На трех параллельных прямых

Все начиналось с «классических» задач на тему «Поворот»:

а) Постройте равносторонний треугольник с вершинами на трех данных параллельных прямых;

б) Постройте квадрат, три вершины которого принадлежат трем данным параллельным прямым.

Постепенно появлялись альтернативные способы решения этих двух задач. А также стали встречаться другие задачи, в которых главным «действующим» лицом оказывались три параллельные прямые. Постепенно сложилась коллекция таких задач, которая может быть полезна как на уроке в математическом классе, так и во время работы спецкурса. С удовольствием выносим подборку задач с тремя параллельными прямыми на суд читателей!..

Задача 1.

Постройте равнобедренный треугольник *ABC (AC = AB)* с углом *BAC = α*, три вершины которого лежат на трех данных параллельных прямых.

Решение.

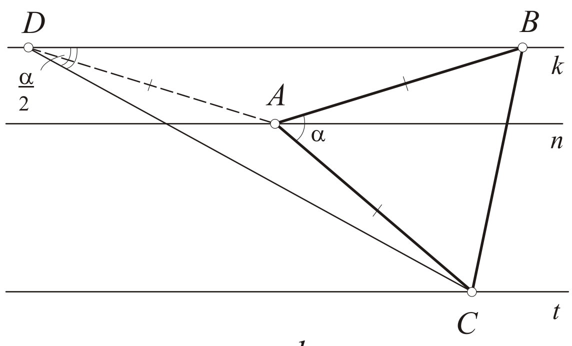

рис.1

Пусть равнобедренный ΔABC *(AC = AB)*, вершины которого лежат на параллельных прямых *k; n; t,* построен *(рис.1)*. Окружность с центром в точке *A* радиуса *AB = AC* пусть пересекает прямую *k* в точке *D*. Тогда $\angle BDC = \dfrac{\alpha}{2}$ (вписанный, равен половине соответствующего центрального угла *BAC = α*). При этом ΔDAC является равнобедренным, и серединный перпендикуляр к *DC* проходит через вершину *A*. Отсюда построение: из любой точки *D* к прямой *k* проводим луч под углом $\dfrac{\alpha}{2}$ к прямой *k*. Он пересечет прямую *t* в вершине *C*. После чего серединный перпендикуляр к *DC* в пересечении с прямой *n* дает вершину *A*. Засечка из *A* радиусом, равным *AC*, позволит получить на прямой *k* недостающую вершину *B*.

Задача 2.

Постройте равносторонний треугольник *ABC* с вершинами на трех данных параллельных прямых *k; n; t*.

Решение.

I способ. Эта задача – частный случай *задачи 1*, когда $\alpha = 60°$.

II способ *(классический)*. Осуществим поворот на угол $60°$ вокруг точки A по часовой стрелке. Тогда вершина B перейдет в C. Остается построить прямую k_1, являющуюся образом прямой k при повороте на $60°$ по часовой стрелке *(рис.2)*. Точка ее пересечения с прямой t совпадает с вершиной C. Дальнейшее очевидно.

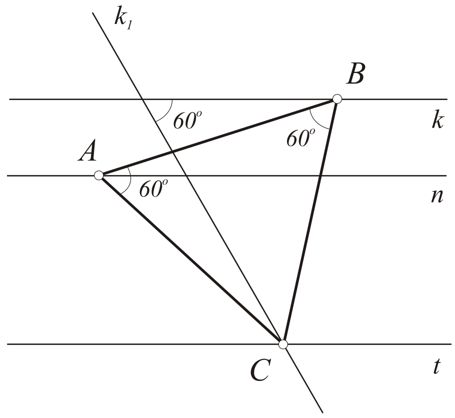

рис.2

Задача 3. Постройте треугольник с углами $30°$, $60°$, $90°$, вершины которого лежат на трех данных параллельных прямых.

