Высоты и степень точки

1. Докажите, что высоты пересекаются, используя степень точки.

2. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Прямые AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 пересекаются в точках C', A' и B'.

а) Д/ч точки A', B' и C' лежат на радикальной оси окружности девяти точек и описанной окружности.

б) Биссектрисы внешних углов треугольника ABC пересекают продолжения противоположных сторон в точках A', B' и C'. Д/ч точки A', B' и C' лежат на одной прямой, причем эта прямая перпендикулярна прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC

3. На сторонах BC и AC треугольника ABC взяты точки A_1 и B_1; l – прямая, проходящая через общие точки окружностей с диаметрами AA_1 и BB_1. Д/ч прямая l проходит через точку H пересечения высот треугольника ABC.

4. Продолжения сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке F, а продолжения сторон BC и AD – в точке E. Д/ч окружности с диаметрами AC, BD и EF имеют общую радикальную ось, причем на ней лежат ортоцентры треугольников ABE, CDE, ADF и BCF.

5. Докажите, что три окружности, каждая из которых проходит через вершину треугольника, основание его высоты, опущенной из этой вершины, и касается радиуса описанной окружности, проведенного к данной вершине, пересекаются в двух точках, расположенных на прямой Эйлера треугольника.

6. M — произвольная точка плоскости AH, BK и CL — высоты треугольника ABC. Докажите, что описанные окружности треугольников AHM, BKM и CLM пересекаются ещё в некоторой точке, отличной от точки M.

7. а) Докажите, что проекция ортоцентра на медиану, ортоцентр и две вершины треугольника лежат на одной окружности.

б)Высоты AA_1, CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Прямые A_1C_1 и AC пересекаются в точке K. Докажите, что прямая HK перпендикулярна медиане треугольника ABC.

в) Медианы AM_a, CM_b треугольника ABC ($\angle B = 120°$) пересекают описанную окружность в точках A', C'. A'' – точка, симметричная A' относительно точки M_a; C'' определяется аналогично. Докажите, что точки B, A'', C'', H лежат на одной окружности.

8. BH — высота остроугольного треугольника ABC; A_0, B_0, C_0 — середины сторон CB, AC, AB соответственно. Описанные окружности треугольников $AC'H$, $CA'H$ повторно пересекаются в точке L. Докажите, что $\angle CBL = \angle ABB'$.

9 (сюжет одной задачи). P — произвольная точка на высоте AD остроугольного треугольника ABC. Q, R — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны AB и AC. Прямые PQ, PR повторно пересекают прямую BC в точках S, T соответственно.

а) Докажите, что точки B, Q, R, C лежат на одной окружности.

б) И про точки Q, R, S, T докажите.

в) Пусть описанные окружности треугольников BQS, CRT пересекают прямую QR в точках X, Y соответственно. Докажите, что прямые SX, TY, AD конкурентны.

10. В остроугольном треугольнике ABC точка H — ортоцентр, O — центр описанной окружности, AA_1 , BB_1 и CC_1 — высоты. Точка C_2 симметрична C относительно A_1B_1. Докажите, что H, O, C_1 и C_2 лежат на одной окружности.

11. Окружность, проходящая через вершины A и C, треугольника ABC пересекает стороны AB, BC в точках A_1, C_1 соответственно; H, H_1 — ортоцентры треугольников ABC, A_1BC_1 соответственно. Докажите, что прямые AA_1, CC_1, HH_1 конкурентны.