АЛЕКСЕЙ МЯКИШЕВ
ТРЕУГОЛЬНЫЕ ФРАКТАЛЫ

Козлевич был так погружен в свои печальные размышления, что даже не заметил двух молодых людей, уже довольно долго любовавшихся его машиной.
- Оригинальная конструкция, - сказал наконец один из них, - заря автомобилизма. Видите, Балаганов, что можно сделать из простой швейной машинки Зингера? Небольшое приспособление – и получилась прелестная колхозная сноповязалка.

Илья Ильф, Евгений Петров. Золотой теленок.

1. *Определение треугольного фрактала и его размерности.*

Определение треугольного фрактала.

Допустим, что мы располагаем неким способом, с помощью которого можем построить N ($N \geq 2$) треугольников $T_1^1,...,T_1^N$, подобных исходному треугольнику T_0, с коэффициентами подобия $k_1,...,k_n$, соответственно. Треугольники и сам способ построения должны удовлетворять трем условиям:

1. $T_1 = \bigcup\limits_{i=1}^{N} T_1^i \subset T_0; T_1 \neq T_0$
2. Точки пересечения T_1^i и T_1^j $(i \neq j)$, если они имеются, принадлежат сторонам треугольников.
3. Если мы вместо T_0 возьмем треугольник T_0', подобный T_0, и применим к новому треугольнику данный способ построения, то получим N треугольников, подобных T_0', с теми же самыми коэффициентами подобия $k_1,...,k_n$.

Далее, к каждому из N треугольников, полученных на первом шаге, применим наш способ - это и будет вторым шагом в построении всей конструкции. В результате получим N^2 треугольников $T_2^1,...,T_2^{N^2}$ и положим по определению $T_2 = \bigcup\limits_{i=1}^{N^2} T_2^i$.

Продолжая действовать таким образом, мы построим счетную последовательность непустых компактных множеств, вложенных друг в друга: $T_0 \supset T_1 \supset T_2 \ldots$

Согласно известной теореме общей топологии (см.[4]), $F = \bigcap\limits_{i=0}^{\infty} T_i$ является также непустым и компактным множеством.

Множество F назовем фракталом, порожденным начальным треугольником T_0 и данным способом построения.

Из определения сразу следует, что $0 < k_i < 1$ для всех натуральных i, таких что $1 \le i \le N$ и $\left(k_1^2 + \ldots + k_N^2\right) < 1$, так как $S_0 > \sum_{i=1}^{N} S_1^i = S_0 \sum_{i=1}^{N} k_i^2$, где S_0 - площадь T_0 и S_1^i - площадь T_1^i.

Заметим также, что $\lim_{n\to\infty} S_n = 0$ (где S_n - площадь T_n), поскольку, как нетрудно видеть, $S_n = \left(k_1^2 + \ldots + k_N^2\right)^n S_0$.

Определение размерности.

По определению, размерностью треугольного фрактала F назовем корень d_0 *уравнения* $k_1^d + \ldots k_N^d = 1$.

Так как функция $F(d) = k_1^d + \ldots k_N^d$ является непрерывной и убывающей (как сумма непрерывных и убывающих показательных функций) и $F(0) = N \ge 2, F(2) < 1$, то уравнение $F(d) = 1$ имеет только одно решение d_0, причем $d_0 \in (0;2)$.

Методами вычислительной математики мы можем при желании в каждом конкретном случае определить d_0 с любой точностью десятичных знаков. Иногда же удается найти и точное решение уравнения размерности, но оно, как правило, все равно будет иррациональным числом (которое мы тоже можем приблизить с любой точностью, но *все* десятичные знаки определить не в силах).

Подчеркнем также, что $k_1 + \ldots k_n > 1 \Leftrightarrow d_0 > 1$; $k_1 + \ldots k_n = 1 \Leftrightarrow d_0 = 1$; $k_1 + \ldots k_n < 1 \Leftrightarrow d_0 < 1$ - как следует из равенств $k_1 + \ldots k_n = F(1)$, $F(d_0) = 1$ и свойств функции $F(d)$. С учетом этого, мы имеем: $\lim_{n\to\infty} P_n = \infty \Leftrightarrow d_0 > 1$; $\lim_{n\to\infty} P_n = P_0 \Leftrightarrow d_0 = 1$; $\lim_{n\to\infty} P_n = 0 \Leftrightarrow d_0 < 1$ - где P_n - периметр $T_n : P_n = (k_1 + \ldots k_n)^n P_0$.

Еще отметим, что на самом деле наше определение размерности является частным случаем значительно более общего подхода, так называемой *размерности множества по Хаусдорфу.* (Подробнее о ней, а также о фракталах вообще, можно узнать из [1],[6],[9]).

Выражаясь неформально, на интуитивном уровне - можно сказать, что фрактальная размерность множества на плоскости выражает степень его отклонения (или близости) от (к) «правильной» кривой или фигуры. Так, если размерность близка к *единице*, множество чем-то схоже с «обыкновенной» плоской кривой и т.д.

Ниже мы приведем несколько примеров треугольных фракталов, и сравним фрактальную размерность с единицей.

Договоримся каждый фрактал иллюстрировать тремя картинками, на которых изобразим, соответственно, первый, второй и четвертый шаг построения (то-есть, T_1, T_2, T_4 в наших обозначениях). Треугольники с одинаковым коэффициентом подобия будем окрашивать в один и тот же цвет (а для различных коэффициентов подобия подберем и разные цвета). Область, *не* входящую во фрактал, всегда будем выделять *желтым.*

2. Прямоугольные фракталы.

Первый прямоугольный фрактал.

Пусть T_0 - некоторый прямоугольный треугольник, CC_1 – высота, опущенная из вершины прямого угла, C_1A_1 – перпендикуляр к BC.

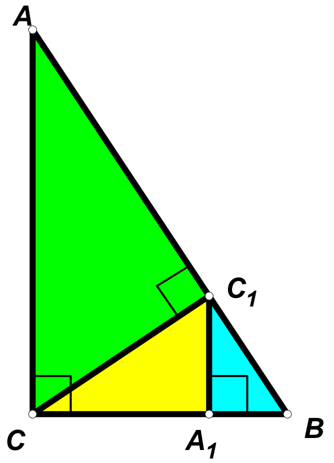
(Здесь нужно уточнить, к какому именно катету мы будем проводить перпендикуляр. Условимся действовать таким образом, чтобы обход вершин в порядке $C - C_1 - A_1$ совершался бы *по часовой стрелке*.)

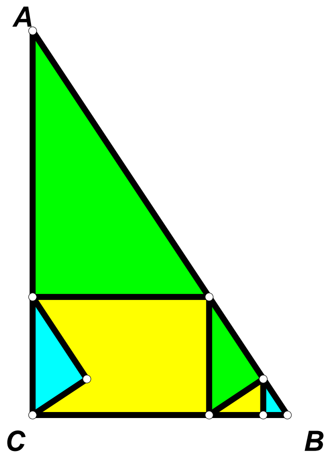
Имеем N=2, $T_1^1 = C_1A_1B; T_1^2 = AC_1C$.

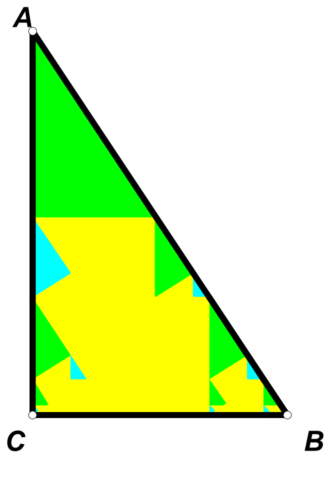
Используя подобие, несложно проверить, что $k_1 = \frac{a^2}{c^2}; k_2 = \frac{b}{c}$.

Уравнение размерности имеет вид: $\left(\frac{b}{c}\right)^d + \left(\frac{a^2}{c^2}\right)^d = 1$ или $\sin^d B + \cos^{2d} B = 1$.

А так как $\sin B + \cos^2 B > \sin^2 B + \cos^2 B = 1$, то $d_0 > 1$.