Решение. Пусть $A = 90°$; $B = 60°$; $C = 30°$ и $k; n; t$ – три данные параллельные прямые *(рис.3)*. Анализ показывает, что если мы построим прямую q, параллельную данным и находящуюся на равных расстояниях от k и t, то точка Q – середина гипотенузы BC – будет принадлежать q. При этом, очевидно, ΔABQ – равносторонний. Остается построить равносторонний ΔABQ с вершинами на параллельных прямых $k; n; q$ *(задача 2)* и продлить BQ до пересечения с прямой t в недостающей вершине C.

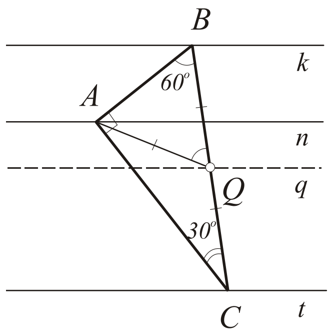

рис.3

Задача 4. Постройте квадрат $ABCD$, три вершины которого лежат на трех данных параллельных прямых $k; n; t$.

Решение.

I способ. Решение аналогично тому, как это сделано в *задаче 1*. Опишем его.

Анализ показывает, что окружность с центром в A радиуса AB пересекает прямую k в точке K такой, что $\angle BKD = 45°$ (вписанный, равен половине угла BAD) – *рис.4*. Тогда из произвольной точки $K \in k$ проводим луч под углом $45°$ к этой прямой. Он пересечет t в вершине D. Серединный перпендикуляр к отрезку KD позволит получить вершину $A \in n$. Дальнейшее очевидно!

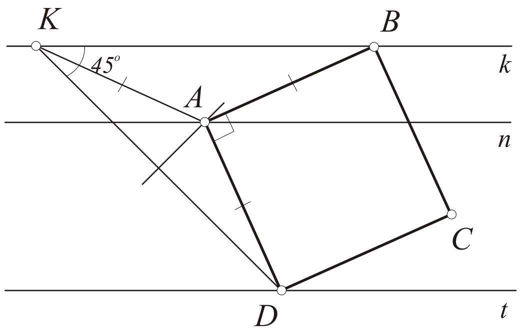

рис.4

II способ – классический.

При повороте вокруг точки $A \in n$ на $90°$, например, по часовой стрелке, вершина B перейдет в вершину D. Тогда прямая k_1 – образ прямой k при таком повороте вокруг точки A – пересечет прямую t в вершине D *(рис.5)*. Причем AD – сторона искомого квадрата.

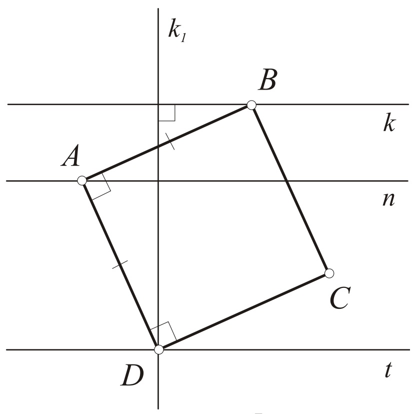

рис.5

III способ.

Анализ показывает, что $\Delta ABE = \Delta DAF$ – по гипотенузе и острому углу *(рис.6)*. Отложив $AF = BE$ (BE – расстояние между k и n) и проведя из F перпендикуляр к прямой t, получим вершину D квадрата $ABCD$.

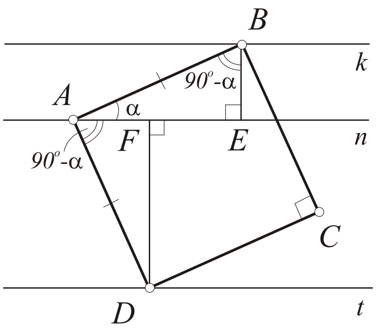

рис.6

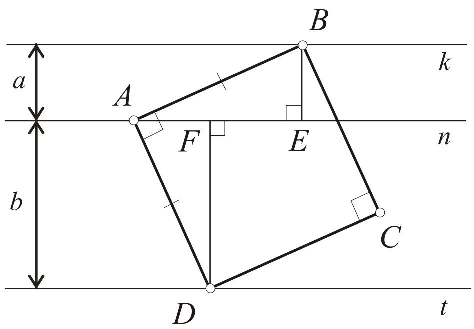

рис.7

Задача 5.

