

Изогональное сопряжение

1. Отразим прямые AQ , BQ , CQ относительно соответствующих биссектрис. Полученные прямые вновь будут конкурентны.

Обозначим точку из предыдущей задачи через Q' . Тогда точки Q и Q' называю *изогонально сопряжёнными*.

2. Ортоцентр и центр описанной окружности изогонально сопряжены.

3. Во что переходят точки описанной окружности при изогональном сопряжении?

4. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C пересекаются в точке P . Точка Q симметрична точке A относительно середины отрезка BC . Докажите, что точки P и Q изогонально сопряжены.

5. Высоты AA_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Точка B_0 — середина стороны AC . Докажите, что точка пересечения прямых, симметричных BB_0 и HB_0 относительно биссектрис углов ABC и AHC соответственно, лежит на прямой A_1C_1 .

6. Докажите, что при изогональном сопряжении окружность, проходящая через вершины B и C и отличная от описанной окружности, переходит в окружность, проходящую через вершины B и C .

7. AA_0 , BB_0 , CC_0 — высоты треугольника ABC , H — ортоцентр, M — произвольная точка. A_1 — точка симметричная M относительно BC ; аналогично определим точки B_1 , C_1 . Докажите, что прямые A_0A_1 , B_0B_1 , C_0C_1 конкурентны.

8. Из некоторой точки P опущены перпендикуляры PA_1 и PA_2 на сторону BC треугольника ABC и на высоту AA_3 . Аналогично определяются точки B_1 , B_2 и C_1 , C_2 . Докажите, что прямые A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке или параллельны.

9. В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна основаниям, O — точка пересечения диагоналей. На описанной окружности треугольника OCD взята точка S , диаметрально противоположная точке O . Докажите, что $\angle BSC = \angle ASD$.

10 (extra bonus). Стороны треугольника ABC видны из точки T под углами 120° . Докажите, что прямые, симметричные прямым AT , BT и CT относительно прямых BC , CA и AB соответственно, пересекаются в одной точке.