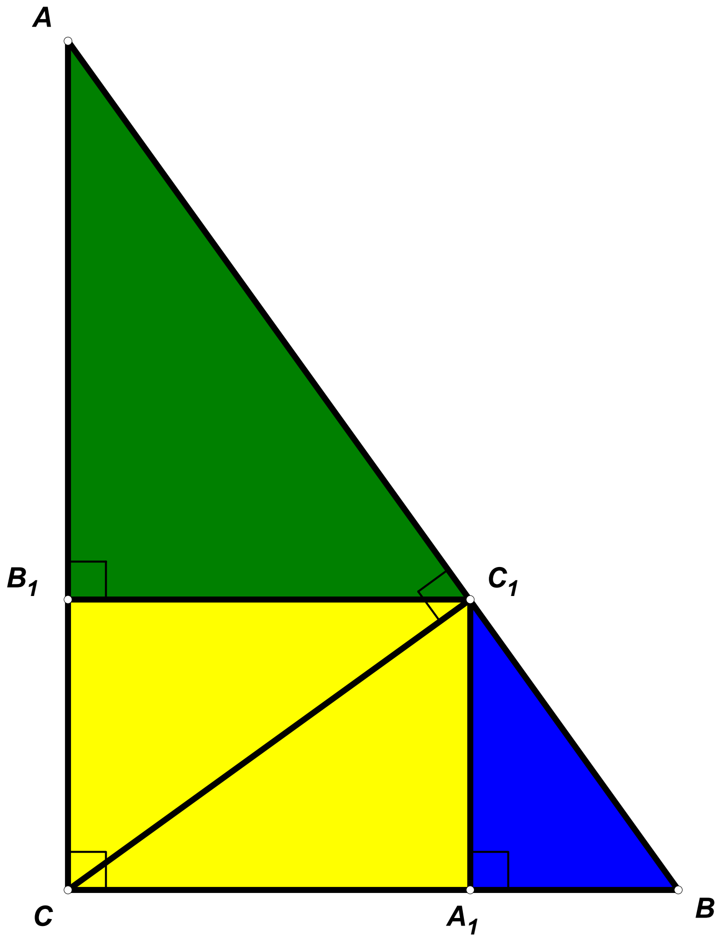


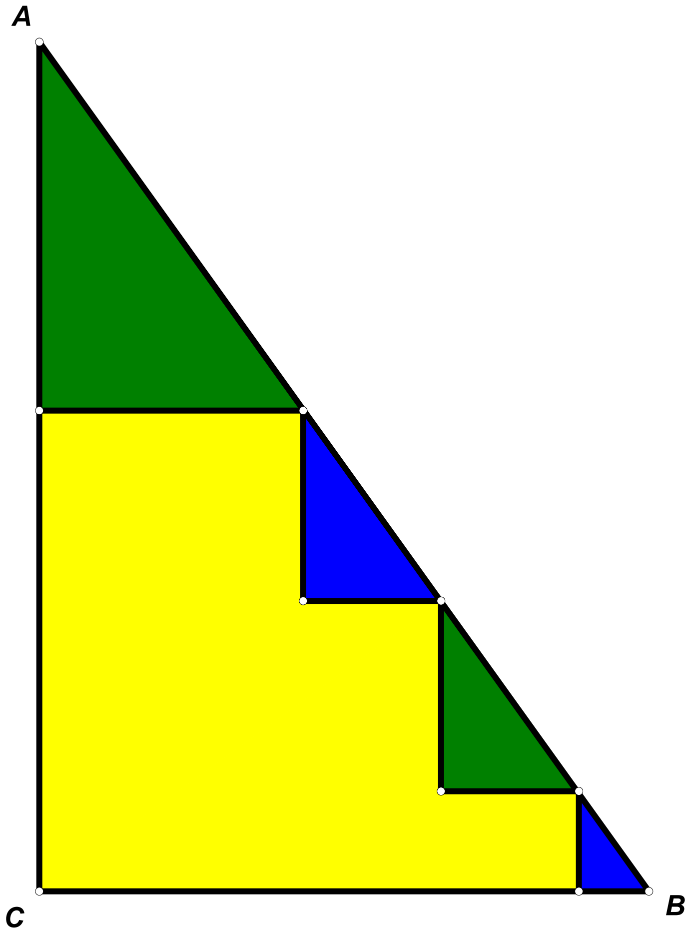
Кроме того, в случае $\angle A = \angle B = \dfrac{\pi}{4}$ уравнение можно переписать, как $t + t^2 = 1$, где $t = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^d$.

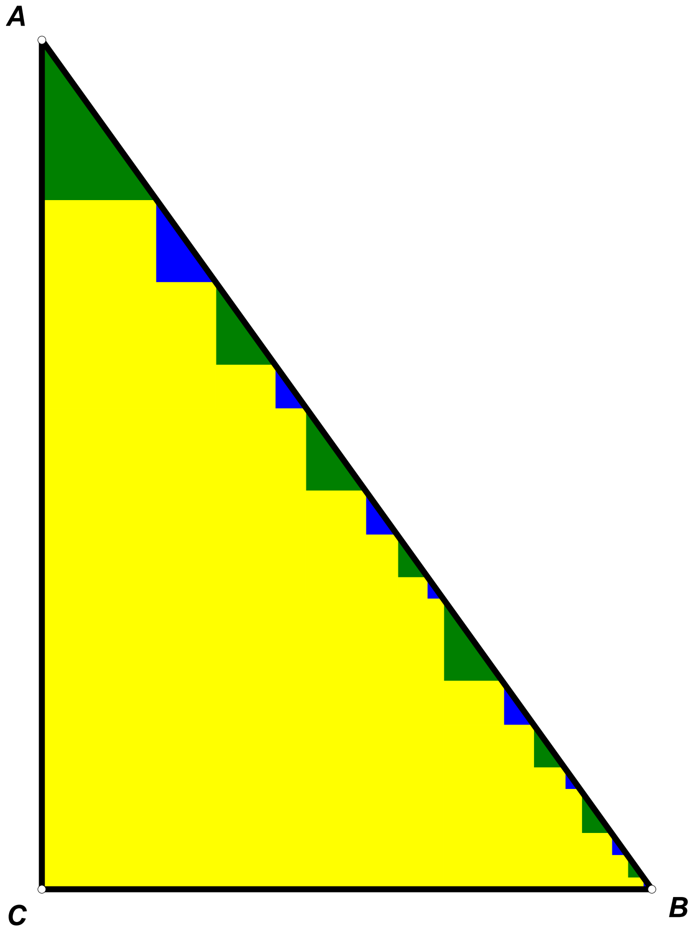
Следовательно, $t = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}; d_0 = \dfrac{\ln\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)} \approx 1.388$.

(Напомним кстати, что $t = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = \dfrac{1}{\phi}$, где $\phi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ - славное *число Фидия*, или *золотое сечение*: именно в таком отношении следует разделить отрезок, чтобы его длина относилась к длине большей части, как длина большей части – к длине меньшей).

Второй прямоугольный фрактал.




A
C
B



Здесь C_1B_1 – перпендикуляр к AC, T_1^1 такой же, как и в предыдущем примере, и $T_1^2 = AB_1C_1$ с $k_2 = \frac{b^2}{c^2}$.

Уравнение размерности: $\left(\frac{b^2}{c^2}\right)^d + \left(\frac{a^2}{c^2}\right)^d = 1$, и, по теореме Пифагора, $d_0 = 1$.

Отметим, что на каждом последующем шаге построения *пила*, образованная катетами «фрактальных» треугольников, все теснее прижимается к гипотенузе исходного треугольника, однако периметр пилы остается постоянным на любом шаге (и равен сумме катетов исходного треугольника). Может показаться, что возникает противоречие (мол, после перехода к пределу получим гипотенузу, равную сумме катетов) – однако, это не так. Подробное объяснение имеется, например, в интересной и поучительной книжке [2].

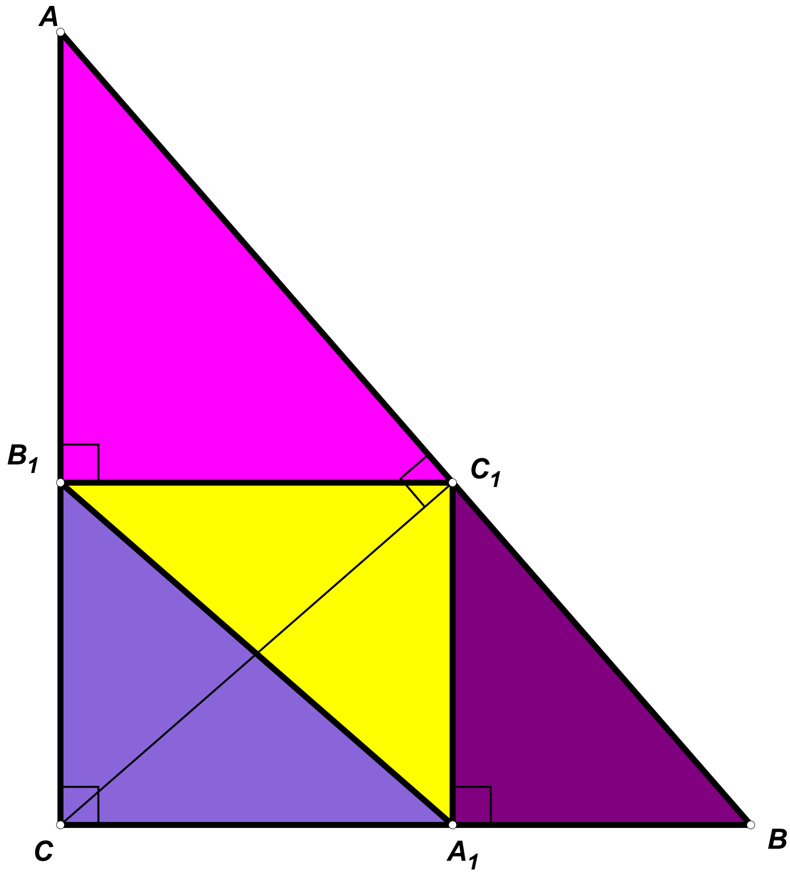
Третий треугольный фрактал.

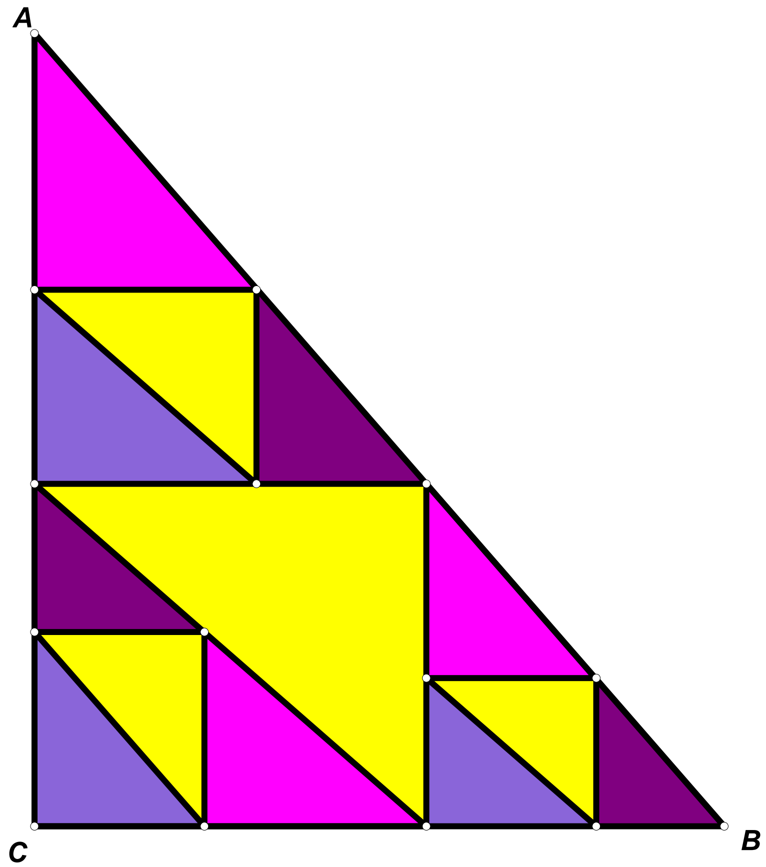
Добавим в предыдущую конструкцию T_1^3 с коэффициентом подобия $k_3 = \frac{ab}{c^2}$.

