# Задачи по геометрии
## А.Заславский

1. (Задачник "Кванта" М1807.).При каких $k$ можно разрезать треугольник на $k$ выпуклых многоугольников с попарно различным числом сторон?

   **Решение.** Пусть $m$ — наибольшее из чисел сторон многоугольников разбиения. Так как соответствующий многоугольник выпуклый, к границе треугольника примыкает не более 3 его сторон. В силу выпуклости остальных $k-1$ многоугольника каждый из них граничит не более чем с одной стороной $m$-угольника. Следовательно, $m \leq k+2$, и, значит, есть единственная возможность: треугольник разрезан на $k$ многоугольников с числом сторон от 3 до $k+2$.

   Так как $k+2$-угольник граничит с 3 сторонами исходного треугольника, $k+1$-угольник может граничить только с двумя из них. Следовательно, он должен граничить со всеми остальными многоугольниками. Аналогично, $k$-угольник может граничить лишь с одной стороной исходного треугольника и, значит, граничит со всеми остальными многоугольниками. Наконец, $k-1$-угольник не может граничить со сторонами треугольника (рис.1), так как в противном случае он не будет граничить с каким-то из трех предыдущих многоугольников, поэтому он граничит со всеми многоугольниками.

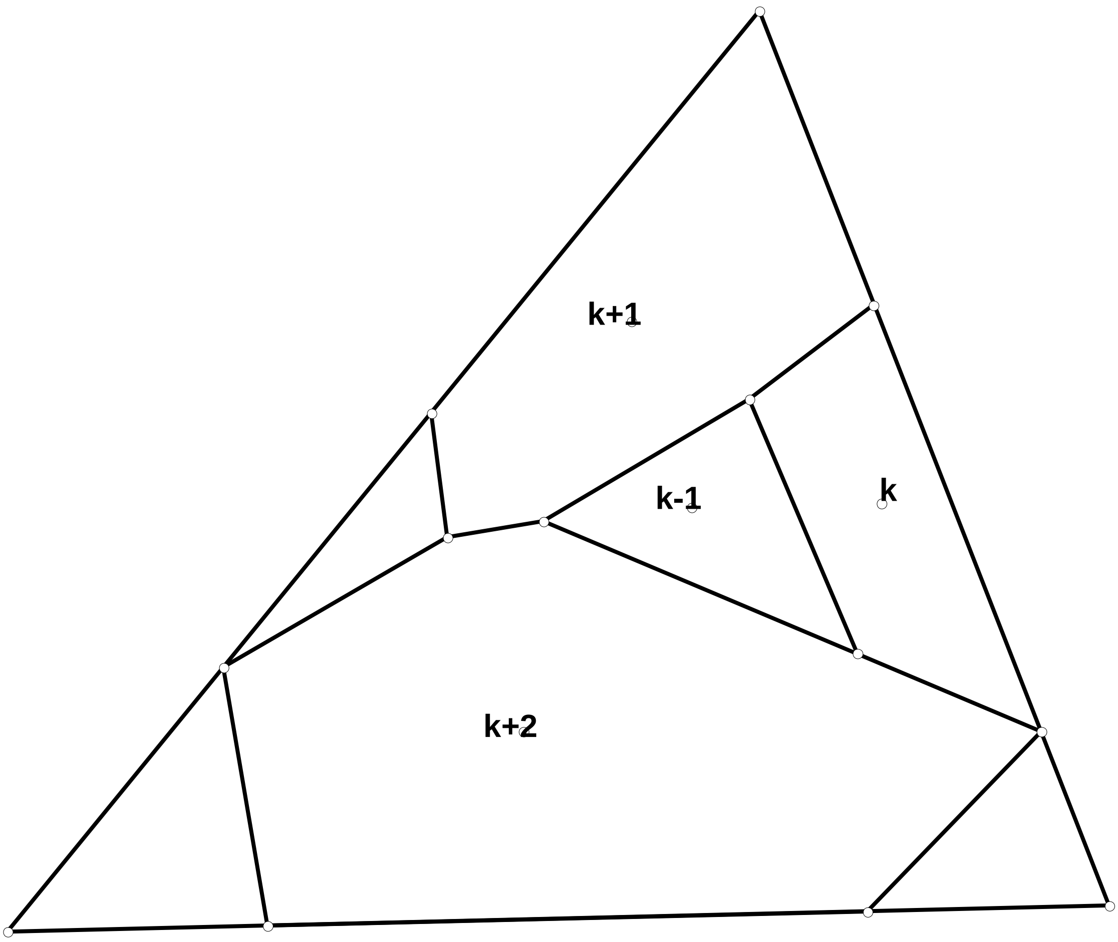


Рис.1

Таким образом при $k > 4$ пять многоугольников с наибольшим числом сторон попарно граничат друг с другом. Но на плоскости пять попарно граничащих областей существовать не могут, следовательно при $k > 4$ искомое разрезание невозможно. Примеры разрезания с $k = 4$ приведен на рис.2. Построение примеров для $k = 2, 3$ не представляет сложностей.

