О двух параллелограммах в треугольнике

Г.ФИЛИППОВСКИЙ

Речь пойдет о двух следующих параллелограммах в треугольнике ABC: OM_1E_1A и OM_1HE_1 (рис.1). Здесь O – центр описанной окружности треугольника, H – точка пересечения его высот (ортоцентр), M_1 – середина BC и E_1 – середина AH.

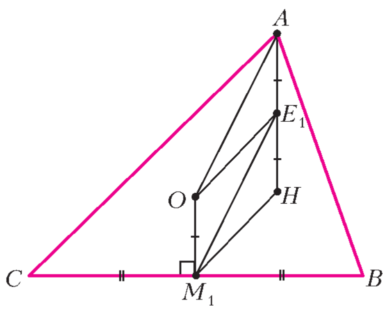

Рис. 1

Покажем, что четырехугольники OM_1E_1A и OM_1HE_1 действительно являются параллелограммами. Опишем около треугольника ABC окружность ω и проведем диаметр BD (рис.2). Очевидно, $ADCH$ – параллелограмм ($DC \parallel AH$, поскольку оба отрезка перпендикулярны к стороне BC; аналогично $DA \parallel CH$), OM_1 – средняя линия в треугольнике BCD, т.е. $OM_1 = \frac{1}{2}CD$. Тогда $OM_1 = \frac{1}{2}AH$. Следовательно, $OM_1 = AE_1 = E_1H$. Последние три отрезка к тому же параллельны (все они перпендикулярны к BC). Поэтому OM_1E_1A и OM_1HE_1 – параллелограммы.

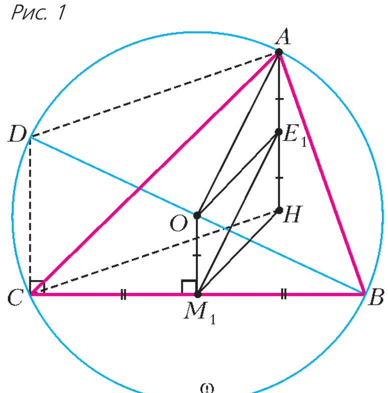

Рис. 2

Прежде чем перейти к разговору о замечательных свойствах указанных параллелограммов, отметим: в тупоугольном треугольнике формула $OM_1 = \frac{1}{2}AH$ и сами параллелограммы сохраняются (покажите!).

Задача 1. *Докажите, что отрезок M_1E_1 равен радиусу R описанной окружности треугольника ABC.*

Доказательство. В параллелограмме OM_1E_1A отрезок $OA = R$ (см. рис.1). Следовательно, $M_1E_1 = OA = R$.

Задача 2. *Докажите, что точки, симметричные точке O относительно середин медиан, принадлежат высотам треугольника.*

Доказательство. Точка T пересечения диагоналей параллелограмма OM_1E_1A – середина медианы AM_1 (рис.3). Точка E_1 симметрична O относительно T. Она лежит на высоте AH_1.

Задача 3. *Докажите, что (см. рис.3):*

а) $AH = 2R|\cos\alpha|$;

б) $AH^2 = 4R^2 - a^2$.

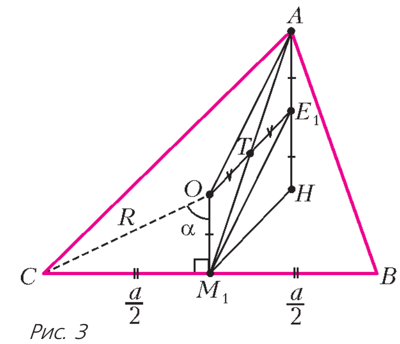

Рис. 3

Доказательство. Поскольку $OM_1 = R|\cos\alpha|$ (из ΔOM_1C), а $OM_1^2 = R^2 - \frac{a^2}{4}$ (теорема Пифагора для того же треугольника), то

$$AH = 2OM_1 = 2R|\cos\alpha|$$

и

$$AH^2 = 4OM_1^2 = 4R^2 - a^2.$$

Задача 4. *Пусть биссектриса AL_1 треугольника ABC пересекает M_1E_1 в точке N. Докажите, что (рис.4):*

а) $NE_1 = E_1A$;

б) $\angle ANH = 90°$.