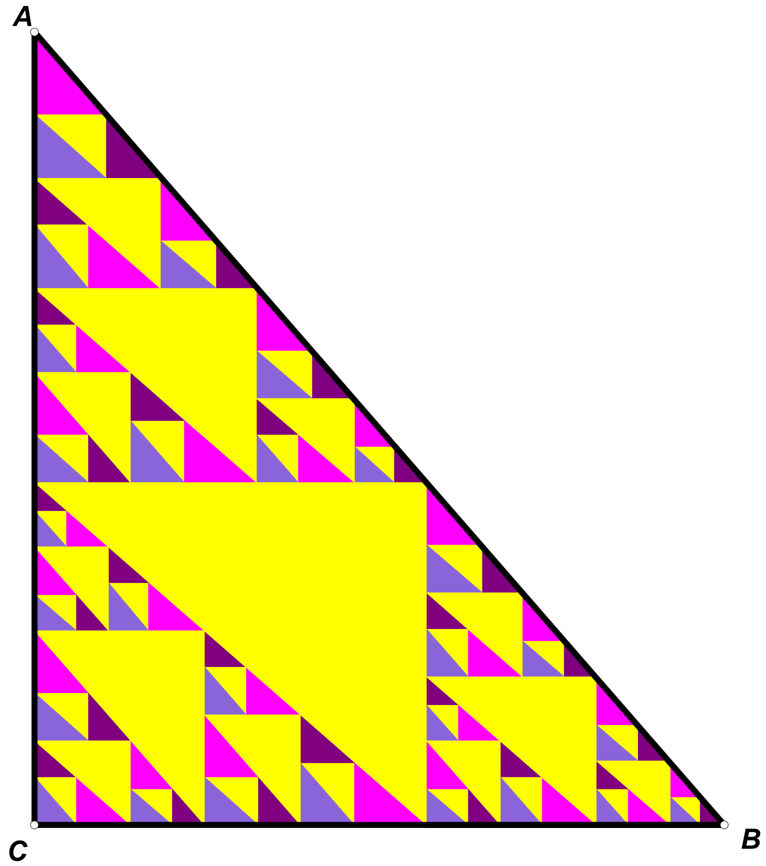
Уравнение размерности тогда запишется, как $a^{2d} + b^{2d} + (ab)^d = c^{2d}$.

Конечно, в этом случае $d_0 > 1$.

Отметим, что в частном случае $\angle A = \angle B = \frac{\pi}{4}$ получается знаменитая *салфетка Серпинского* (см. далее ***пункт 4***).


A
B1
C1
C
A1
B


A
C
B



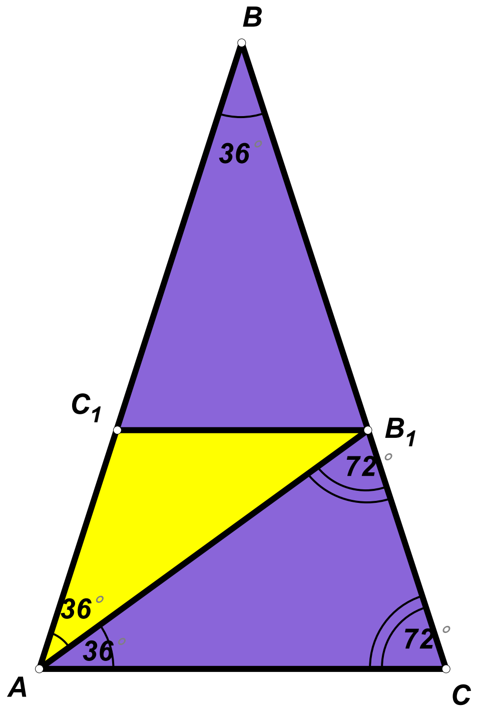
3. *«Золотой» фрактал.*

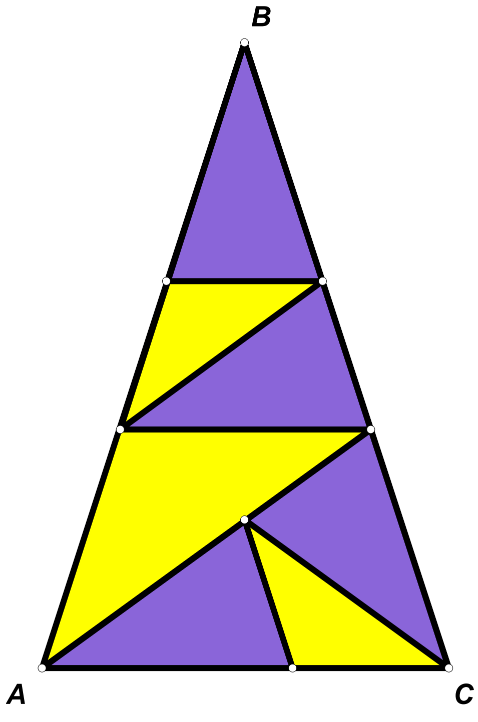
Пусть T_0 равнобедренный треугольник с углами $\angle A = \frac{\pi}{5}; \angle B = \angle C = \frac{2\pi}{5}$, BB_1 – биссектриса угла B (для определенности, один из двух углов при основании выбираем так, чтобы обход: A–выбранная вершина при основании–оставшаяся вершина при основании - совершался бы *против часовой стрелки*) , и B_1C_1 – отрезок, параллельный BC.

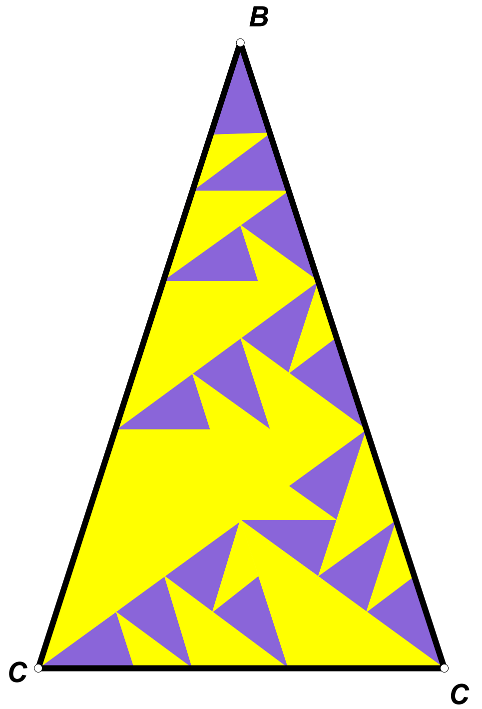
Здесь N=2, $T_1^1 = B_1BC_1; T_1^2 = B_1AC$, причем оба треугольника одинаковы.

Используя свойство биссектрисы и подобие, несложно показать, что

$k_1 = k_2 = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\phi}$. Отсюда $d_0 = \frac{\ln\frac{1}{2}}{\ln\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \approx 1.440$.

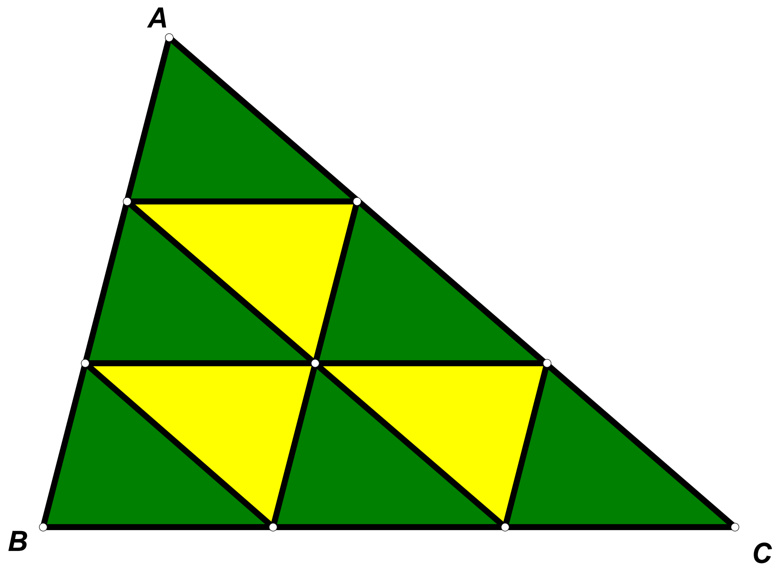

B
36°
C1
B1
72°
36°
36°
72°
A
C


B
A
C



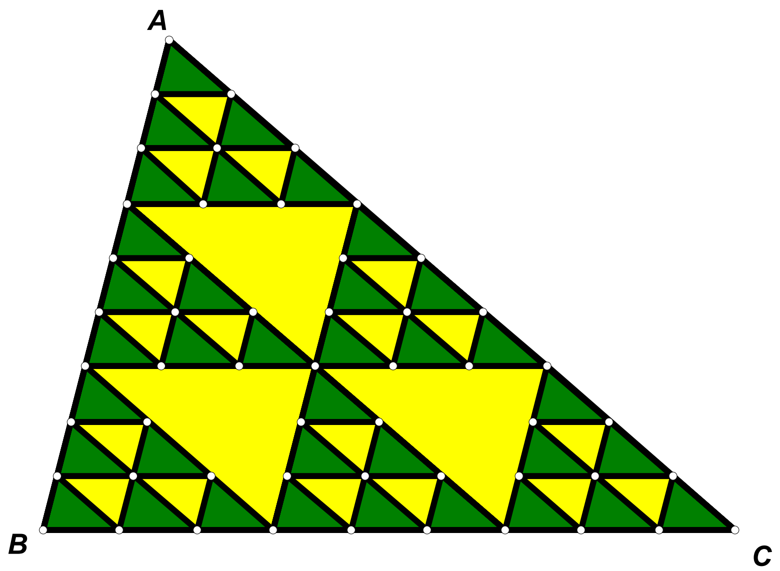
4. k-«салфеточный» фрактал.