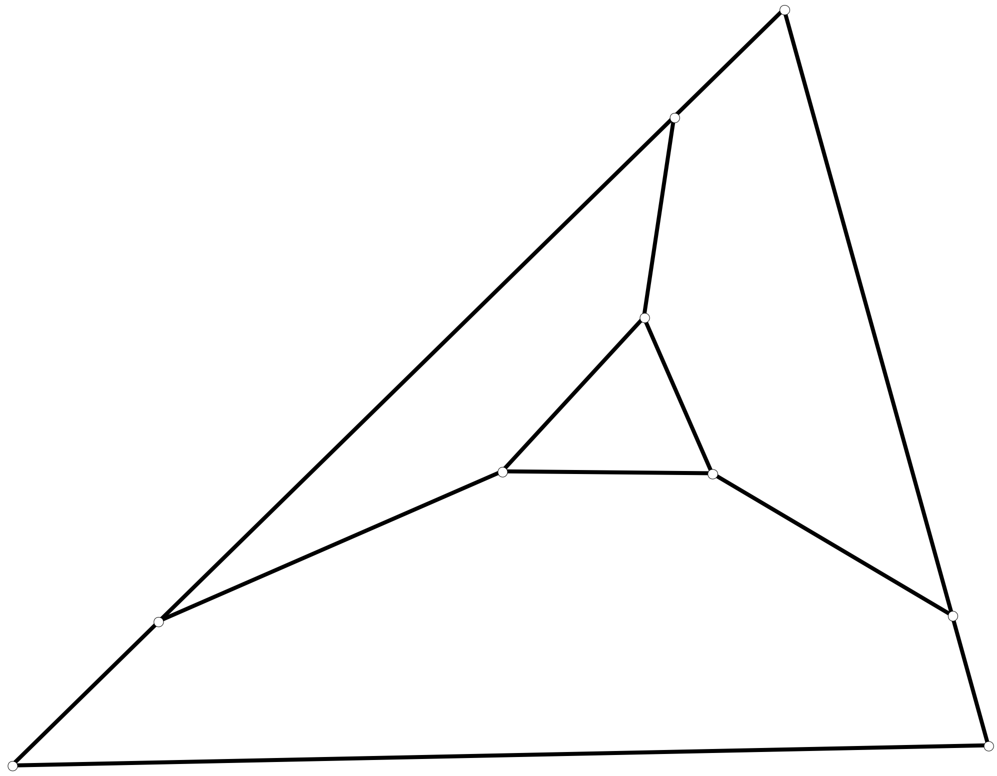

Рис.2

2. (Задачник "Кванта ?) Можно ли расположить в пространстве пять одинаковых кубов так, чтобы любые два из них имели общую диагональ, а никакие три — нет?

   **Ответ.** Да. Достаточно рассмотреть пять кубов, вписанных в додекаэдр.

3. Внутри выпуклого четырехугольника взяли точку, равноудаленную от противоположных сторон. Оказалось, что она лежит на прямой, соединяющей середины диагоналей. Доказать, что четырехугольник либо вписанный, либо описанный, либо трапеция.

   **Решение.** См. "Геометрические свойства кривых второго порядка задача 25.

4. (Всероссийская олимпиада, ?) В любом ли тетраэдре можно выбрать пару противоположных ребер так, чтобы шары, построенные на этих ребрах как на диаметрах, покрывали весь тетраэдр?

   **Решение.** Да. Возьмем пару ребер, сумма квадратов которых максимальна. Тогда их проекции на любое из остальных ребер перекрываются. Поэтому сферы пересекаются и плоскость, проходящая через линию их пересечения, пересекает каждое из этих четырех ребер в точке, принадлежащей обеим шарам. Эта плоскость разбивает тетраэдр на два выпуклых многогранника, у каждого из которых все вершины лежат внутри одного из шаров. Следовательно, каждый многогранник целиком покрывается соответствующим шаром.