Три вершины квадрата лежат на трех параллельных прямых, расстояния между которыми равны a и b *(рис.7)*. Найдите сторону квадрата.

Решение.

Как было показано в *задаче 4 (III способ)*, $BE = AF = a$ и $FD = b$. Тогда из ΔAFD по теореме Пифагора $AD = \sqrt{AF^2 + FD^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Задача 6.

F – точка в плоскости, где расположены три параллельные прямые $k; n; t$. Проведите через F прямую, чтобы разность длин высекаемых отрезков между соседними параллельными прямыми была равна данному отрезку a.

Решение.

Анализ показывает, что если провести прямую q параллельно данным – на расстоянии от n, равном расстоянию от k до n *(рис.8),* то искомая прямая пересечет q в точке Q такой, что $QT = a$ (поскольку $QN = KN$). Тогда строим прямую q. Затем из произвольной ее точки (например, D) делаем засечку на прямой t раствором циркуля, равным a. Получим отрезок $DE = a$. Прямая, проведенная через F параллельно DE, даст требуемое:
$NT - KN = NT - QN = QT = DE = a$.

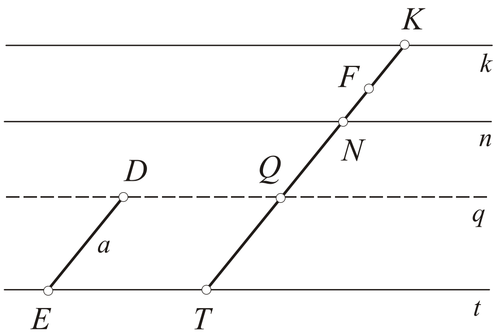

рис.8

Задача 7.

Через вершины треугольника *ABC* проведены параллельные друг другу прямые *k; n; t*, встречающие описанную около треугольника *ABC* окружность соответственно в точках *K; N; T (рис.9)*. Докажите, что $\Delta KNT = \Delta ABC$.

<u>*Доказательство.*</u> Поскольку $\cup AN = \cup KB$, а $\cup BT = \cup NC$ (дуги, заключенные между параллельными хордами, равны), то *AC* = *KT* – как хорды, стягивающие равные дуги. Аналогично, *AB* = *KN* (так как $\cup A-K-B = \cup N-A-K$). Точно так же *BC* = *NT* (что следует из равенства $\cup B-T-C$ и $\cup N-C-T$). Тогда $\Delta ABC = \Delta KNT$ – по трем сторонам.

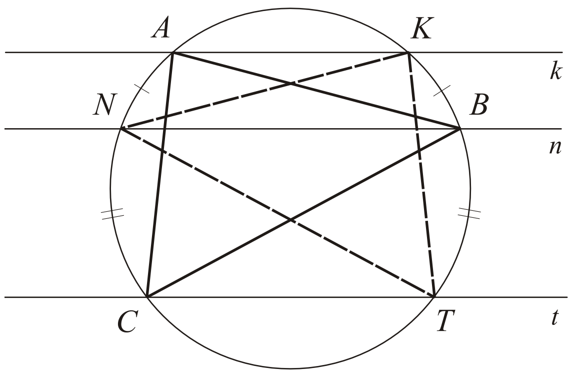

рис.9

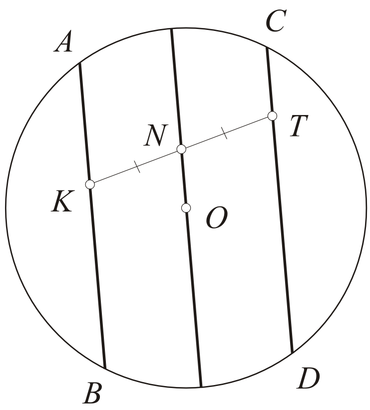

рис.10

Задача 8.