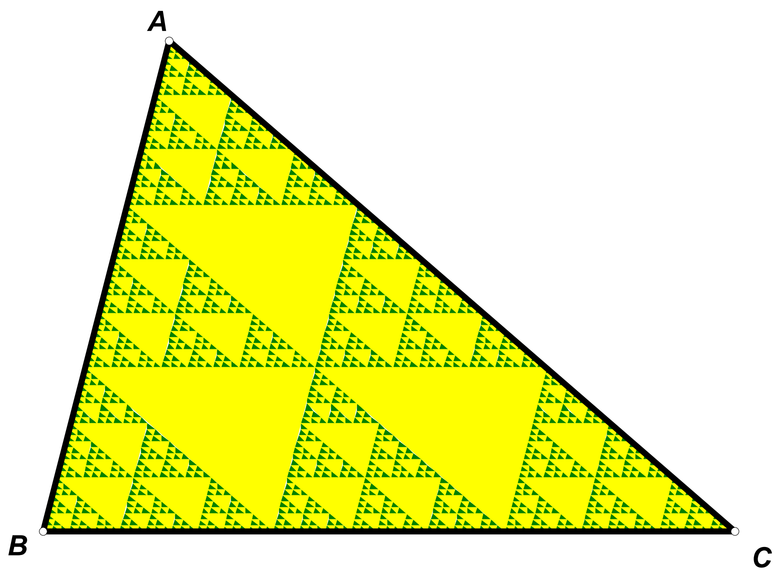
Разделим каждую сторону произвольного треугольника ABC на k ($k \geq 2$) одинаковых частей. Затем через точки деления проведем параллели к сторонам треугольника. Исходный треугольник разбивается на k^2 одинаковых треугольников, каждый из которых подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $\frac{1}{k}$. Наконец, выберем из них $1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k^2 + k}{2}$ треугольников (способ выбора ясен из рисунка, соответствующего случаю $k = 3$). Это – первый шаг в построении *k-салфетки* (где $N = \frac{k(k+1)}{2}$ и $k_1 = ... = k_N = \frac{1}{k}$).



Размерность вычисляется по формуле $d_0(k) = \dfrac{\ln\left(\dfrac{k^2+k}{2}\right)}{\ln k}$. Понятно, что $d_0(k) > 1$ для всех $k > 1$, так как $\dfrac{1}{k} \cdot \dfrac{k(k+1)}{2} = \dfrac{k+1}{2} > 1$.

Для $k = 3$ $d_0(3) = \dfrac{\ln 6}{\ln 3} \approx 1.631$

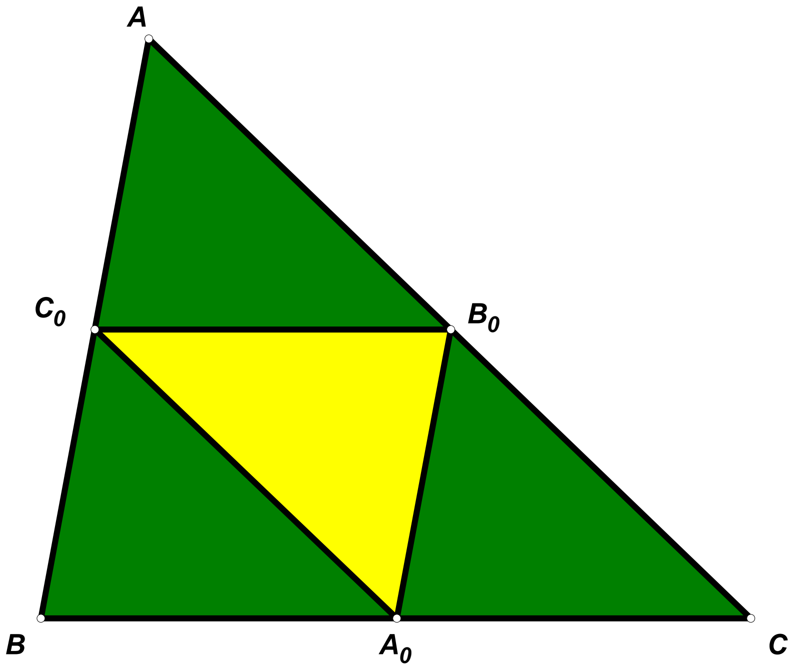


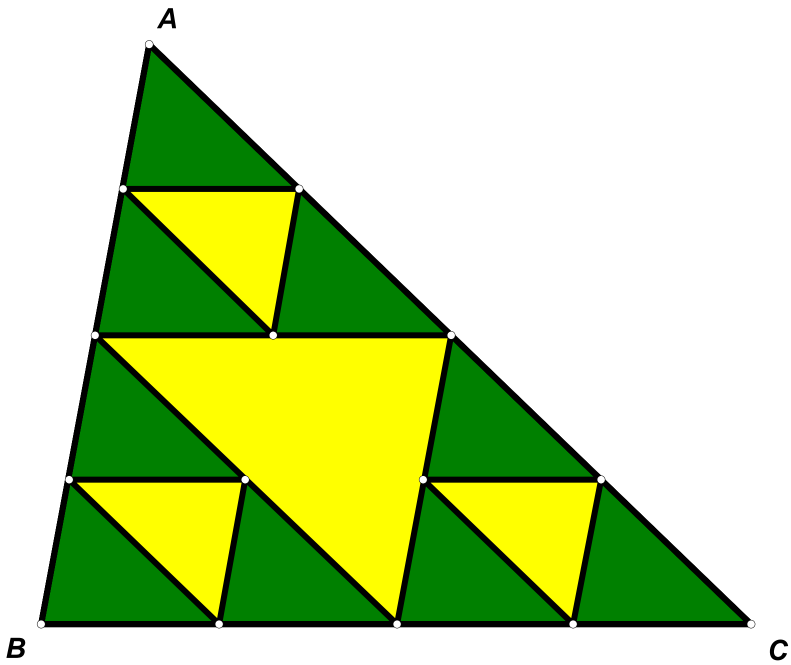


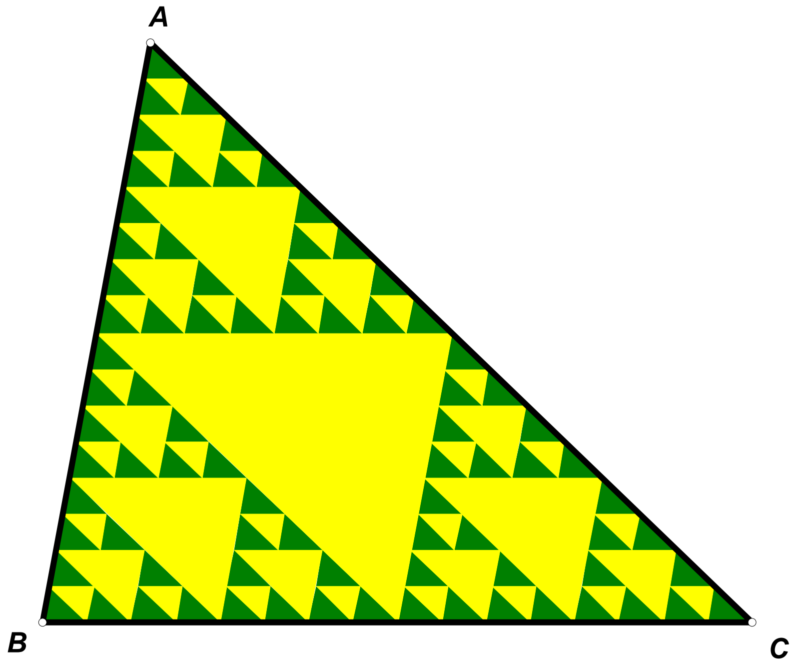
Кроме того, $\lim\limits_{k\to\infty} d_0(k) = 2$, поскольку $\dfrac{\ln\left(\dfrac{k^2+k}{2}\right)}{\ln k} = \dfrac{\ln k^2(\frac{1}{2}+\frac{1}{2k})}{\ln k} = \dfrac{2\ln k + \ln(\frac{1}{2}+\frac{1}{2k})}{\ln k}$.

В случае $k = 2$ фрактал называется *салфеткой Серпинского*.

$d_0(2) = \dfrac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.585$


A
C_0
B_0
B
A_0
C


A
B
C



5. «Параллельный» фрактал.

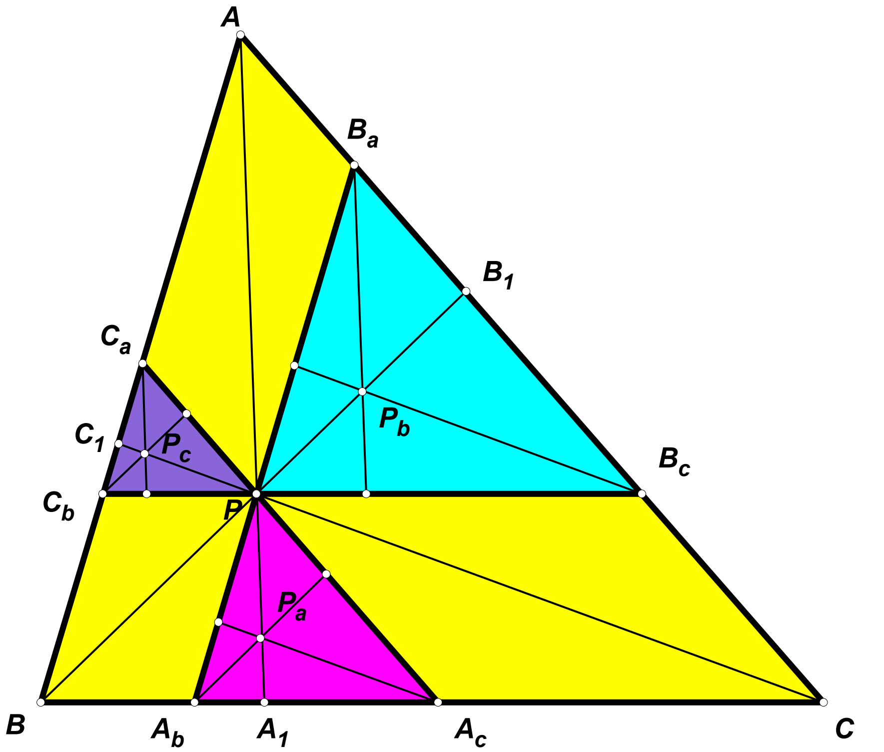
Внутри треугольника T_0 выберем точку *P*, через которую проведем прямые, параллельные сторонам треугольника и отметим точки пересечения этих прямых со сторонами.

