrt[p']{q'}$, luego $q^{p'} = q'^p$, con lo que al ser ambos potencias enteras de un cierto primo, los primos tienen que ser el mismo, y $q = q'$, llevando a $p = p'$. Además deberían ser iguales los valores de α, que son $\sqrt[q]{r}^{\sqrt[p]{q}^{p-1}}$ y $\sqrt[q]{r'}^{\sqrt[p]{q}^{p-1}}$, con lo que ha de ser $r = r'$, y si los valores de α, β son iguales, entonces también lo son las ternas, y recíprocamente ternas distintas generan valores distintos de α, β.

Solución del PROBLEMA 203 aparecido en la REVISTA ESCOLAR DE LA OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA, volumen 41.

Es bien conocido que existen números irracionales α, β tales que α^β es racional. Para la demostración clásica se parte del hecho de que $\sqrt{2}$ es irracional, y se considera el número $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Si este número es racional, ya tenemos identificados los irracionales α, β que cumplen la condición del teorema. Si no es racional, consideramos $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$, que es racional y se concluye la demostración.

Se pide dar una demostración constructiva alternativa y construir infinitas parejas de números irracionales α y β tales que α^β es un número racional.

SOLUCIÓN

Consideremos α cualquier número trascendente positivo y $\beta = \log_\alpha q$ siendo q cualquier número racional positivo distinto de la unidad. Todas estas parejas (α, β) verifican las condiciones del problema. Como $\alpha^\beta = q$ racional, sólo falta comprobar que β es irracional:

$$\beta = \log_\alpha q = \frac{1}{\log_q \alpha}$$

por lo que la racionalidad de β es equivalente a la de $\log_q \alpha$ pero este último no puede ser racional puesto que de así serlo:

$$\log_q \alpha = \frac{m}{n} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = q^{m/n} \text{ algebraico}$$

lo que contradice, por hipótesis, la naturaleza de α.

Joaquín Rivero Rodríguez
I.E.S. Antonio de Nebrija
Zalamea de la Serena, España

Problema 203 (propuesto por Vicente Vicario García, Huelva, España)

Es bien conocido que existen números irracionales α, β *tales que* α^{β} *es racional. Para la demostración clásica se parte del hecho de que* $\sqrt{2}$ *es irracional, y se considera el número* ${\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$. *Si este número es racional, ya tenemos identificados a los irracionales* α, β *que cumplen la condición del teorema. Si no es racional, consideramos* $\left({\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$, *que es racional y se concluye la demostración.*

Se pide dar una demostración constructiva alternativa y construir infinitas parejas de números irracionales α *y* β *tales que* α^{β} *es un número racional.*

Solución de Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo, España

Comencemos con una demostración constructiva alternativa:

Sean, para $x\in R$, la función f y la sucesión $\{a_n\}_{n\in N}$ definidas por $f(x)=\left(\sqrt{2}\right)^x=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^x=2^{\frac{x}{2}}$ y por $a_1=\sqrt{2}$ y, para todo $n\in N^*$, $a_{n+1}=f(a_n)$. Entonces

$$\left(\left(\left({\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}$$

lo interpretamos como el límite, si existe, de dicha sucesión.

Si $x<2$, entonces $\frac{x}{2}<1$, luego $f(x)=2^{\frac{x}{2}}<2^1$. Por inducción resultará entonces que, para todo $n\in N^*$, $a_{n+1}=f(a_n)<2$, es decir, que la sucesión $\{a_n\}_{n\in N}$ está acotada superiormente por el número 2. Sea ahora, para $x\in R$, la función g definida por $g(x)=f(x)-x$; probaremos que si $x\in(0,2)$ entonces $g(x)>0$: En efecto, g es derivable y

$$g'(x)=f'(x)-1=2^{\frac{x}{2}}(\ln 2)\frac{1}{2}-1 \lesseqgtr 0 \Leftrightarrow 2^{\frac{x}{2}} \lesseqgtr \frac{1}{\frac{1}{2}\ln 2} \Leftrightarrow \frac{x}{2} \lesseqgtr \log_2\left(\frac{2}{\ln 2}\right) \Leftrightarrow x \lesseqgtr x_0, \quad \text{siendo}$$