Внутри окружности с центром *O* даны точки *K* и *T*. Провести через указанные точки три параллельные хорды, чтобы две из них были равны.

<u>*Решение.*</u>

Соединим *K* и *T* и найдем середину отрезка *KT* – точку *N (рис.10)*. Прямая *NO,* содержащая диаметр окружности, определит направление хорд. Хорды *AB* и *CD,* проведенные параллельно *NO* через *K* и *T* соответственно, будут равны – как хорды, равноудаленные от центра окружности *(покажите!)*.

Задача 9.

Через три данные точки проведите три параллельные прямые, чтобы расстояния между ними были равны. Сколько решений имеет задача?

<u>*Решение.*</u>

Если данные точки *K; N; T* лежат на одной прямой и при этом *KN* = *NT*, то подойдут любые три параллельные прямые *k; n; t (рис.11)*. Очевидно, если $KN \neq NT$ (точки *K; N; T* по-прежнему лежат на одной прямой), то необходимые прямые провести невозможно.

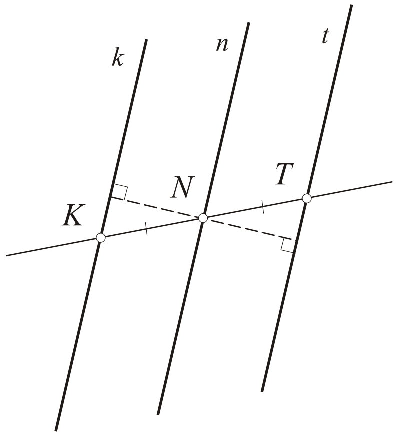

рис.11

Рассмотрим случай, когда точки *K; N; T* не лежат на одной прямой. Тогда, соединив их, получим ΔKNT. Из вершины *N* проведем луч *n*, совпадающий с медианой *NE* треугольника *NTK (рис.12).* Прямые *k* и *t*, проведенные параллельно *n* через точки *K* и *T* соответственно, будут искомыми. Действительно, $KK_1 = TT_1$ – это следует из равенства ΔKK_1E и ΔTT_1E.

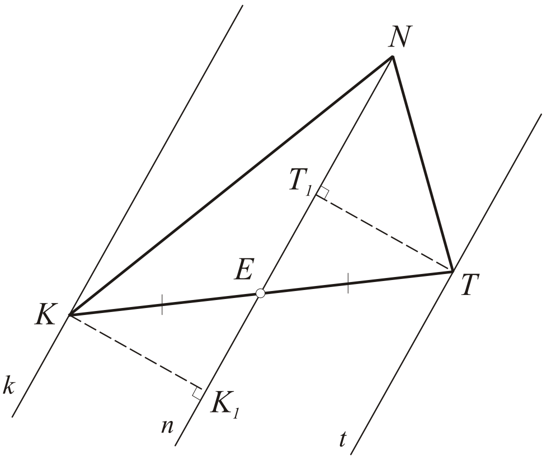

рис.12

Поскольку первую медиану можно провести из *K* или *T*, то в этом случае задача имеет три решения. Покажите самостоятельно, что других решений нет.

Задача 10.

От трех параллельных прямых *k; n; t* остались *n* и *t*, а также точка $K \in k$. Пользуясь только линейкой, восстановите прямую *k*.

<u>*Решение.*</u>

Из произвольной точки *A* прямой *t* проведем луч *AK*, который остановим в произвольной точке *B* (за точкой *K*) – *рис.13*. Произвольный луч из *B* пересечет прямую *t* в точке *C*. При этом $D = AB \cap n$ и $E = BC \cap n$. Проводим *AE* и *CD*, пересекающиеся в точке *F*. Тогда *BF* – согласно так называемой *лемме о трапеции* пройдет через середины отрезков *AC* и *DE*. Пусть $P = KE \cap BF$. Проведем *DP* до пересечения с *BC* в точке *Q*. Тогда $KQ \parallel n$ – покажите!