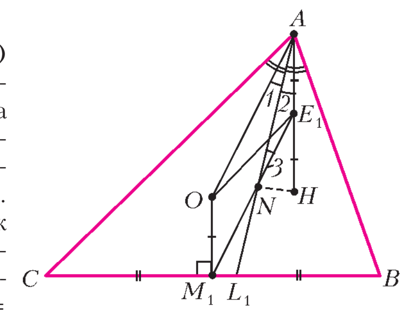

Рис. 4

Доказательство. а) Известно, что биссектриса угла A треугольника ABC совпадает с биссектрисой угла OAH (докажите!), т.е. $\angle 1 = \angle 2$. Но $\angle 3 = \angle 1$, так как OM_1E_1A – параллелограмм и $OA \parallel M_1E_1$. Тогда $\angle 3 = \angle 2$, и $NE_1 = E_1A$.

б) Поскольку $NE_1 = AE_1 = E_1H$, то $\angle ANH = 90°$.

Задача 5. *Докажите, что точка E – середина OH – является центром окружности Эйлера (окружности девяти точек).*

Доказательство. Пусть диагонали параллелограмма OM_1HE_1 пересекаются в точке E (рис.5). Соединим E с H_1 – основанием высоты, проведенной из вершины A. Тогда $H_1E = EM_1 = EE_1$ (медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы). Таким образом, E – центр окружности, проходящей через H_1, M_1, E_1. Аналогично можно показать, что на этой же окружности находятся точки E_2 и E_3 – середины BH и CH соответственно; H_2 и H_3 – основания высот, проведенных из вершин B и C; M_2 и M_3 – середины AC и AB соответственно.

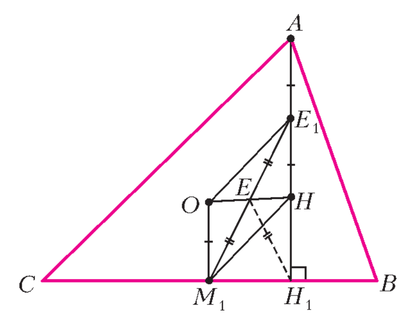

Рис. 5

Задача 6. *Найдите радиус окружности Эйлера.*

Решение. Непосредственно из рисунка 5 получаем

$$M_1E = EE_1 = \frac{1}{2}M_1E_1 = \frac{1}{2}R.$$

Задача 7. *Докажите, что:*

а) точка M пересечения медиан треугольника ABC, а также точки O и H лежат на одной прямой (прямой Эйлера);

б) $2OM = MH$.

Доказательство. а) Два наши параллелограмма, взятые вместе, составляют трапецию OM_1HA, в которой основание

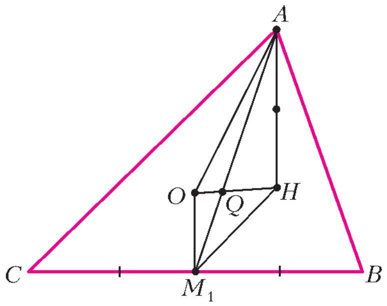

Рис. 6

AH в два раза больше основания OM_1 (рис. 6). Пусть Q – точка пересечения диагоналей этой трапеции. Тогда $\frac{AQ}{QM_1} = \frac{AH}{OM_1} = \frac{2}{1}$ (треугольники AQH и M_1QO подобны). Но и $\frac{AM}{MM_1} = \frac{2}{1}$. Значит, точки Q и M совпадают.

б) Очевидно, что и $\frac{HQ}{QO} = \frac{AH}{OM_1} = \frac{2}{1}$. Поскольку точки Q и M совпадают, то $\frac{HM}{MO} = \frac{2}{1}$, или $2OM = MH$.

Задача 8. *Докажите, что прямая E_1M проходит через точку, диаметрально противоположную вершине A.*

Доказательство. Воспользуемся так называемой леммой о трапеции: точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений ее боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой (докажите!). Следовательно, прямая E_1M пройдет через точку D пересечения продолжений AO и HM_1 трапеции AHM_1O (рис.7). Но $OM_1 \parallel AH$ и $OM_1 = \frac{1}{2}AH$. Значит, OM_1 – средняя линия в треугольнике AHD. Тогда $AO = OD$ и AD – диаметр описанной окружности треугольника ABC.

Задача 9. *Точки, симметричные ортоцентру H относительно середин сторон треугольника ABC, лежат на его описанной окружности. Докажите это.*

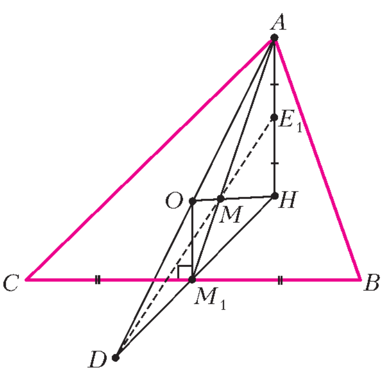

Рис. 7

Доказательство. Согласно рисунку 7, $HM_1 = M_1D$ (OM_1 – средняя линия в треугольнике AHD). Утверждение справедливо.