$x_0=2\log_2\left(\frac{2}{\ln 2}\right)=2\frac{\ln\left(\frac{2}{\ln 2}\right)}{\ln 2}=3{,}05753...$, luego g decrece en $(-\infty,x_0)$ y crece en $(x_0,+\infty)$, alcanzando su mínimo relativo y absoluto en $x=x_0$; y además su gráfica cortará al eje de abscisas exactamente en $x=2$ y en $x=4$ (nótese que $g(2)=0=g(4)$). En particular, g decrece estrictamente en $(-\infty,2)$ y $g(2)=0$, luego para $x\in(-\infty,2]$ se tiene que $g(x)\geq g(2)=0$, con igualdad si y sólo si $x=2$. Entonces para $x\in(-\infty,2)$ resulta que $f(x)-x>0$, con lo cual para $x\in(0,2)$ resulta que $f(x)>x>0$. De aquí y del hecho ya demostrado de que, para todo $n\in N^*$, $a_n\in(0,2)$, se obtendrá por inducción que $a_{n+1}=f(a_n)>a_n$, es decir, que la sucesión $\{a_n\}_{n\in N}$ es estrictamente creciente. De ello y del hecho de estar acotada superiormente, se concluye que es convergente, es decir, que existe $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Tiene sentido entonces tomar límites cuando $n \to \infty$ en la igualdad $a_{n+1} = f(a_n)$, obteniéndose, al ser además f continua, que $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)$, es decir, $a = f(a)$, o equivalentemente, $g(a) = 0$, esto es, $x = a$ es uno de los puntos de corte de la gráfica de g con el eje de abscisas, de donde resulta que $a \in \{2,4\}$. Como $a_n < 2$, no puede ser que $a = 4$, luego $a = 2$. Por lo tanto, queda demostrado de forma alternativa que $\left(\left(\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}} = 2$, que es racional.

Construyamos ahora infinitas parejas de números irracionales α y β tales que α^β es un número racional:

Sea $n \in N$, $n \geq 2$; primeramente, habida cuenta de la nota que aparece en la solución publicada en el número 26 de esta revista para el problema 24.1, se tiene que $\sqrt[n]{n}$ es irracional, puesto que n no es una n- potencia de ningún número entero m, ya que, en caso contrario, $n = m^n$, con lo cual, la desigualdad de Bernoulli aplicada a $n \in N$, $n \geq 2$ y $m-1 \in R$, $m-1 \geq -1$, implica que $m^n = (1+(m-1))^n \geq 1 + n(m-1) \geq 1 + n > n$, que contradice la suposición de que $m^n = n$.

Siguiendo un razonamiento similar al del enunciado, se parte del hecho ya comprobado de que $\sqrt[n]{n}$ es irracional, y se considera el número real $\sqrt[n]{n}^{\sqrt[n]{n}}$. Si este número $\sqrt[n]{n}^{\sqrt[n]{n}}$ es racional, ya tenemos identificados a los irracionales $\alpha = \sqrt[n]{n}$, $\beta = \sqrt[n]{n}$ que cumplen la condición del teorema de que $\alpha^\beta = \sqrt[n]{n}^{\sqrt[n]{n}}$ es racional. Si el número $\sqrt[n]{n}^{\sqrt[n]{n}}$ no es racional, consideramos el número real $\left(\sqrt[n]{n}^{\sqrt[n]{n}}\right)^{\sqrt[n]{n}}$. Si este número $\left(\sqrt[n]{n}^{\sqrt[n]{n}}\right)^{\sqrt[n]{n}}$ es racional, ya tenemos identificados a los irracionales $\alpha = \sqrt[n]{n}^{\sqrt[n]{n}}$ y $\beta = \sqrt[n]{n}$ que cumplen la condición del teorema.