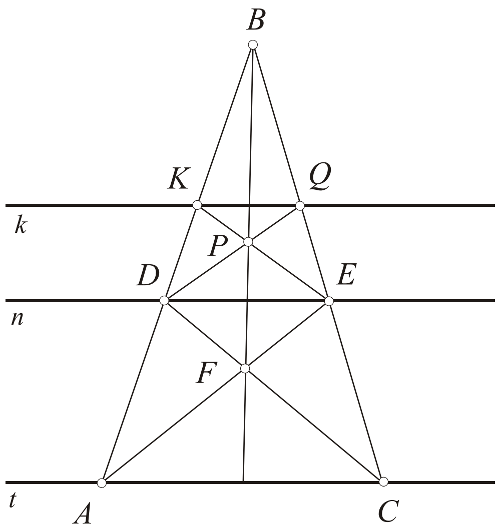

рис.13

Задача 11.

Прямые *k; n; t* параллельны. Точки $K \in k$ и $N \in n$ выбраны произвольно. Из этих точек проведены перпендикуляры KK_1 и NN_1 к прямой *t*. $E = KN_1 \cap NK_1$ и $EF \perp t$ *(рис.14).* Докажите, что длина отрезка *EF* не зависит от положения точек *K* и *N* соответственно на прямых *k* и *n*.

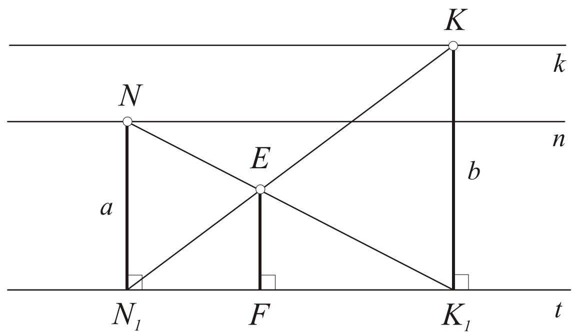

рис.14

<u>*Доказательство.*</u>

Пусть $NN_1 = a$ и $KK_1 = b$. Из подобия ΔEK_1F и ΔNK_1N_1: $\frac{EF}{a} = \frac{FK_1}{N_1K_1}$ *(1)*. Аналогично $\frac{EF}{b} = \frac{N_1F}{N_1K_1}$ *(2)* – из подобия ΔEFN_1 и ΔKK_1N. Сложив левые и правые части равенств *(1)* и *(2)*, получаем: $\frac{EF}{a} + \frac{EF}{b} = 1$, откуда $EF = \frac{ab}{a+b}$. Таким образом, длина отрезка *EF* зависит только от расстояния между прямыми *n* и *t; k* и *t*.

Задача 12.

Через вершины треугольника *ABC* проведены три параллельные прямые *k; n; t* соответственно. Они пересекают прямые *BC; AC* и *AK* в точках *K; N; T*. Найдите отношение площадей ΔKNT и ΔABC.

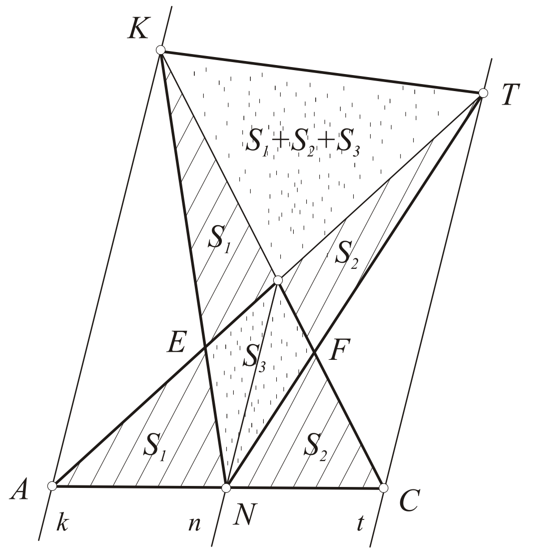

рис.15

Решение.

