Шесть доказательств теоремы о бабочке

Е.С. Горская

учитель информатики ЦО №218

Доклад опирается на статью «*The Metamorphosis of the Butterfly Problem*», *Leon Bankoff* (1987 г., *Math. Mag*). Статья была мной прочитана незадолго до отъезда на семинар и привела в величайшее восхищение, что и предопределило выбор темы доклада. Теорема о бабочке обладает для математиков удивительной притягивающей силой: впервые она появилась на страницах журнала *Gentleman's Diary* в 1815 году, вызвав массу эмоций и доказательств. С этих пор было опубликовано очень много работ, посвященной теореме о бабочке, и удивительно, что их количество велико до сих пор. Теорема о бабочке имеет массу доказательств, допускает ряд обобщений (о них можно прочитать в той же статье) и любопытных применений. Очень интересна статья В.Ю. Протасова в журнале «Квант», «Точка двух велосипедистов и теорема о бабочке», №4, 2008 год.

Свое красивое название теорема получила после публикации 1944 года в журнале *American Monthly* (*Joseph Rosenbaum*, *W.E. Buker* и др.). Название оказалось таким удачным, что с этих пор теорему только так и называли.

В статье *Leon'a Bankoff'a* помимо представленных ниже шести приводятся еще несколько счетных доказательств (с использованием теоремы Дезарга, тригонометрии, фактов аналитической геометрии и т. д.) Но здесь я их приводить не буду, поскольку целью доклада был не полный перевод статьи, а знакомство коллег с, возможно, неизвестными им красивыми идеями. Также, *Leon Bankoff* упоминает о том, кто и когда (согласно его историческим изысканиям) первым опубликовал то или иное доказательство. С удовольствием приведу фамилии этих математиков и соответствующие даты, поскольку в современных математических журналах порой встречаются эти старые доказательства, приводимые как новые, принадлежащие тому или иному ныне живущему автору. Приведу не для того, чтобы современному автору стало неловко (ни в коем случае!), а для того, чтобы проиллюстрировать мысль о том, что понятие «новая задача», или «новое доказательство» в классической геометрии — очень непонятная штука (см. также И.А Кушнир, «*Возвращение утраченной геометрии*», Киев, Факт, 2004).

Теорема о бабочке.

Пусть P — середина хорды AB некоторой окружности. CD и FE — хорды этой окружности, проходящие через точку P. Отрезки CF и ED пересекают AB в точках M и N соответственно. Тогда $MP = NP$.

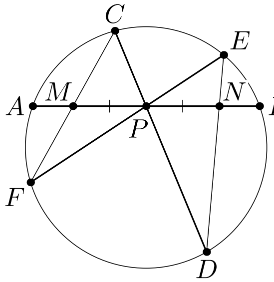

Рис. 1а

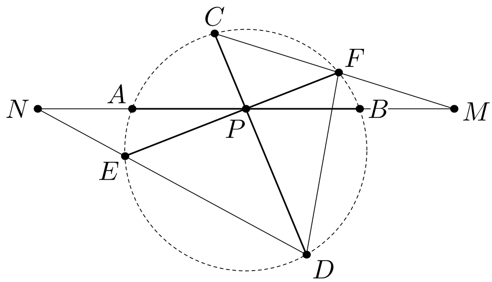

Рис. 1б

Возможны два случая расположения точек M и N (см. рис. 1а,б). В приводимых доказательствах мы ограничимся случаем, когда обе точки находятся внутри окружности (рис. 1а).

Доказательство.

Первый способ. Отдавая должное автору статьи (*Leon Bankoff*), начнем со способа, предложенного им в 1955 году в журнале *SSM* (*School Science and Mathematics*).

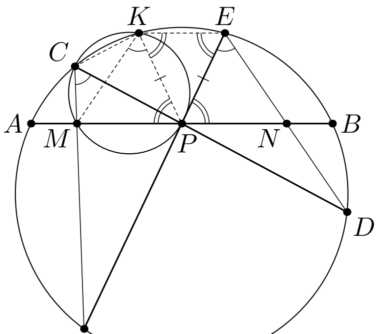

Рис. 2

Проведем через точку E прямую EK, параллельную AB (см. рис. 2). Докажем, что треугольники PEN и PKM равны. Действительно, $EP = KP$ и $\angle MPK = \angle PKE = \angle PEK = \angle NPE$. Кроме того, поскольку четырехугольник $CKEF$ — вписанный, то $\angle FEK + \angle FCK = 180^\circ$, то есть, $\angle MPK + \angle MCK = 180^\circ$, откуда следует, что четырехугольник $PKCM$ также вписан в окружность. Следовательно, $\angle PKM = \angle PCM$. Но $\angle PCM = \angle DCF = \angle DEF = \angle NEP$, то есть, $\angle PKM = \angle PEN$ и треугольники PKM и PEN равны (по стороне и двум прилежащим углам). Из равенства треугольников получаем равенство отрезков MP и NP.