Si el número $\left(\sqrt[n]{n}^{\sqrt[n]{n}}\right)^{\sqrt[n]{n}}$ no es racional, se repiten los razonamientos precedentes y es claro que en algún momento, a lo sumo tras considerar un número de los de la forma $\left(\left(\sqrt[n]{n}^{\sqrt[n]{n}}\right)^{\sqrt[n]{n}}\right)^{\cdot^{\cdot^{\sqrt[n]{n}}}}$ formado por n exponentes en total, se obtendrá la pareja de números irracionales α y β tales que α^β es un número racional, debido a que dicho número $\left(\left(\sqrt[n]{n}^{\sqrt[n]{n}}\right)^{\sqrt[n]{n}}\right)^{\cdot^{\cdot^{\sqrt[n]{n}}}}$ es igual a $\sqrt[n]{n}^{\overbrace{\sqrt[n]{n}\cdots\sqrt[n]{n}}^{n \quad factores}} = \sqrt[n]{n}^{\sqrt[n]{n}^n} = \sqrt[n]{n}^n = n$, que es racional.

Solución: Problema 203. (Jorge Tipe Villanueva)

Sea n un entero positivo, existe un real positivo x_n tal que $2^{x_n} = 3^n$. Vamos a demostrar que x_n es irracional para todo n.
En efecto, si x_n fuera racional, sería de la forma $x_n = \frac{a}{b}$ donde a y b son enteros positivos. Reemplazando obtenemos $2^a = 3^{bn}$, lo cual no es posible porque un lado es par y el otro no.
Ahora, una vez que sabemos que x_n es irracional, usamos el reemplazo $2^{x_n} = \sqrt{2}^{2x_n}$ para darnos cuenta que tanto la base como el exponente son irracionales mientras que la potencia es igual a 3^n que es racional.

PROBLEMA 204, *(propuesto por Pedro H.O. Pantoja, Univ. de Lisboa, Portugal)*

Demostrar que las ecuaciones $3^x - 1 = y^4$, $3^x + 1 = y^4$ no tienen soluciones enteras positivas.

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

El resultado se deduce trivialmente del teorema de Mihailescu (conjetura de Catalan), que dice que las únicas potencias perfectas no nulas cuya diferencia es 1 son 2^3 y 3^2. Daremos no obstante una solución a este problema por medios elementales.

Supongamos que $3^x + 1 = y^4$ para enteros positivos x, y. Se tiene entonces que $3^x = y^4 - 1 = (y^2 - 1)(y^2 + 1)$, es decir, tanto $y^2 + 1$ como $y^2 - 1$, que son enteros no negativos y cuya diferencia es 2, son divisores de 3^x. Uno de ellos es primo con 3 porque no pueden ambos ser divisibles por 3, luego uno de ellos (claramente el menor $y^2 - 1$) ha de ser igual a 1, luego $y^2 = 2$, absurdo pues y no sería entero.

Supongamos que $3^x - 1 = y^4$. Claramente y no puede ser divisible entre 3, pero cualquier cuadrado perfecto que no sea múltiplo de 3, es decir, de la forma $(3n \pm 1)^2 = 3n(3n \pm 2) + 1$, da resto 1 al dividir entre 3, luego $3^x = y^4 + 1 = (3m + 1)^2 + 1 = 3m(3m + 2) + 2$ da resto 2 al dividir entre 3, absurdo.

Problema 204 (propuesto por Pedro H. O. Pantoja, Univ. de Lisboa, Portugal)

Demostrar que las ecuaciones $3^x - 1 = y^4$, $3^x + 1 = y^4$ *no tienen soluciones enteras positivas.*