Пусть $E = AB \cap KN$ и $F = BC \cap NT$ *(рис.15)*. Поскольку *AKBN* – трапеция, то $S_{AEN} = S_{BEK} = S_1$ (треугольники, прилегающие к боковым сторонам трапеции, равновелики). Аналогично *BTCN* – трапеция и $S_{BFT} = S_{CFN} = S_2$.

Пусть $S_{BFNE} = S_3$. Так как *AKTC* – тоже трапеция ($k \parallel t$), то $S_{KBT} = S_{ABC} = S_1 + S_2 + S_3$. Итак, $S_{ABC} = S_1 + S_2 + S_3$. В то же время $S_{KNT} = S_1 + S_2 + S_3 + (S_1 + S_2 + S_3) = 2(S_1 + S_2 + S_3)$. Поэтому $S_{KNT} : S_{ABC} = 2:1$.

Задача 13.

Вершины равностороннего треугольника со стороной *q* расположены на трех параллельных прямых. Расстояние между крайними прямыми равно *m*. Докажите, что $m \le q < \frac{2}{\sqrt{3}} m$.

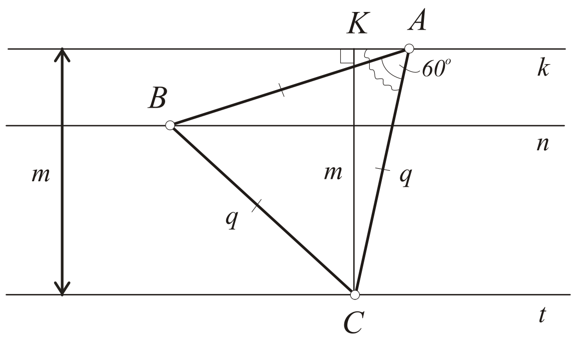

рис.16

Доказательство.

Пусть *ABC* – данный равносторонний треугольник со стороной *q*.

k; n; t – три параллельные прямые. Расстояние между крайними из них (*k* и *t*) равно *m* *(рис.16)*. Проведем *CK = m* перпендикулярно нашим прямым. Очевидно, $q \ge m$ (гипотенуза не меньше катета) – из ΔACK. Из этого же треугольника: $\sin\angle CAK = \frac{m}{q}$, где

$\angle CAK > 60°$. Тогда $\sin\angle CAK > \frac{\sqrt{3}}{2}$ (на интервале от $0°$ до $90°$ функция синус возрастает). Имеем: $\frac{m}{q} > \frac{\sqrt{3}}{2}$, или $\frac{q}{m} < \frac{2}{\sqrt{3}}$, или $q < \frac{2}{\sqrt{3}}m$, что и требовалось доказать!..

Задача 14.

Даны три параллельные прямые *k; n; t* и три точки *D; E; F*. Постройте треугольник *ABC* так, чтобы его вершины лежали на данных прямых, а стороны (или их продолжения) проходили через три данные точки.

Решение.

Для построения воспользуемся *теоремой Дезарга*: пусть даны два треугольника *XYZ* и $X_1Y_1Z_1$ с попарно непараллельными сторонами. Известно, что прямые X_1X; Y_1Y и Z_1Z пересекаются в точке *Q* *(рис.17)* или параллельны (говорят, что в таком случае точка *Q* находится в бесконечности). Тогда точки *K, N, T* – точки пересечения соответственно прямых *XZ* и X_1Z_1; *ZY* и Z_1Y_1; *XY* и X_1Y_1 принадлежат одной прямой. Для доказательства теоремы Дезарга можно несколько раз воспользоваться теоремой Менелая.