Обратимся теперь к доказательствам, опубликованным в 1815 году в журнале *Gentleman's Diary*. Автор второго — *W.G. Horner* (нам он знаком со школы как автор схемы *Горнера*), автор третьего — *Richard Taylor*.

Второй способ. Пусть O — центр окружности, OP, OK и OL — серединные перпендикуляры к хордам AB, CF и ED (см. рис. 3). Из подобия треугольников CPF и EPD можно вывести, что $\angle PKC = \angle PLE$. Заметим, что четырехугольники $OPNL$ и $OPMK$ — вписанные (сумма противоположных углов равна 180°), следовательно, $\angle PKM = \angle POM$ и $\angle PLN = \angle PON$, откуда $\angle POM = \angle PON$. Поскольку OP — высота и биссектриса треугольника MON, то этот треугольник — равнобедренный и $MP = NP$.

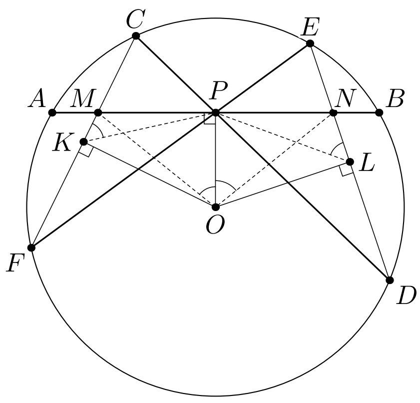

Рис. 3

Третий способ. Проведем описанную окружность треугольника CMP. K — точка ее пересечения с исходной окружностью (см. рис. 4). Тогда $\angle CPM = \angle CKM$. Пусть R и L — вторые точки пересечения прямых KM и KP с исходной окружностью. Поскольку $\angle CKR = \angle CDR$, то $\angle CPM = \angle CDR$, то есть прямые AB и RD параллельны. Кроме того, $\angle FCD = \angle MCP = \angle MKP = \angle RKL$, следовательно, дуги FD и RL равны, то есть, равны дуги LD и RF, откуда следует, что прямые RD и FL параллельны. Поскольку P — середина AB, то $PF = PL$. Кроме того, $\angle KFE = \angle KLE$ и $\angle KPF = \angle EPL$, поэтому треугольники KPF и EPL равны (по стороне и двум углам). Следовательно, $KP = EP$. Из параллельности AB, FL и RD получим, что $\angle KPM = \angle KLF = \angle EFL = \angle EPN$ и $\angle FED = \angle RKL$. Тогда треугольники KPM и EPN равны (по стороне и двум углам). Тогда $MP = NP$.

Отметим, что точка K совпадает с точкой K из первого способа доказательства.

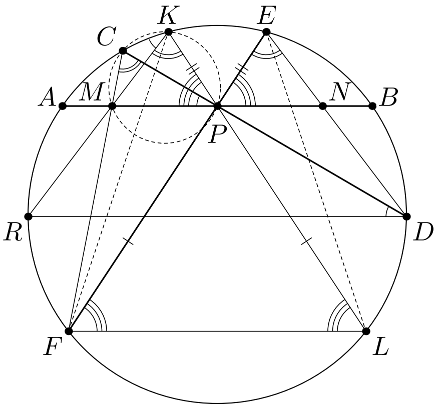

Рис. 4

Еще один «старый» способ доказательства был опубликован в 1819 году в книге *Geometrical Problems*, автор *Miles Bland*. Он же (с точностью до обозначений) был напечатан в 1944 году в *American Mathematical Monthly W.E. Buker*'ом, он же предлагается в книге *Г. Коксетера*, *С. Грейтцера* *«Новые встречи с геометрией»*.

Четвертый способ. Проведем через точку N прямую KL параллельно CF (см. рис. 5). Тогда $\angle LKF = \angle CFE = \angle CDE$. Из подобия треугольников KNE и DNL получим, что $\dfrac{KN}{DN} = \dfrac{EN}{LN}$, то есть, $KN \cdot LN = EN \cdot DN$. Поскольку $EN \cdot DN = AN \cdot BN = (AP+NP)(BP-NP)$, то $KN \cdot LN = AP^2 - NP^2$. Из подобия треугольников PMF и PNK и подобия треугольников PCM и PLN получим: $\dfrac{KN}{NP} = \dfrac{FM}{MP}$ и $\dfrac{LN}{NP} = \dfrac{CM}{MP}$. Перемножим левые и правые части полученных равенств: $\dfrac{KN \cdot LN}{NP^2} = \dfrac{FM \cdot CM}{MP^2}$. Поскольку $FM \cdot CM = AM \cdot BM = (AP - MP)(BP + MP) = AP^2 - MP^2$, то $\dfrac{AP^2 - PN^2}{NP^2} = \dfrac{AP^2 - MP^2}{MP^2}$, откуда $MP = NP$.