Solución de Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo, España

Demostremos primero que la ecuación $3^x - 1 = y^4$ no tiene soluciones enteras positivas: Por reducción al absurdo, supongamos que existen x, $y \in Z_+^*$ tales que $3^x - 1 = y^4$; entonces $3^x - 1 = y'^2$, siendo $y' = y^2$. Según el algoritmo de la división entera de numeros enteros positivos, al dividir cualquier número entero positivo z entre 3, se obtendrán un cociente c y un resto r tales que $z = 3c + r$ y $0 \le r < 3$, luego $z^2 = (3c+r)^2 = 9c^2 + 6cr + r^2 = \begin{cases} 3c(3c+2r) & si \quad r = 0 \\ 3c(3c+2r)+1 & si \quad r = 1 \\ 3c(3c+2r+1)+1 & si \quad r = 2 \end{cases}$, luego, por la unicidad de dichos cociente y resto, cualquier cuadrado perfecto, como z^2, se obtiene, al ser dividido entre 3, de resto 0 (si dicho cuadrado es de la forma $3c(3c+2r)$, es decir, un múltiplo de 3) ó bien 1 (en caso contrario); en particular, el resto de la división de y'^2 entre 3 es 0 ó 1, es decir, $y'^2 \equiv 0\,(\text{mód } 3)$ ó $y'^2 \equiv 1\,(\text{mód } 3)$, que equivale, al ser $3^x - 1 = y'^2$, a que $3^x - 1 \equiv 0\,(\text{mód } 3)$ ó $3^x - 1 \equiv 1\,(\text{mód } 3)$, o lo que es lo mismo, a que $3^x \equiv 1\,(\text{mód } 3)$ ó $3^x \equiv 2\,(\text{mód } 3)$, lo cual es una contradicción porque $3^x \equiv 0\,(\text{mód } 3)$.

Demostremos ahora que la ecuación $3^x + 1 = y^4$ no tiene soluciones enteras positivas: Por reducción al absurdo, supongamos que existen x, $y \in Z_+^*$ tales que $3^x + 1 = y^4$; entonces $3^x = y^4 - 1 = (y^2+1)(y^2-1)$, luego $y^2 + 1$ e $y^2 - 1$ son divisores de 3^x que, multiplicados, dan como resultado 3^x, es decir, existen r, $s \in Z_+$ tales que $y^2 + 1 = 3^r$, $y^2 - 1 = 3^s$ y $3^x = (y^2+1)(y^2-1) = 3^r \cdot 3^s = 3^{r+s}$, es decir, $x = r + s$. Entonces $2 = (y^2+1) - (y^2-1) = 3^r - 3.^s$ Al ocurrir que las únicas potencias de 3 que, restadas, dan 2 (dan mayor que 2 en cualquier otro caso) son 3^1 y 3^0, resulta que $r = 1$ y $s = 0$, con lo cual $x = r + s = 1 + 0 = 1$ y por tanto $y^4 = 3^x + 1 = 3^1 + 1 = 4$, siendo entonces $y = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2}$, que contradice la suposición de que $y \in Z_+^*$.

Nota: En la 15ª Olimpiada Italiana de Matemáticas del año 1999 se propuso un problema que contiene como caso particular, para $n = 4$, a la primera de las ecuaciones de este problema 204; viene a plantear la siguiente cuestión:

Encontrar todas las ternas (x, y, n) *de enteros positivos tales que* $3^x - 1 = y^n$.

Puede demostrarse que: Si $n = 1$, las ternas solución son $(x, y, n) = (x, 3^x - 1, 1)$ y si $n \ge 2$, la única terna solución es $(x, y, n) = (2, 2, 3)$.

Problema 205.

Sea ABC un triángulo rectángulo en A, con lados a > b ≥ c. Sean r el radio del círculo inscrito, R el del círculo circunscrito, y w_a la bisectriz interior del ángulo A. Demostrar que

$$c \le \left(2+\sqrt{2}\right) r \le \frac{2bc}{b+c} \le R+r \le b \Leftrightarrow \frac{c}{\sqrt{2}} \le \left(1+\sqrt{2}\right) r \le w_a \le \frac{R+r}{\sqrt{2}} \le \frac{b}{\sqrt{2}}$$

Probaremos sucesivamente las desigualdades de la izquierda.