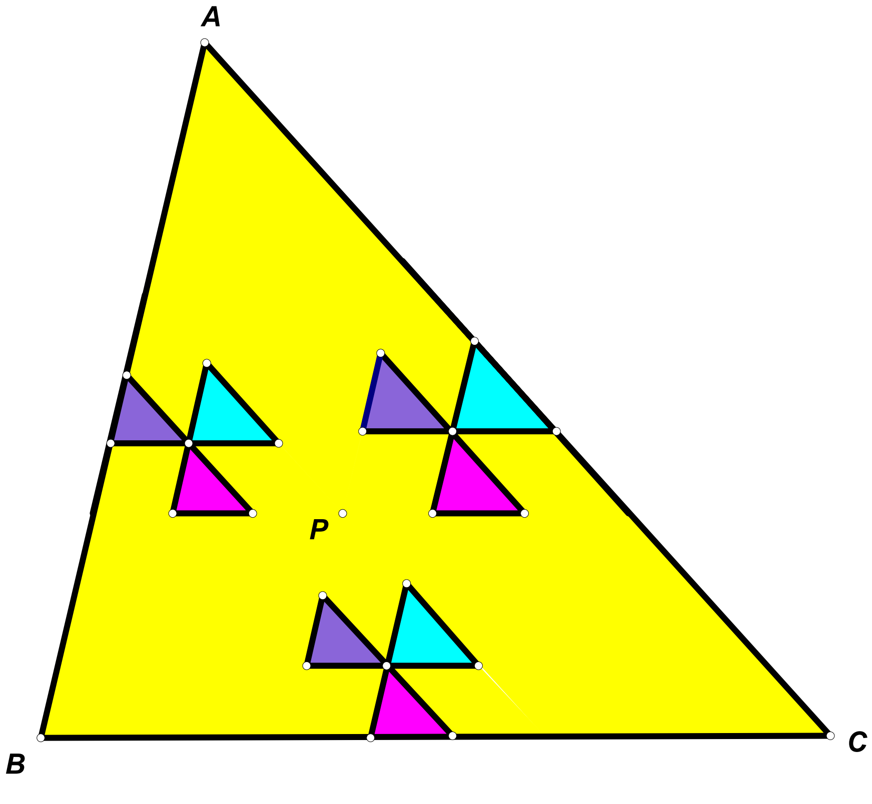
Положим N=3, $T_1^1 = PA_bA_c; T_1^2 = PB_cB_a, T_1^3 = PC_aC_b$.(И P_a, P_b, P_c – точки, соответствующие точке *P*, как соответственные точки подобных треугольников).

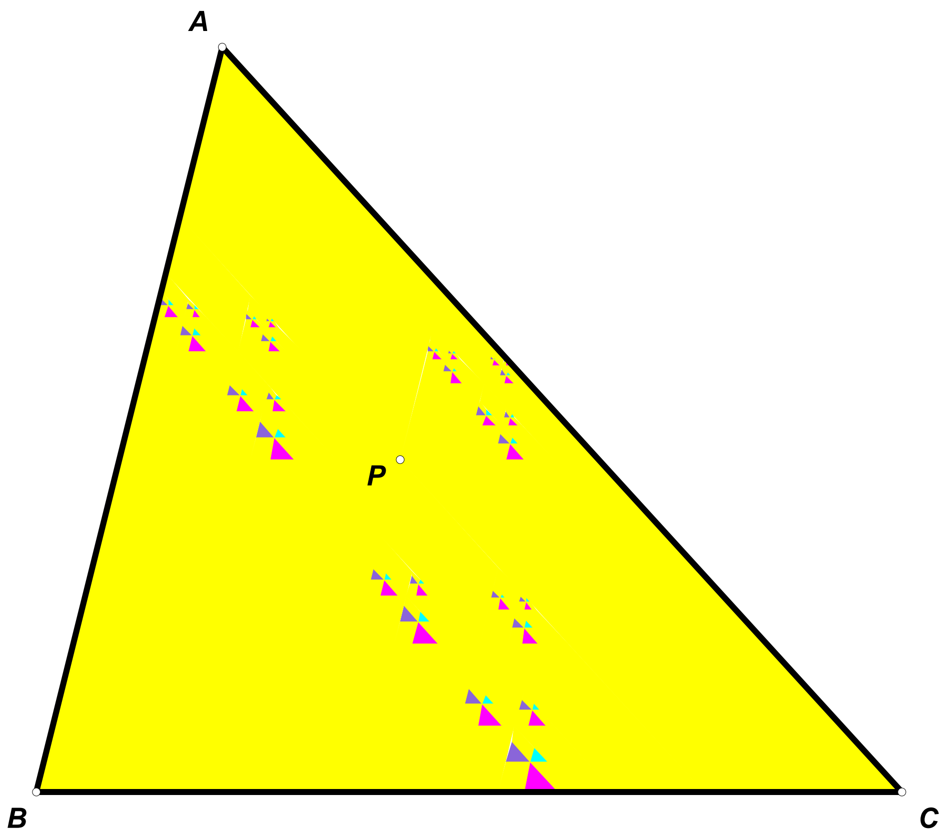
Очевидно, $k_1 = \dfrac{PA_1}{AA_1}; k_2 = \dfrac{PB_1}{BB_1}; k_3 = \dfrac{PC_1}{PC}$.

Но, по известной *теореме Жергонна* (см. [3], [8]-задача 4.49), $\dfrac{PA_1}{AA_1} + \dfrac{PB_1}{BB_1} + \dfrac{PC_1}{PC} = 1$, и потому $d_0 = 1$.

Легко также проверить, что сумма периметров всех треугольников, полученных на произвольном шаге построения параллельного фрактала, есть величина постоянная и равная периметру исходного треугольника. (И этот факт остается справедливым для любого треугольного фрактала с единичной размерностью).


A
B_a
B_1
C_a
C_1
P_c
P_b
B_c
C_b
P
P_a
B
A_b
A_1
A_c
C


A
P
B
C



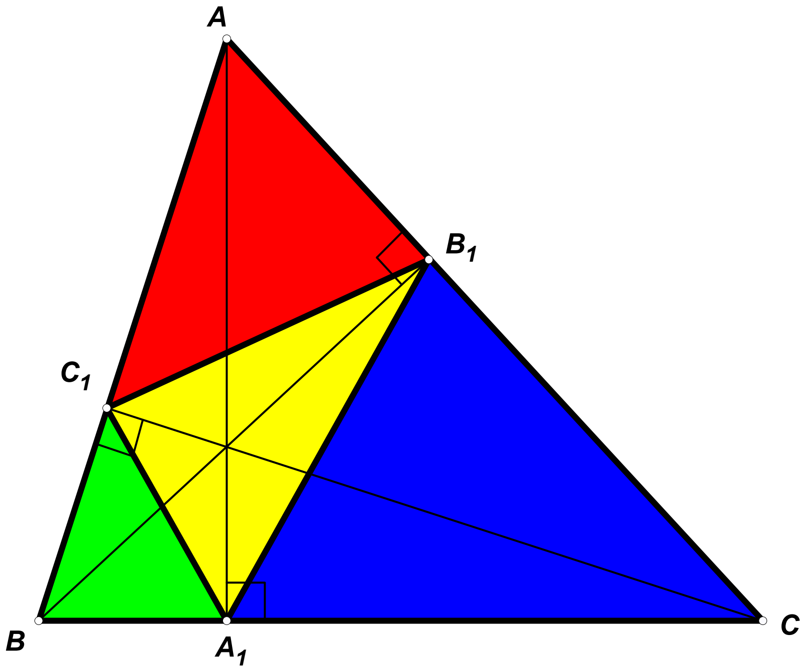
6. *Ортофрактал.*

Рассмотрим остроугольный треугольник T_0 и его ортотреугольник $A_1B_1C_1$ (образованный основаниями высот).

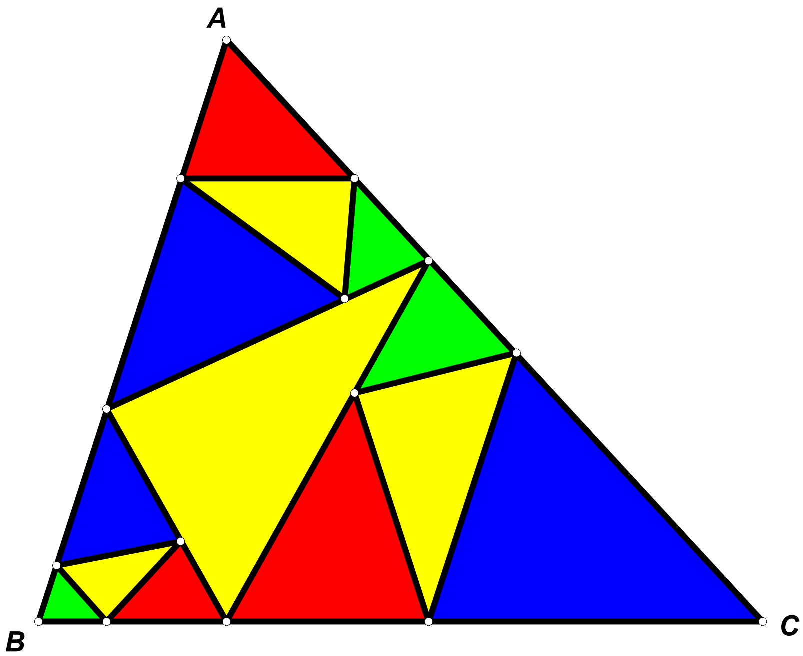
Положим здесь *N*=3, $T_1^1 = AB_1C_1; T_1^2 = BA_1C_1, T_1^3 = CB_1A_1$.