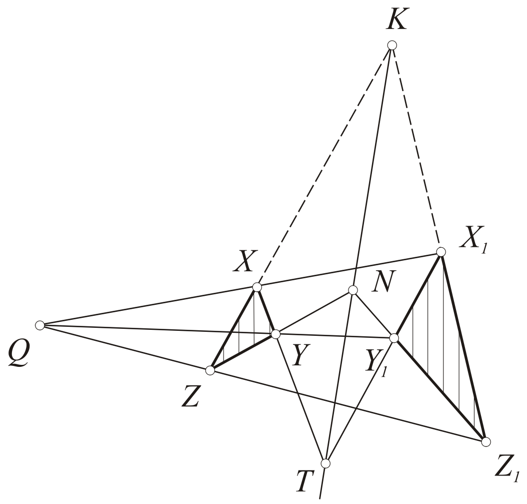

рис.17

Теперь перейдем непосредственно к решению задачи. Пусть искомый ΔABC построен. Анализ показывает, что если построить $\Delta A_1B_1C_1$ с соответственными вершинами на прямых *k; n; t* (их точка пересечения *Q* находится в бесконечности), где $D = AB \cap A_1B_1$; $E = BC \cap B_1C_1$, то точка $P = CA \cap C_1A_1$ лежит на прямой *DE*, то есть $P - D - E$ – одна прямая *(рис.18)*.

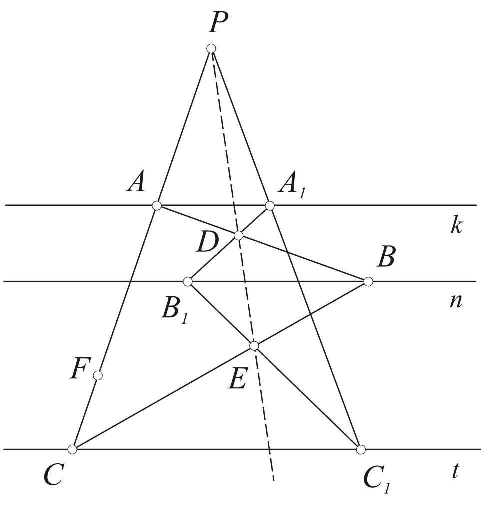

рис.18

Отсюда вытекает следующее построение:

1) берем точку B_1 на прямой *n* (произвольно) и проводим B_1D до пересечения с *k* в точке A_1;
2) проводим B_1E до пересечения с *t* в точке C_1;
3) прямые *ED* и C_1A_1 пересекутся в точке *P*;
4) прямая *PF* в пересечении с *k* и *t* дает вершины *A* и *C* соответственно;
5) очевидно, *AD* и *CE* при продолжении пересекутся в недостающей вершине *B*, где $B \in n$.

Несколько задач, связанных с тремя параллельными прямыми, предложим для самостоятельного решения.

Задача 15. По двум параллельным прямым движутся отрезки $AB = a$ и $CD = b$. Докажите, что точка пересечения AD и BC движется по третьей прямой, параллельной данным.

Задача 16. Через точку Q вне трех параллельных прямых проведите секущую так, чтобы сумма отрезков на соседних параллельных прямых была равна данному отрезку.

Задача 17. Вершины равностороннего треугольника лежат на трех параллельных прямых. Расстояния от средней из них до двух крайних равны a и b. Найдите сторону треугольника.

Задача 18. Строятся всевозможные треугольники с вершинами на трех данных параллельных прямих. Найдите геометрическое место центроидов треугольника.

Задача 19. На прямой отложены равные отрезки $AB = BC$. Постройте через $A; B; C$ три параллельные прямые, которые отсекают на другой данной прямой отрезки, равные a.

Задача 20. Внутри окружности с центром O даны точки K и T. Пользуясь только линейкой, проведите через указанные точки три параллельные хорды, чтобы две из них были равны.

А.Карлюченко,

Г.Филипповский.