1.- $c \le \left(2+\sqrt{2}\right) r \Leftrightarrow \frac{c}{r} \le 2+\sqrt{2}$,

en efecto, se tiene

$$\frac{1}{2} bc = \frac{a+b+c}{2} r \Leftrightarrow \frac{c}{r} = \frac{a+b+c}{b} = 1+\frac{a+c}{b},$$

entonces hemos de probar

$$\frac{a+c}{b} \le 1+\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{(a+c)^2}{b^2} \le 3+2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{a+c}{a-c} \le 3+2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1+\sin C}{1-\sin C} \le 3+2\sqrt{2}$$

operando la última expresión queda en la forma

$$\sin C \le \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}{4-2} = \frac{2-2+2\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

que se satisface por la hipótesis de ser $c \le b \Leftrightarrow C \le 45^{\circ} \Leftrightarrow \sin C \le \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.- $\left(2+\sqrt{2}\right) r \le \frac{2bc}{b+c}$.

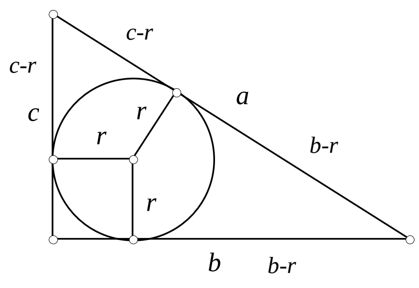
En efecto, de $\frac{1}{2} bc = \frac{a+b+c}{2} r$ se sigue $r = \frac{bc}{a+b+c}$ y la desigualdad queda: $\frac{2+\sqrt{2}}{a+b+c} \le \frac{2}{b+c}$

que una vez operada, resulta

$$\sqrt{2}(b+c) \le 2a \Leftrightarrow 2\left(b^2+c^2+2bc\right) \le 4\left(b^2+c^2\right) \Leftrightarrow 0 \le b^2+c^2-2bc \Leftrightarrow 0 \le (b-c)^2$$

que es obviamente cierta en cualquier triángulo rectángulo.

3.- $\frac{2bc}{b+c} \le R+r$.



En efecto, de la figura se sigue de modo inmediato que

$$a = b-r+c-r \Leftrightarrow r = \frac{b+c-a}{2} = \frac{b+c}{2} - R \Leftrightarrow R+r = \frac{b+c}{2}.$$

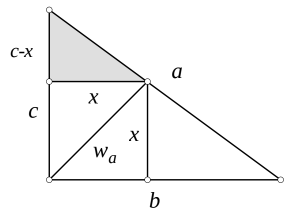
La desigualdad queda

$$\frac{2bc}{b+c} \le \frac{b+c}{2} \Leftrightarrow (b+c)^2 - 4bc \ge 0 \Leftrightarrow (b-c)^2 \ge 0$$

cierta en cualquier triángulo rectángulo.

4.- $R+r \le b$. Por lo anterior y por la hipótesis $b \ge c$, resulta $R+r = \frac{b+c}{2} \le \frac{b+b}{2} = b$

Para las desigualdades de la derecha basta dividir todas por $\sqrt{2}$ y solo queda ver que $w_a = \dfrac{\sqrt{2}bc}{b+c}$.



En la figura de la derecha por la semejanza del triángulo inicial y el sombreado se tiene

$$\frac{c-x}{x} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow bc - bx = cx \Leftrightarrow x = \frac{bc}{b+c}.$$

Como w_a es la diagonal del cuadrado de la do x se sigue el resultado.

COMENTARIO DE LIBROS, PÁGINAS WEB Y NOTICIAS DE CONGRESOS 42

Historia de las Matemáticas en la Península Ibérica (Desde la prehistoria al siglo XV); por **Mª Victoria Veguin Casas.** Ed. Reverté, Madrid, 2011. 431 páginas.

El pasado día 9 de febrero, en el Salón de Actos del IES "Beatriz Galindo" de Madrid, en un acto presidido por Dª Alicia Delibes Liniers, Viceconsejera de Educación de la Comunidad de Madrid, se presentó el libro cuyo título figura unas líneas más arriba.

Como Editor de la REOIM, para mí es un honor y un placer dar a conocer mediante este breve comentario la obra de la Profª. Veguin, durante varios años compañera en el Departamento de Matemáticas del IES "Emilio Ferrari" de Valladolid.