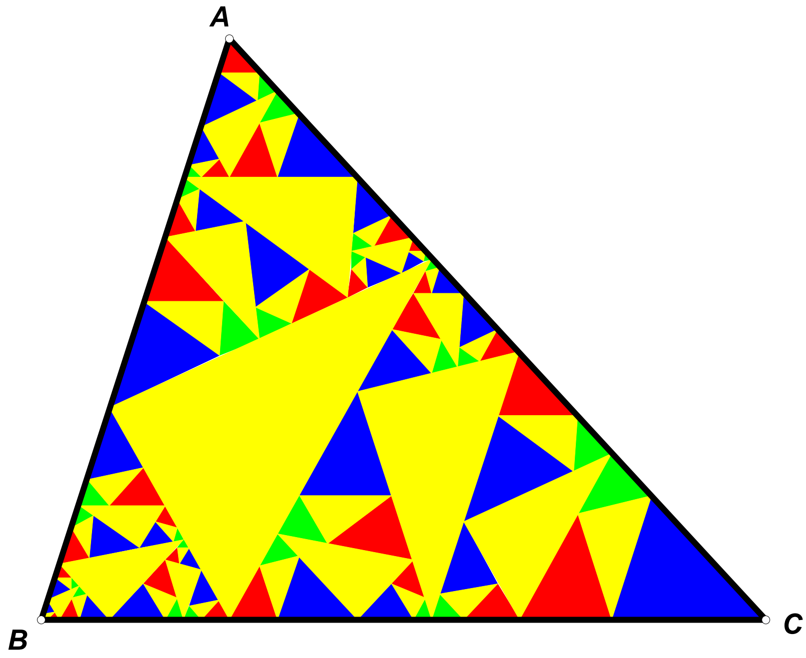
Как известно (см.[3], [8]-задача 1.53), $\angle AC_1B_1 = \angle C; \angle AB_1C_1 = \angle B$ и т.д. (Про прямые типа B_1C_1, BC говорят в таких случаях, что они *антипараллельны*), а $k_1 = \cos A; k_2 = \cos B; k_3 = \cos C$, и уравнение размерности имеет вид :

$\cos^d A + \cos^d B + \cos^d C = 1$.



Понятно, что $d_0 > 1$, так как в любом треугольнике справедливо равенство: (см. [3], [8]-задача 12.40) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R} > 1$, где r – радиус вписанной, а R-описанной окружности.





Отметим, что в случае равностороннего треугольника ($\angle A = \angle B = \angle C = \frac{\pi}{3}$) вновь возникает *салфетка Серпинского.*

7. О фракталах с размерностью $d_0 < 1$.

Среди всех выше приведенных примеров нам так ни разу и не встретился фрактал с размерностью, меньшей 1. Не следует, однако, думать, что такие фракталы представляют собою некую редкость. На самом деле, *из абсолютно любого треугольного фрактала легко сконструировать фрактал с размерностью меньшей, чем единица.*

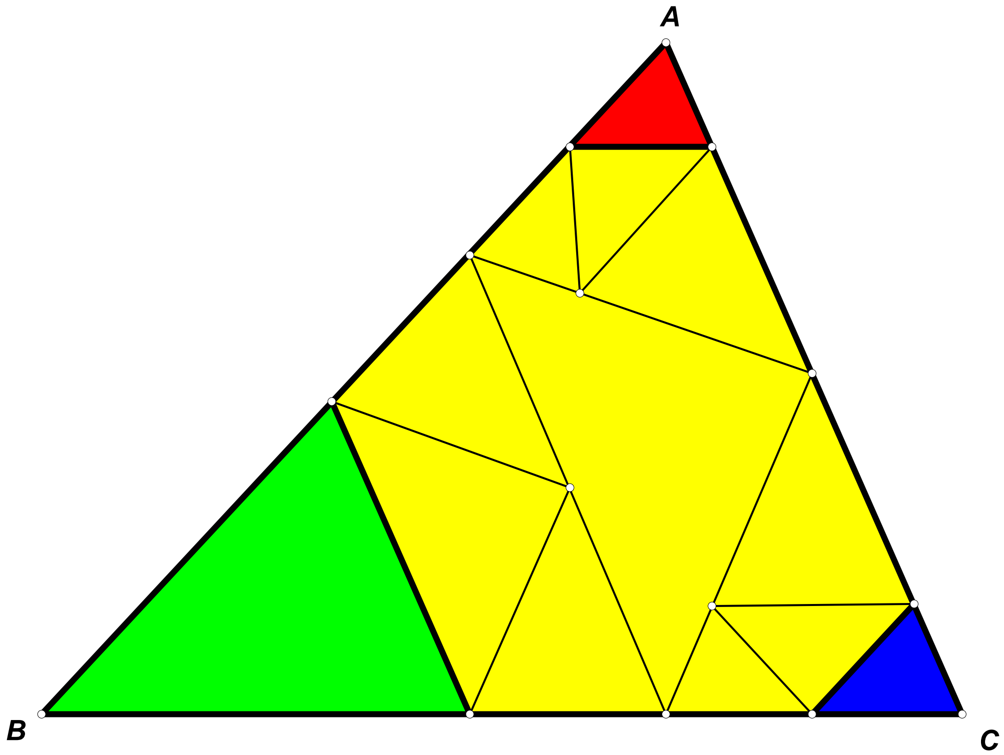
Достаточно всего лишь пропустить первый шаг построения, и начать сразу со второго, выбрав при этом среди N^2 треугольников любые N с различными коэффициентами подобия. Их-то мы и возьмем за основу для построения нового фрактала. Его коэффициенты подобия $k_1' = k_1^2, \ldots, k_N' = k_N^2$, а $d_0' < 1$, в силу неравенства $\left(k_1^2 + \ldots + k_N^2\right) < 1$.

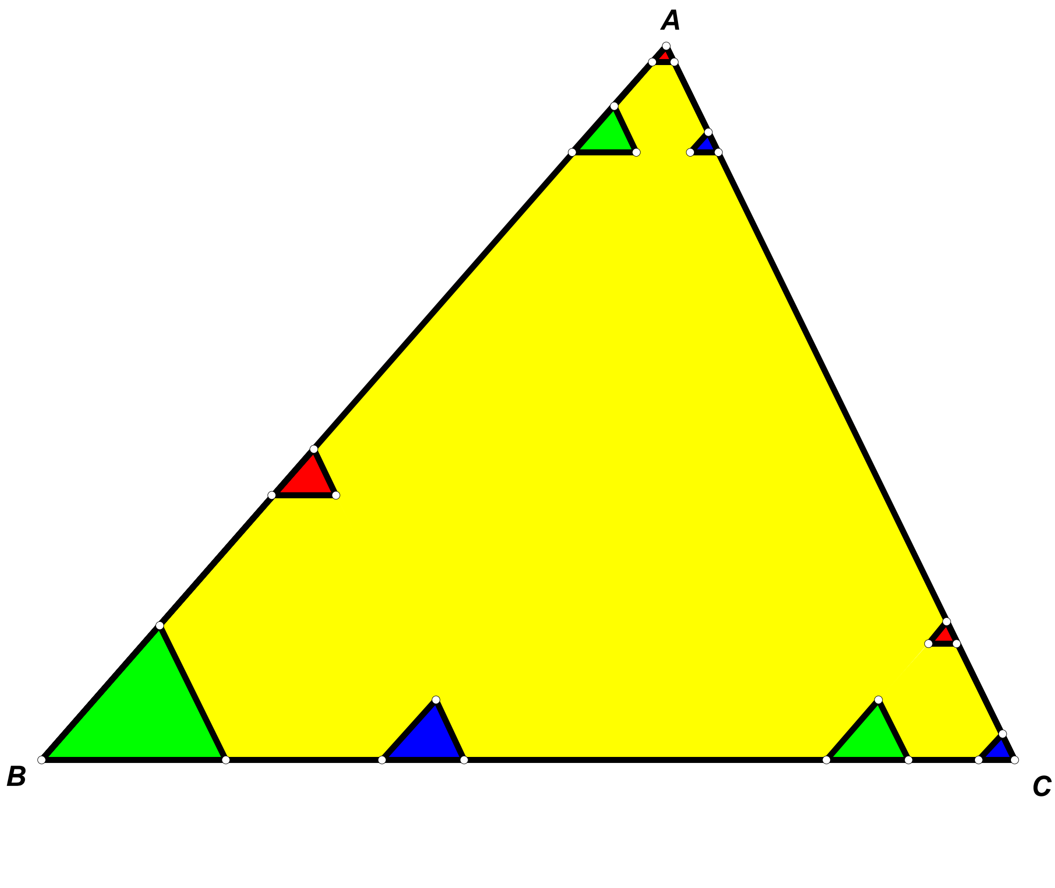
Проиллюстрируем сказанное, воспользовавшись предыдущим фракталом.