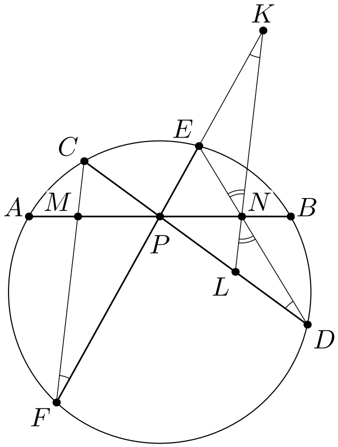

Рис. 5

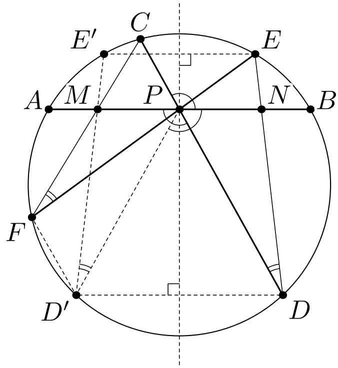

Рис. 6

В 1944 году в журнале *American Mathematical Monthly* был опубликован еще один способ доказательства (автор — *Joseph Rosenbaum*).

Пятый способ. Отразим точки E и D относительно диаметра, проходящего через точку P (см. рис. 6). Пусть при этом отражении они перейдут в точки E' и D'. Докажем, что образ точки N при рассматриваемом отражении совпадет с точкой M.

Заметим, что $\angle CPB = \angle APD$, как вертикальные. Кроме того, в силу симметрии $\angle APD = \angle BPD'$ и $\smile BD' = \smile AD$. Поскольку $\angle CFD' = \frac{1}{2}\left(\smile CB + \smile BD'\right)$ и $\angle CPB = \frac{1}{2}\left(\smile CB + \smile AD\right)$, то $\angle CFD' = \angle CPB = \angle BPD'$. Таким образом, четырехугольник $FMPD'$ — вписанный. Следовательно, $\angle CFE = \angle MFP = \angle MD'P$, кроме того $\angle CFE = \angle CDE$. Таким образом, $\angle MD'P = \angle CDE$, следовательно, при рассматриваемой симметрии точка N переходит в точку M, то есть, $MP = NP$.

В заключение приведем изящный способ доказательства, использующий радикальные оси. Его предложил *Mannis Charosh* в 1941 году в журнале *SSM*.

Шестой способ. Пусть M' — точка, симметричная N относительно P, то есть, $M'P = NP$. Докажем, что M' совпадает с M. Для этого отметим точки K и L так, что $KP = DP$ и $EP = LP$ (см. рис. 7). Тогда $\triangle KPL = \triangle DPE$, следовательно, KL пересекает AB в точке M'. Кроме того, $\angle PKL = \angle PDE = \angle PFC$, поэтому четырехугольник $KCLF$ вписан в окружность. Точки A, D, B и E принадлежат исходной окружности, следовательно, их образы B, K, A и L при симметрии относительно точки P также принадлежат некоторой окружности. Радикальные оси CF, AB и KL этих окружностей пересекаются в одной точке. Вспомнив, что M' — точка пересечения KL и AB, а M — точка пересечения CF и AB, получим, что M и M' совпадают, то есть, $MP = NP$.

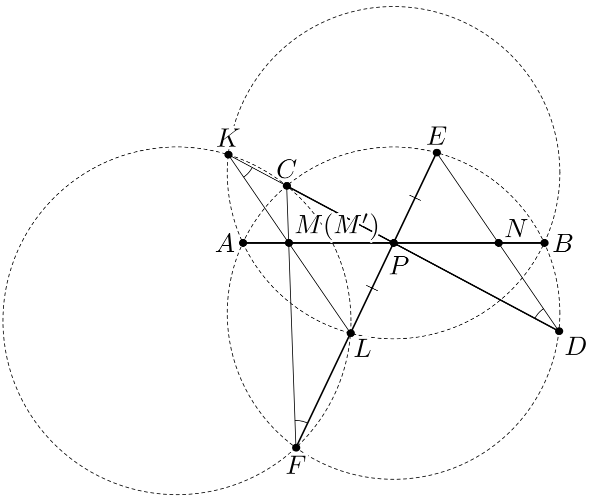

Рис. 7

Я полагаю, что изучение нескольких способов доказательства одного геометрического факта позволяет детям (да и учителям) глубже понять предлагаемую конструкцию. А это, в свою очередь, дает возможность «открывать» какие-то задачи, связанные с этой, возможно, придумывать еще способы доказательства.