Задача 10. *Точки, симметричные ортоцентру H относительно сторон треугольника ABC, также принадлежат описанной около него окружности. Докажите это.*

Доказательство. Пусть F – точка, симметричная ортоцентру H относительно стороны BC треугольника ABC (рис.8). Связка исходных параллелограммов позволяет, удвоив OM_1, получить параллелограмм $OGHA$, в котором $GH = OA = R$. Поскольку $OGFH$ – равнобокая трапеция, то $OF = GH = R$. А это означает, что точка F принадлежит описанной окружности треугольника ABC.

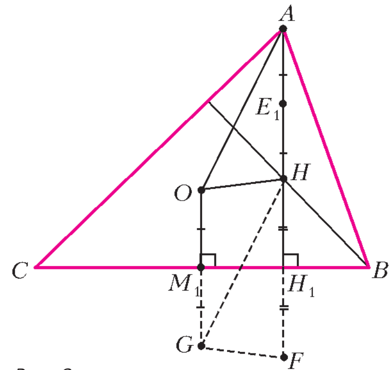

Рис. 8

Задача 11. *Докажите справедливость следующей формулы:*

$$OH^2 = 9R^2 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right),$$

где a, b, c – стороны треугольника ABC, R – радиус описанной около него окружности.

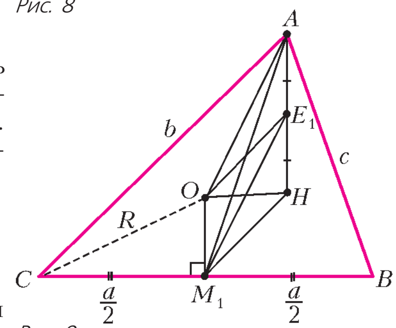

Рис. 9

Доказательство. Пусть AM_1 – медиана в треугольнике ABC (рис.9). Тогда, по формуле медианы,

$$AM_1^2 = \frac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{4}.$$

Далее воспользуемся формулой суммы квадратов диагоналей параллелограмма для OM_1E_1A:

$$OE_1^2 = 2\left(OA^2 + OM_1^2\right) - AM_1^2. \qquad (1)$$

По той же формуле для параллелограмма OM_1HE_1:

$$OH^2 = 2\left(OE_1^2 + OM_1^2\right) - M_1E_1^2, \qquad (2)$$

где $OM_1^2 = R^2 - \frac{a^2}{4}$ (из треугольника OM_1C), а $M_1E_1 = OA = R$. Подставим сюда значение OE_1^2 из предыдущей формулы:

$$OH^2 = 2\left(2OA^2 + 2OM_1^2 - AM_1^2 + OM_1^2\right) - M_1E_1^2,$$

или

$$OH^2 = 6OM_1^2 + 4OA^2 - 2AM_1^2 - M_1E_1^2,$$

или

$$OH^2 = 6\left(R^2 - \frac{a^2}{4}\right) + 4R^2 - \frac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{2} - R^2,$$

откуда получаем

$$OH^2 = 9R^2 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

Предложенная серия задач показывает эффективность использования параллелограммов OM_1E_1A и OM_1HE_1 при доказательстве важных фактов геометрии треугольника.

Головоломки в бутылках

(Начало см. на с. 25)

ваться какими-либо инструментами, приспособлениями, любыми предметами, не имеющими отношение к данной головоломке.

В качестве примера попробуйте разобраться с «хитрой» бутылкой с деревянным цилиндром внутри, о которой рассказывается на 4-й странице обложки журнала.

Сразу предупредим, что бесполезны все попытки переворачивать и встряхивать бутылку в надежде случайно попасть торцом цилиндра в отверстие трубки. Сделать это практически невозможно.

Как же решить задачу? Обратите внимание, что изготовленная вами головоломка не похожа на ту, что показана на фотографии. Дело не в форме бутылки и не в размерах трубки или цилиндра. Вашей головоломке не хватает… конверта с решением! Этот конверт есть в редакции, и мы его открывали, надеясь найти внутри текст решения и прочитать его. Но текста не было. В конверте лежал чистый листок бумаги! И все-таки головоломка была решена. Поэтому советуем вам взять конверт, написать на нем слово «Решение», положить внутрь лист бумаги и решать головоломку Уилла Страйбоса.

А.Калинин