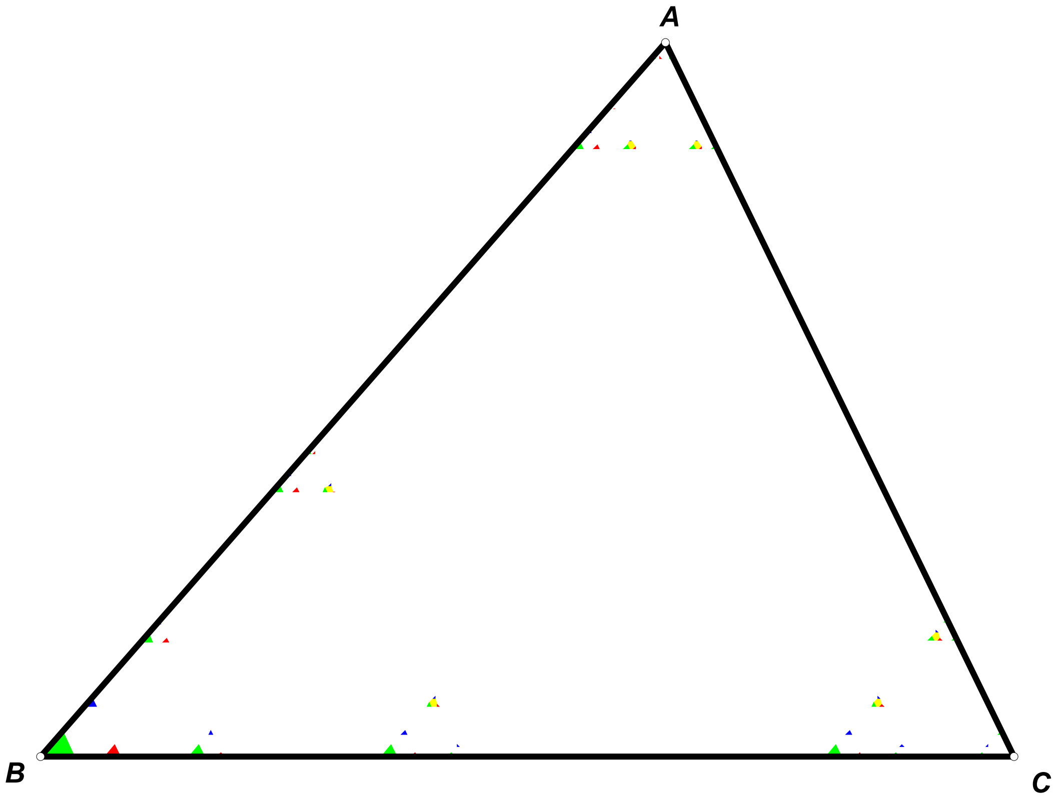
На втором шаге построения ортофрактала выберем три треугольника, примыкающие к вершинам исходного, и далее будем строить новый фрактал, считая эти треугольники для него «стартовыми».

Недостатком фракталов с размерностью, меньшей единицы, является их *ненаглядность* (в прямом смысле) Так, на рисунке, изображающим четвертую итерацию только что описанного фрактала, пришлось удалить большую часть желтого фона, чтобы можно было бы хоть что-то разглядеть. И это естественно – размерность-то меньше единицы, поэтому фрактал «меньше» («хуже», «тоньше»…) линии.

Нечто подобное, должно быть, изобразил однажды всем известный персонаж шведской писательницы Астрид Лингрен:


A
B
C


A
B
C



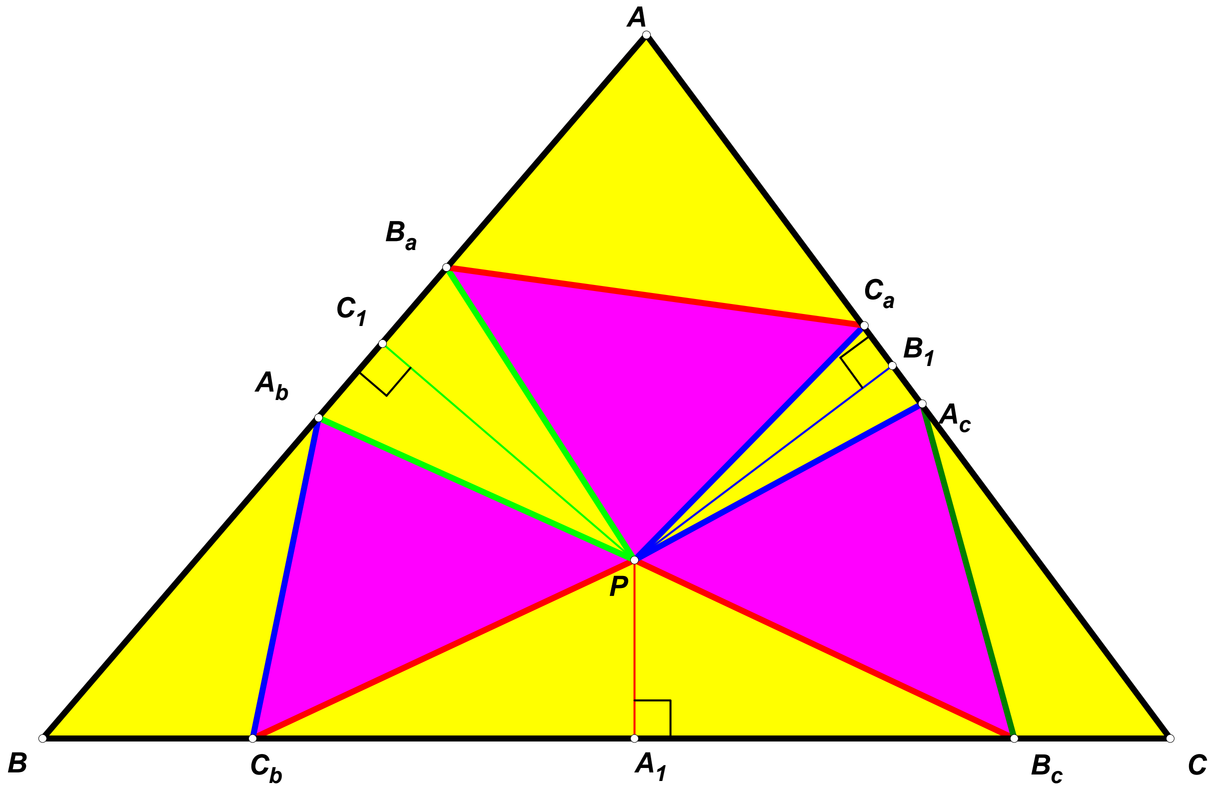
Малыш вновь огляделся по сторонам.
- Ну, а где твои картины с петухами? Они что, тоже взорвались? - язвительно спросил он Карлсона.
- Нет, они не взорвались, - ответил Карлсон. - Вот, гляди. - И он указал на пришпиленный к стене возле шкафа лист картона.
На большом, совершенно чистом листе в нижнем углу был нарисован крохотный красный петушок.
- Картина называется: "Очень одинокий петух", - объяснил Карлсон.
Малыш посмотрел на этого крошечного петушка. А ведь Карлсон говорил о тысячах картин, на которых изображены всевозможные петухи, и все это, оказывается, свелось к одной красненькой петухообразной козявке!
- Этот "Очень одинокий петух" создан лучшим в мире рисовальщиком петухов, - продолжал Карлсон, и голос его дрогнул. - Ах, до чего эта картина прекрасна и печальна!..

8. *Фрактал трех равных треугольников.*

Сразу предупредим читателя, что математическая часть этого пункта существенно отличается от остальных – для ее понимания следует владеть такими понятиями, как *трилинейные координаты, изогональное и изотомическое сопряжения.*

Всю необходимую информацию, однако, можно извлечь из [5],[8]-глава14, §6.

Итак, попробуем найти *трилинейные координаты* точки P (то-есть, с точностью до общего множителя, длины перпендикуляров, опущенных из точки на стороны треугольника), обладающей следующим свойством: эта точка порождает три одинаковых треугольника, вписанных в исходный треугольник ABC и *обратно* ему *подобных*: $\Delta PB_aC_a \sim \Delta A_bPC_b \sim \Delta A_cB_cP \sim \Delta ABC$ - с одним и тем же коэффициентом подобия k. (Обратное подобие означает, что соответствующие подобные треугольники по-разному *ориентированы*. К примеру, если направление обхода вершин треугольника A-B-C противоположно движению часовой стрелки, то направление обхода соответствующих вершин ему подобного треугольника *P*-B_a-C_a совпадает с движением часовой стрелки – и т.д.).



Введем обозначения:
$\angle A=\alpha;\angle B=\beta;\angle C=\gamma;\angle C_bPB_c=\varphi_\alpha;\angle C_aPA_c=\varphi_\beta;\angle B_aPA_b=\varphi_\gamma$ и h_a,h_b,h_c - перпендикуляры к сторонам *BC, AC, AB* .

С учетом того, что $PC_b=PB_c$, мы имеем $\angle PB_cC_b=\dfrac{\pi-\varphi_\alpha}{2}$. Воспользовавшись также и тем, что $\angle PB_cA_c=\beta$, получим $\angle A_cB_cC=\dfrac{\pi+\varphi_\alpha}{2}-\beta$. Из тех же соображений, $B_cA_cC=\dfrac{\pi+\varphi_\beta}{2}-\alpha$.

А так как суммы углов треугольников B_cA_cC и ABC равны π, найдем, что $\dfrac{\varphi_\alpha+\varphi_\beta}{2}=\pi-2\gamma$. Но $\varphi_\alpha+\varphi_\beta+\varphi_\gamma=\pi\Rightarrow\varphi_\gamma=4\gamma-\pi$.

Аналогично, $\varphi_\alpha=4\alpha-\pi$; $\varphi_\beta=4\beta-\pi$.

Отметим, что при выводе этих соотношений мы получили ограничения на углы исходного треугольника: $\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{4}<\beta<\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{4}<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$. Очевидно, *в случае других значений углов*, мы также пришли бы к трем одинаковым треугольникам, но только *некоторые вершины этих треугольников лежали бы на продолжениях сторон исходного треугольника и некоторые треугольники имели бы непустое пересечение.*

Наконец, $PC_b=ka\Rightarrow h_a=ka\cos\dfrac{\varphi_\alpha}{2}=ka\sin 2\alpha\sim a^2\cos\alpha$.