5. (Московская математическая олимпиада, 2007) Стороны треугольника $ABC$ видны из точки $T$ под углами $120°$. Докажите, что прямые, симметричные $AT$, $BT$, $CT$ относительно соответствующих сторон треугольника, пересекаются в одной точке.

   **Решение.** Пусть $T_a$, $T_b$, $T_c$ — точки, симметричные $T$ относительно $BC$, $CA$, $AB$, соответственно; $T'$ — центр окружности, описанной около треугольника $T_aT_bT_c$. Так как $CT_a = CT = CT_b$, то $CT'$ является серединным перпендикуляром к $T_aT_b$ и биссектрисой угла $T_aCT_b$. Подсчёт углов при точке $C$ показывает, что прямые $CT$ и $CT'$ симметричны относительно биссектрисы угла $C$. Аналогично прямые $BT$ и $BT'$, $AT$ и $AT'$ симметричны относительно биссектрис соответствующих углов треугольника.

   Пусть теперь $T'_a$, $T'_b$, $T'_c$ — точки, симметричные $T'$ относительно $BC$, $CA$, $AB$; ! $T''$ — центр окружности, описанной около треугольника $T'_aT'_bT'_c$. Рассуждая, как выше, получаем, что ! прямые $CT'$ и $CT''$ симметричны относительно биссектрисы угла $C$, т.е. прямая $CT''$ совпадает с $CT$. Аналогично, $BT''$ совпадает с $BT$, $AT''$ с $AT$, т.е. точка $T''$ совпадает с $T$. При этом $AT$, $BT$, $CT$ являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника $T'_aT'_bT'_c$. По условию углы между этими прямыми равны $120°$. Значит, углы треугольника равны $60°$, т.е. треугольник — правильный. Следовательно, точки $T'_a$, $T'_b$, $T'_c$ лежат соответственно на прямых $AT$, $BT$, $CT$, а симметричные им прямые проходят через $T'$.

   Интересно, что утверждение задачи можно сформулировать так: если из точки $T$ выпустить с равными скоростями три биллиардных шарика в направлениях, противоположным вершинам треугольника, то, отразившись от сторон треугольника, шарики столкнутся. Действительно, пути, пройденные шариками до точки $T'$, равны отрезкам $TT'_a$, $TT'_b$, $TT'_c$, которые равны между собой.

6. (Московская устная олимпиада по геометрии, 2004.) Трапеция с основаниями $AB$ и $CD$ вписана в окружность. Доказать, что четырехугольник, образованный проекциями любой точки этой окружности на прямые $AC$, $BC$, $AD$, $BD$, вписанный.

   **Решение.** Пусть $P$ — точка на описанной вокруг трапеции окружности, $X$, $Y$, $Z$, $U$ — проекции $P$ на $AC$, $BC$, $BD$, $AD$, $X'$, $Y'$, $Z'$, $U'$ — точки, симметричные $P$ относительно этих прямых, $Q$ — точка, симметричная $P$ относительно оси симметрии трапеции (т.к. трапеция вписана в окружность, она равнобедренная). Так как четырехугольник $AXPU$ вписанный $\angle UXP = \angle UAP = \angle QAC$, т.е. прямая $AQ \perp UX$. Значит $AQ \perp U'X'$, и так как $AU' = AX'$, $AQ$ — серединный перпендикуляр к $X'U'$. Следовательно, $X'Y'Z'U'$ вписан в окружность с центром $Q$, а поскольку четырехугольник $XYZU$ гомотетичен $X'Y'Z'U'$, он также будет вписанным.

7. (Московская математическая олимпиада и Турнир городов, 2012) Дан треугольник $ABC$ и прямая $l$, касающаяся вписанной в него окружности. Обозначим через $l_a$, $l_b$, $l_c$ прямые симметричные $l$ относительно биссектрис внешних углов треугольника. Докажите, что треугольник, образованный этими прямыми, равен треугольнику $ABC$.

8. (А.Заславский, Б.Френкин, I Олимпиада им. Шарыгина) В остроугольном неравностороннем треугольнике отметили четыре точки: центры вписанной и описанной

окружностей, центр тяжести (точка пересечения медиан) и ортоцентр (точка пересечения высот). Затем сам треугольник стерли. Оказалось, что невозможно установить, какому центру соответствует каждая из отмеченных точек. Найдите углы треугольника.