No creo exagerado decir que, desde la obra clásica de Francisco Vera, probablemente no se había publicado en España un estudio tan riguroso, profundo y al mismo tiempo escrito con una gran amenidad, de un tema tan especializado como éste.

Numerosas fotografías, muchas de ellas obra de Jesús Salas Parrilla, ilustran con profusión el libro. Las notas y una extensa bibliografía, y un Anexo dedicado a glosar la vida y obra del Prof. José Augusto Sánchez Pérez (1882 – 1958), *primer historiador de las matemáticas en al-Ándalus*, completan este magnífico trabajo.

A título ilustrativo, destacamos aquí los títulos de algunos de sus quince capítulos:

Cap.3: *Las matemáticas en Hispania*

Cap.4: *Las matemáticas en el reino visigodo*

Cap. 5, 6, 7 y 8: *Las matemáticas en al-Ándalus*

Cap.12: *La influencia de la peregrinación jacobea en la difusión del saber matemático*

Cap.13: *Las matemáticas en romance (siglos XIII-XV)*

Cap.15: *Las matemáticas en Sefarad*

Los estudiosos de la historia en general y de la historia de las matemáticas en particular tienen, a buen seguro, en la obra de Mª Victoria Veguin una referencia insoslayable.

Valladolid, junio 2011. Francisco Bellot Rosado.

María Victoria Veguín Casas

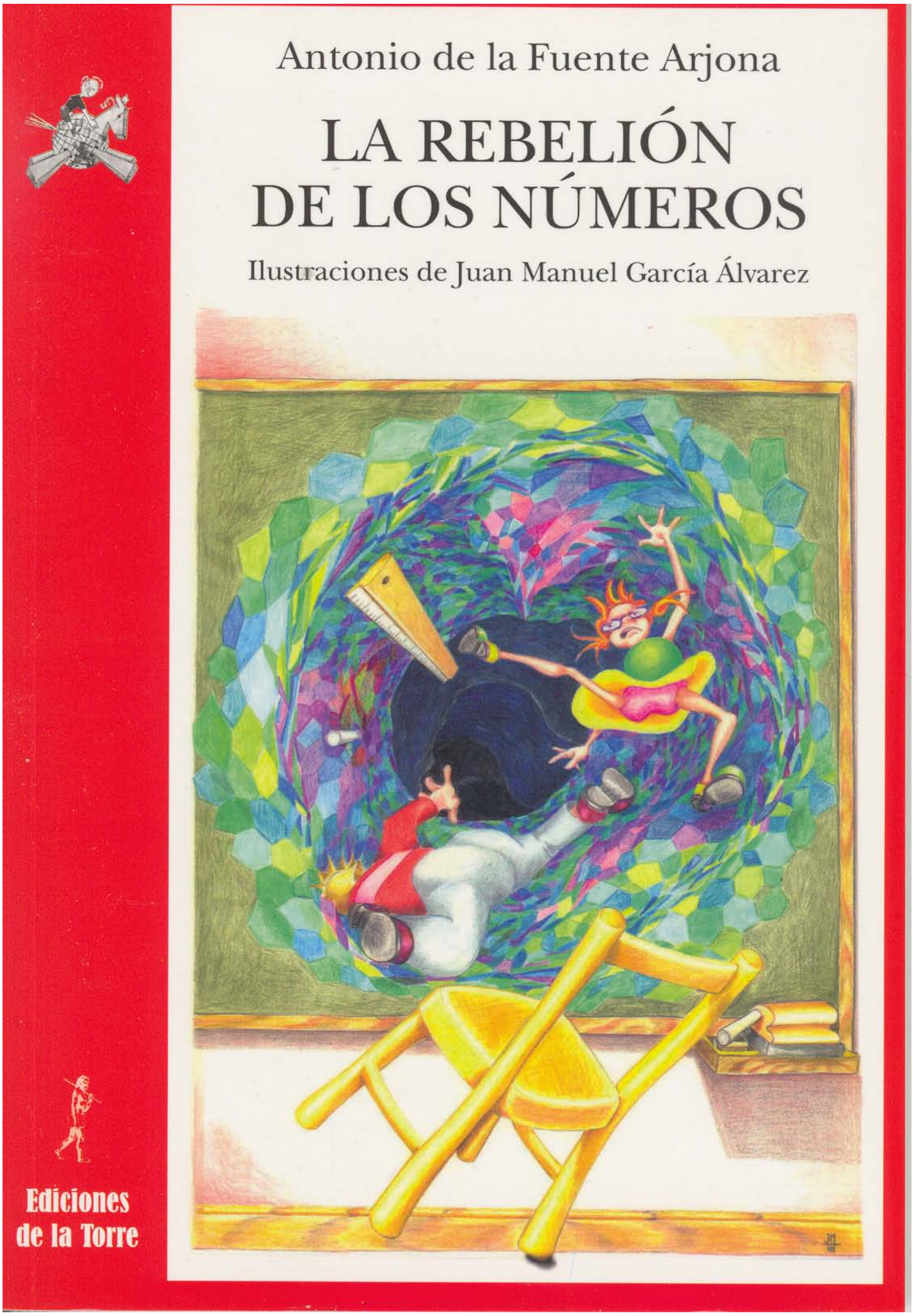
Historia de las Matemáticas en la Península Ibérica

