

## Прямая Симсона в задачах

1.  $BH$ ,  $BL$  — высота, биссектриса остроугольного треугольника  $ABC$  соответственно.  $P$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $A$  на  $BL$ ;  $Q$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $L$  на сторону  $BC$ . Докажите, что точки  $H$ ,  $P$ ,  $Q$  лежат на одной прямой.
2.  $AE$  — биссектриса равнобедренного треугольника  $ABC$  ( $AB = BC$ ). Диаметр  $EO$  описанной окружности треугольника  $AEC$  пересекает биссектрису угла  $ACB$  в точке  $L$ . Докажите, что  $L$  лежит на средней линии треугольника  $AEC$ .
3. Окружность  $\omega$ , центр которой лежит на серединном перпендикуляре к стороне  $AC$  треугольника  $ABC$ , касается стороны  $BC$  в точке  $A_0$ , а продолжения стороны  $AB$  за точку  $B$  — в точке  $C_0$ . Докажите, что прямая  $A_0C_0$  проходит через середину стороны  $AC$ .
4. Пусть  $A_0$  и  $C_0$  — точки касания вписанной окружности со сторонами  $BC$  и  $BA$  треугольника  $ABC$ ,  $K$  — точка пересечения биссектрисы угла  $A$  с прямой  $A_0C_0$ . Докажите, что  $\angle AKC = 90^\circ$ .
5. а) Окружность ( $I$  — центр), вписанная в треугольник  $ABC$ , касается сторон  $AB$ ,  $BC$  в точках  $C_0$  и  $A_0$  соответственно. Окружность, проходящая через точки  $B$  и  $I$ , пересекает стороны  $AB$  и  $BC$  в точках  $X$  и  $Y$ . Докажите, что середина отрезка  $XY$  лежит на прямой  $A_0C_0$ .  
б) На стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  отметили произвольную точку  $D$ . Точки  $E$  и  $F$  симметричны точке  $D$  относительно биссектрис углов  $A$  и  $C$  соответственно. Докажите, что середина отрезка  $EF$  лежит на прямой  $A_0C_0$ , где  $A_0$  и  $C_0$  — точки касания вписанной окружности треугольника  $ABC$  со сторонами  $BC$  и  $AB$  соответственно.  
в) На биссектрисе угла  $ABC$  зафиксирована точка  $F$ . Рассматриваются равнобедренные треугольники  $A_1FC_1$ ,  $A_1 \in AB$ ,  $C_1 \in BC$ . Найдите ГМТ середин  $A_1C_1$ .
6. В треугольнике  $ABC$  угол  $B$  равен  $60^\circ$ . Пусть  $AA_1$  и  $CC_1$  — биссектрисы этого треугольника. Докажите, что точка, симметричная вершине  $B$  относительно прямой  $A_1C_1$ , лежит на стороне  $AC$ .