**Ответ.** Треугольник, удовлетворяющий условию задачи, равнобедренный с углами при основании, равными $\arccos\frac{1}{4}$.

**Решение**. Пусть $ABC$ — исходный треугольник. Если точка $I$ (центр вписанной окружности) не лежит на его прямой Эйлера, то можно однозначно установить роль каждой из точек в треугольнике $ABC$. Отметим, что эта прямая проходит не более, чем через одну вершину треугольника, так что можно считать, что точки $A$ и $B$ не лежат на ней. Так как $\angle OBA = \angle HBC = \frac{\pi}{2} - \angle C$, $BI$ является биссектрисой угла $HBO$. Значит, точка $I$ лежит на отрезке $OH$, причем $OI = 2IH$ (иначе роль точек устанавливается однозначно). По свойству биссектрисы получаем, что $BO = 2BH$. Рассуждая аналогично, получим, что $AO = 2AH$. Таким образом, $AH = BH = R/2$, где $R$ — радиус описанной около  окружности. Заметим теперь, что $AH = 2OA_0$ (и эти отрезки параллельны). Понятно также, что $OA_0 = R\cos A$. Поэтому $AH = 2R\cos A$ и $\cos A = \frac{1}{4}$. Точно также доказывается, что $\cos B = \frac{1}{4}$.

9. (А.Заславский, И.Богданов) Пусть $I$ — центр вписанной окружности треугольника $ABC$; окружности $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ вписаны в треугольники $IBC$, $ICA$, $IAB$. Докажите, что общая внутренняя касательная к окружностям $\alpha$ и $\beta$, отличная от прямой $IC$, проходит через точку касания окружности $\gamma$ с прямой $AB$.

   **Решение.** См. http://www.geometry.ru/olimp/sharygin/2009/malfatti.pdf

10. (А.Заславский, В.Дубровский) Точки $A'$, $B'$, $C'$ на сторонах треугольника $ABC$ таковы, что прямые $AA'$, $BB'$, $CC'$ пересекаются в одной точке; $K$ — вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников $ABC$ и $A'B'C$. Докажите, что медиана треугольника $A'B'C$ из вершины $C$ и прямая $KC'$ пересекаются на описанной окружности треугольника $ABC$.

    **Решение.** См. статью В.Дубровского в Jcgeometry.org.

11. (И.Богданов, I Олимпиада им. Шарыгина) Сфера, вписанная в тетраэдр $ABCD$, касается его граней в точках $A'$, $B'$, $C'$, $D'$. Отрезки $AA'$ и $BB'$ пересекаются, и точка их пересечения лежит на вписанной сфере. Доказать, что отрезки $CC'$ и $DD'$ тоже пересекаются на вписанной сфере.

12. (J.-L.Aime, Франция, IV Олимпиада им. Шарыгина) На окружности $\omega$, описанной около треугольника $ABC$, взяты две точки $P$ и $Q$. Серединный перпендикуляр $l$ к отрезку $PQ$ пересекает прямые $BC$, $CA$, $AB$ в точках $A'$, $B'$, $C'$. Пусть $A$", $B$", $C$" — вторые точки пересечения $l$ с окружностями, описанными около треугольников $A'PQ$, $B'PQ$, $C'PQ$. Докажите, что прямые $AA$", $BB$", $CC$" пересекаются в одной точке.

13. (Н.Белухов, Болгария, V Олимпиада им. Шарыгина) Дан правильный 17-угольник $A_1 \dots A_{17}$. Докажите, что треугольники, образованные прямыми $A_1A_4$, $A_2A_{10}$, $A_{13}A_{14}$ и $A_2A_3$, $A_4A_6$ $A_{14}A_{15}$, равны.

14. (Д.Швецов, VIII Олимпиада им. Шарыгина) На стороне $BC$ квадрата $ABCD$ выбрали точку $M$. $X$, $Y$, $Z$ — инцентры треугольников $ABM$, $CMD$, $AMD$ соответственно; $H_x$, $H_y$, $H_z$ – ортоцентры треугольников $AXB$, $CYD$, $AZD$. Докажите, что точки $H_x$, $H_y$, $H_z$ лежат на одной прямой.