Desde la prehistoria al siglo XV

EDITORIAL REVERTÉ

DIVERTIMENTOS MATEMÁTICOS 42

El teatro como herramienta didáctica: *La rebelión de los números,* por Antonio de la Fuente Arjona.



Amablemente enviado por su autor, ha llegado a manos del editor que suscribe el texto escrito (y publicado por Ed. De la Torre, Madrid 2010) de *La rebelión de los números (Un espectáculo para lápiz y papel),* una obra de teatro muy adecuada, en mi opinión, para ser representada en los centros escolares. El autor ha conseguido convertir en acción, en vivencia teatral, algo tan abstracto como un (en realidad varios) problema matemático. Además de ser representada, *La rebelión de los números* puede (y debe) ser leída con lápiz y papel, puesto que en varios momentos de la acción se pregunta al lector (o al espectador, en su caso) algún *enigma matemático*, no excesivamente difícil, pero siempre atrayente. Los espectadores más jóvenes irán apreciando porqué a los matemáticos nos gusta resolver problemas; por una razón muy parecida a la que dan los alpinistas para subir a las montañas: *porque están ahí.*

Como no es cuestión aquí de desvelar el argumento, citaremos algunas de las frases de la contraportada del libro:

De nuevo la Panda de Los Últimos de la Clase entra en acción...

¿Lograrán rescatar a su profesor de matemáticas secuestrado por unos Números muy revoltosos?

Matemáticas y Teatro: una ecuación explosiva

Un texto original e insólito, en la escuela y en un escenario.

Valladolid, junio de 2011

Francisco Bellot Rosado

Mar del Plata, Argentina

Sr. Editor de la Revista Escolar de la OIM

Recientemente tuve oportunidad de leer el artículo publicado en el número 39 de la revista, "Una prueba elemental del teorema de Pascal" de Milton Donaire Peña. En tal artículo se sugiere que esta demostración apareció por primera vez en el libro del autor publicado en 2010. Simplemente deseaba hacer saber que dicha prueba ya era conocida por este servidor desde hace algunos años, y que en particular la publiqué tardíamente en MathLinks en 2008: <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=50&t=218485&p=1211436#p1211436>http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=50&t=218485&p=1211436#p1211436

Tampoco considero haber sido el primero en encontrarla, y menos en publicarla, pues seguramente ya alguien lo hizo con anterioridad en este inmenso mundo de geómetras y románticos de la matemática dispersos por todo el globo.

Tal aclaración no va en desmedro de la calidad de los artículos de la revista ni de la alta valoración que me despierta la publicación que Ud. edita.

Con mucho respeto lo saluda atte.

Lucas Martín Andisco

UNMDP/UBA/Conicet

(Recibido por el editor el 4 de febrero de 2011)