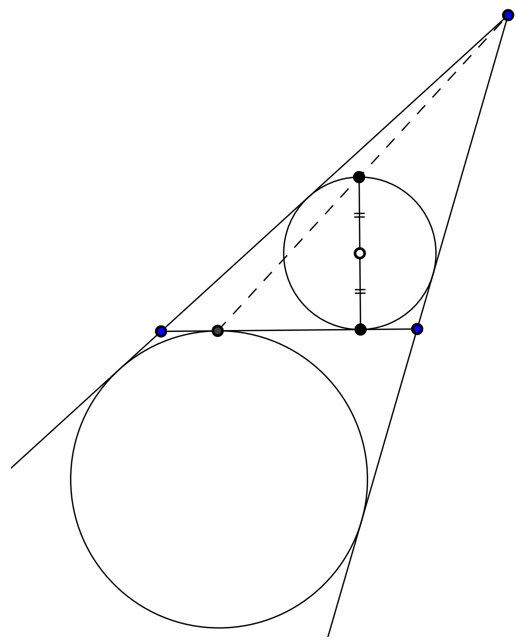
Лемма о вписанной окружности

В сюжете можно проследить как одна олимпиадная задача(№1 в списке), ставшей классической, помогает решить целую серию трудных задач.

`Замечание.` Для решения ряда задач необходимо знакомство с *гомотетией*.

1. а) Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны AC в точке D, DM – её диаметр. Прямая BM пересекает сторону AC в точке K. Докажите, что $AK = DC$. [1]

б) В треугольнике ABC через середину M стороны BC и центр I вписанной в этот треугольник окружности проведена прямая MI, которая пересекает высоту AH в точке E. Докажите, что отрезок AE равен радиусу вписанной окружности.



2. а) Вписанная окружность $\triangle ABC$ касается стороны BC в точке A_0. I_a — центр вневписанной окружности; M — середина стороны BC. Докажите, что $AA_0 || MI_a$.

б) I_a, I_b, I_c — центры вневписанных окружностей; A_0, B_0, C_0 — середины сторон $\triangle ABC$. Докажите, что прямые I_aA_0, I_bB_0, I_cC_0 конкурентны.

3 (прямая Нагеля). A_1, B_1, C_1 — точки касания вневписанных окружностей со сторонами. Из теоремы Чевы следует, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке(*точка Нагеля*). Докажите, что точка пересечения медиан, точка Нагеля и инцентр $\triangle ABC$ лежат на одной прямой. [2]

4. Постройте треугольник, если даны центр вписанной в него окружности, середина одной из сторон и оснвание опущенной на эту сторону высоты.

5 (IMO 1992). In the plane let ω be a circle, l a line tangent to the circle ω, and M a point on l. Find the locus of all points P with the following property: there exists two points Q, R on l such that M is the midpoint of QR and ω is the inscribed circle of triangle PQR.

[1] Если решение этой задачи вызывает затруднение, то почитайте статью Г. Б. Филлиповского "Замечательная прямая треугольника"(доступно тут).

[2] Найдите тут треугольники с параллельными сторонами и используйте гомотетию.

6. Вневписанная окружность касается стороны BC в точке A_1. Прямая AA_1 второй раз пересекает вписанную окружность в точке P. M — середина стороны BC. Докажите, что PM касается вписанной окружности.

7 (Турнир Городов). Дан треугольник ABC. В нем H — точка пересечения высот, I — центр вписанной окружности, O — центр описанной окружности, K – точка касания вписанной окружности со стороной BC. Известно, что отрезки IO и BC параллельны. Докажите, что отрезки AO и HK параллельны.

8. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Окружность ω_1 касается основания BC в точке M и продолжений сторон AB и CD за точки B и C; окружность ω_2 касается основания AD в точке N и продолжений сторон AB и CD за точки A и B. Докажите, что отрезок MN проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

9. На хорде AC окружности ω выбрали точку B. На отрезках AB и BC как на диаметрах построили окружности ω_2 и ω_2 с центрами O_1 и O_2, которые пересекают ω второй раз в точках D и E соответственно. Лучи O_1D и O_2E пересекаются в точке F. Лучи AD и CE пересекаются в точке G. Докажите, что прямая FG проходит через середину AC.

10. а) In a triangle ABC satisfying $AB + BC = 3AC$ the incircle has centre I and touches the sides AB and BC at D and E, respectively. Let K and L be the symmetric points of D and E with respect to I. Prove that the quadrilateral $ACKL$ is cyclic.

б) Для такого треугольника точка Нагеля лежит на его вписанной окружности. Почему?

11. Пусть A_1, B_1, C_1 — середины сторон треугольника ABC, I — центр вписанной в него окружности. C_2 — точка пересечения прямых C_1I и A_1B_1, C_3 — точка пересечения прямых CC_2 и AB. Докажите, что прямая IC_3 перпендикулярна прямой AB.

12 (IMO-shortlist, 2002). The incircle ω of ABC touches its side BC in K. Let M be the midpoint of the altitude AD in ABC, and let the line KM meet ω for the second time in N . Show that the circumcircle of BCN touches ω.

а) Пусть L – точка касания вневписанной окружности; I_a — её центр; P – четвёртая вершина прямоугольника KLI_aP. Тогда $BK \cdot KC = IK \cdot KP$;

б) $IK \cdot KP = OK \cdot KN$, где O — центр прямоугольника ;

в) точка O лежит на описанной окружности треугольника BCN;

г) O — середина дуги BOC;

д) используя лемму Архимеда наоборот, докажите касание нужных окружностей.

Если Вам понравилась последняя задача, то рекомендуем посмотреть сюжет о сложной и очень красивой задаче Ивлева [3].

[3] Доступно по адресу: http://geometry.ru/articles.htm#ivlevromania