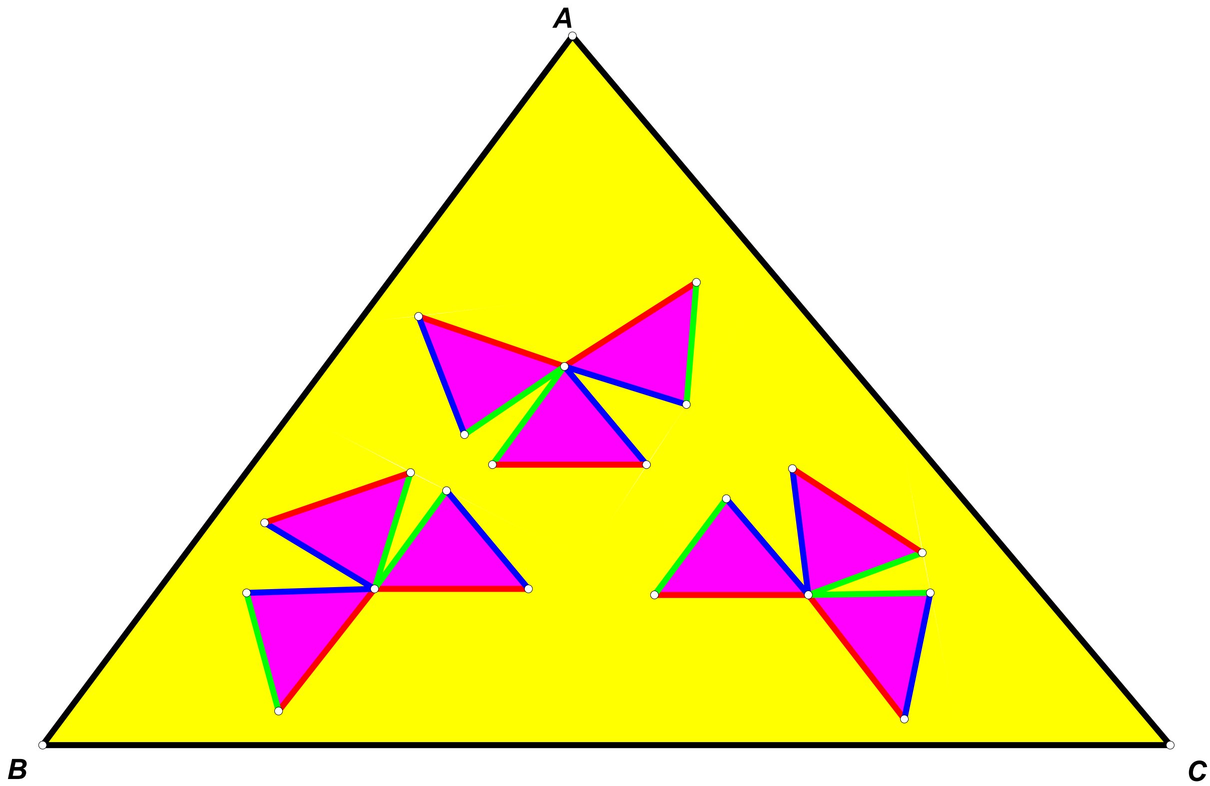
Другие перпендикуляры определяются аналогично, и потому трилинейные координаты P имеют следующий вид: ($a^2\cos\alpha : b^2\cos\beta : c^2\cos\gamma$).

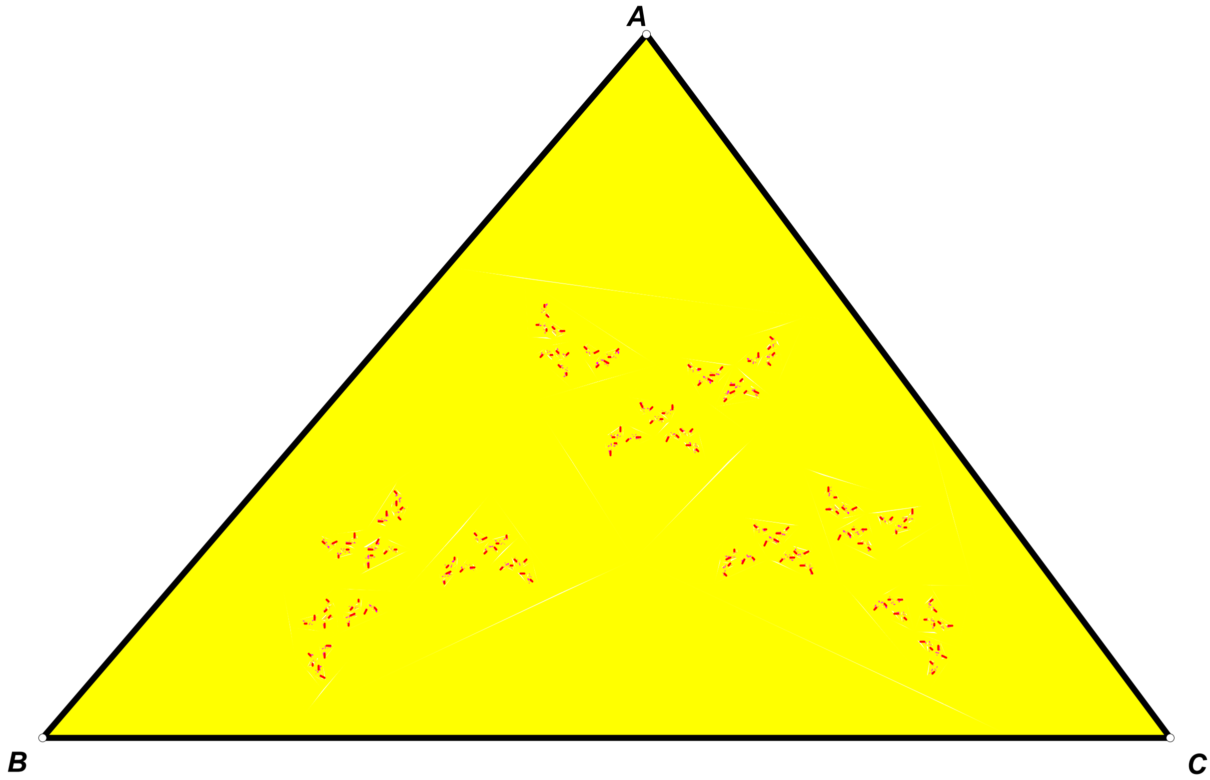
Поскольку координаты центра описанной окружности - $(\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma)$, его изотомического образа -$(\frac{1}{a^2\cos A} : \frac{1}{b^2\cos B} : \frac{1}{c^2\cos C})$, и изогонального образа этой точки - $(a^2\cos\alpha : b^2\cos\beta : c^2\cos\gamma)$, мы доказали, что *$P$ является изогональным образом изотомического образа центра описанной окружности O.*

Теперь мы готовы построить наш фрактал.

Возьмем треугольник T_0 с углами $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{4} < \gamma < \frac{\pi}{2}$. Чтобы построить вершины трех одинаковых треугольников, подобных T_0, сначала мы строим, описанным выше способом, точку P, затем проводим перпендикуляр h_a и две симметричные прямые, проходящие через P и образующие углы $2\alpha - \frac{\pi}{2}$ с h_a – и т.д.

Более подробные сведенья о конструкции, связанной со вписанными и равными подобными треугольниками, заинтересовавшийся ею читатель найдет в статье [7] (где рассмотрены случаи всевозможного подобия, а не только одного лишь обратного).





Размерность d_0 фрактала удовлетворяет условию $d_0 = \dfrac{\ln \frac{1}{3}}{\ln k}$, где k - коэффициент подобия.

Остается лишь определить значение k.

Ясно, что $2S = ah_a + bh_b + ch_c$, где S – площадь треугольника ABC.

С учетом того, что $h_a = ka \sin 2\alpha$ (и еще два похожих равенства для других перпендикуляров), получим, что $k = \dfrac{2S}{a^2 \sin 2\alpha + b^2 \sin 2\beta + c^2 \sin 2\gamma}$.

Но это выражение можно привести к гораздо более симпатичному виду, а именно:

$k = \dfrac{1}{3 - \left(\dfrac{OH}{R}\right)^2}$ (где R – радиус описанной окружности, O – центр описанной окружности, и H – ортоцентр).

При выводе используем следующие известные соотношения для углов треугольника (они имеются в [8]-глава 12, но в их справедливости легко убедиться самостоятельно):

$S = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma; a^2 = 4R^2 \sin^2\alpha; \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma;$

$\sin 4\alpha + \sin 4\beta + \sin 4\gamma = -4 \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma; \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$

и $a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma) = 9R^2 - OH^2$.

Стало быть,

$$a^2 \sin 2\alpha + b^2 \sin 2\beta + c^2 \sin 2\gamma = 2R^2\big((1-\cos 2\alpha)\sin 2\alpha + (1-\cos 2\beta)\sin 2\beta + (1-\cos 2\gamma)\sin 2\gamma\big)$$

$$= 2R^2(4\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma + 2\sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma) = 8R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma(1 + 4\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma)$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + 4\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma}.$$

Но

$$1+4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1+2((\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)-2)=\frac{9-\left(\frac{OH}{R}\right)^2}{2}-3=\frac{3-\left(\frac{OH}{R}\right)^2}{2}.$$

Поэтому $k \geq \frac{1}{3} \Rightarrow d_0 \geq 1$. (И $d_0 = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{3} \Leftrightarrow O = H$, то-есть треугольник ABC - правильный).

.

Литература:

[1] С. Божкин, Д. Паршин. Фракталы и мультифракталы. Москва-Ижевск, 2001.
[2] Я. Дубнов. Ошибки в геометрических доказательствах. Москва, 1961.
Имеется электронная копия:
http://ilib.mirror1.mccme.ru/plm/djvu/v11/directory.djvu

[3] Д. Ефремов. Новая геометрия треугольника. Одесса, 1902.
Имеется электронная копия:
http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/ngt/ngt.djvu
[4]. Д. Келли. Общая топология. Москва. 1981.
[5]. C. Kimberling. Triangle Centers and Central Triangles. Winnipeg, 1998.
[6]. Б. Мандельброт. Фрактальная геометрия природы. Москва, 2002.
[7]. A. Myakishev. On the circumcenter and related points.

(В электронном журнале «Forum Geometricorum» - http://forumgeom.fau.edu/)

Статья доступна по ссылке:
http://forumgeom.fau.edu/FG2003volume3/FG200302index.html
[8]. В. Прасолов. Задачи по планиметрии. МЦНМО, 2007.
[9]. М. Шредер. Фракталы, хаос, степенные законы. Москва-Ижевск, 2001.