Одной рукой узелок не развяжешь!

А.ПОЛЯНСКИЙ

О чем же пойдет речь? Думаю, что многие сразу догадались, прочитав название, что мы поговорим об узлах, но не о тех, которые обычно мы завязываем у себя на кроссовках, фартуке, альпинистском снаряжении и т.д., а о целочисленных точках на плоскости. Давайте начнем с определений.

Определение. *Узлом* будем называть такую точку на плоскости, у которой обе координаты (по оси x и по оси y) целые.

Определение. *Целым* будем называть такой многоугольник (отрезок или вектор) на плоскости, вершины (концы) которого являются узлами.

Замечание. Следует отметить, что все рассуждения, которые мы приведем ниже, не будут зависеть от того, какая у нас система координат – прямоугольная или косоугольная (т.е. когда координатные оси не обязательно расположены под прямым углом, а единичные отрезки по оси x и по оси y не обязательно равны).

Обратим внимание на три очень простых факта, которые читатель сможет самостоятельно доказать.

Факт 1 (правило параллелограмма). *Если вектор $\overrightarrow{AB}$ – целый, а точка C является узлом, то точка D, определяемая равенством $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$, также является узлом (рис.1).*

Факт 2 (правило отрезка). *Если целый отрезок AB содержит ровно $n \geq 0$ узлов (не считая концы), то эти узлы делят AB на $n + 1$ равный отрезок (рис.2).*

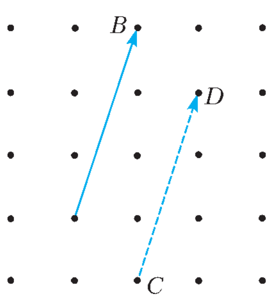

Рис. 1

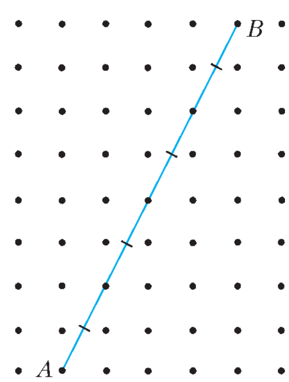

Рис. 2

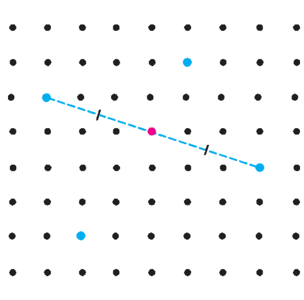
Рис. 3

Факт 3 (правило пяти узлов). *Если на плоскости даны 5 узлов, то середина хотя бы одного из отрезков, соединяющих два из этих узлов, также является узлом (рис.3).*

Итак, приступим к решению задач.

Задача 1 (Всероссийская олимпиада школьников, 1983 год). *Докажите, что внутри выпуклого целого пятиугольника найдется узел.*

Решение. Выберем среди вершин пятиугольника $ABCDE$ две соседние такие, что сумма углов при этих вершинах больше $180°$. Мы можем это сделать, так как если бы таких вершин не было, то мы бы получили неверное неравенство

$$540° = \frac{\angle A + \angle B}{2} + \frac{\angle B + \angle C}{2} + \frac{\angle C + \angle D}{2} + \frac{\angle D + \angle E}{2} + \frac{\angle E + \angle A}{2} \leq 90° \cdot 5 = 450°.$$

Допустим, что это вершины A и B (рис.4). Выберем теперь из вершин E и C ту, которая находится ближе к прямой AB (если они находятся на одинаковом расстоянии, то выберем любую). Допустим, что это вершина C. Тогда рассмотрим точку F такую, что $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BA}$. Нетрудно убедиться, что точка F является узлом и лежит внутри этого пятиугольника.

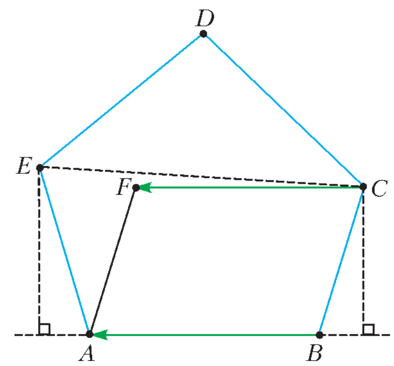

Рис. 4

Попробуйте самостоятельно решить следующее упражнение, используя практически те же рассуждения, что и в задаче 1.

Упражнение 1. Докажите, что если внутри и на границе выпуклого целого четырехугольника нет узлов, кроме вершин, то это параллелограмм.

Перейдем к задачам потруднее.

Задача 2. *Строго внутри целого треугольника расположен целый выпуклый четырехугольник. Докажите, что внутри треугольника расположен по крайней мере еще один узел, отличный от вершин четырехугольника.*

Решение. Если внутри и на границе указанного целого четырехугольника есть узлы, отличные от вершин, то данная задача становится очевидной. Поэтому будем считать, что внутри и на границе данного четырехугольника нет узлов, кроме вершин, тогда из упражнения 1 следует, что это параллелограмм.

Будем действовать от противного: предположим, что кроме вершин параллелограмма больше узлов внутри нет. Рассмотрим вершины нашего параллелограмма и одну из вершин треугольника. По правилу пяти узлов середина одного из отрезков, соединяющих вершину треугольника и одну из вершин параллелограмма, является узлом. Следовательно, согласно нашему предположению, эта середина является одной из вершин параллелограмма. Таким образом, вершинами треугольника могут быть только те точки, которые симметричны одной из вершин параллелограмма относительно другой вершины параллелограмма. Значит, вершины треугольника располагаются в одной из

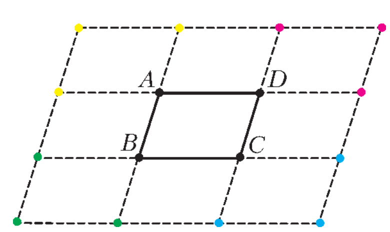

Рис. 5

12 точек (рис.5). Разобьем эти 12 точек на 4 группы (в группу входят точки, «расположенные» возле соответствующей вершины параллелограмма (см. раскраску на рисунке 2)). По принципу Дирихле среди точек одной из групп нет вершин треугольника. Допустим, что их нет среди красных точек. Тогда получаем, что точка D лежит либо с той же стороны, что и точки красной группы, относительно любой из сторон треугольника, либо на одной из сторон треугольника, т.е. либо вне треугольника, либо на его границе. Получаем противоречие. Значит, внутри треугольника есть еще одна точка, отличная от вершин параллелограмма. Утверждение задачи доказано.

Задача 3 (Математическое многоборье, 2012 год). *Внутри целого треугольника ABC расположены $n > 0$ узлов. Какое наибольшее число узлов может находиться на стороне BC (не считая вершины)?*

Ответ: $2n + 1$ узел.

Решение. Пусть на стороне BC находятся m узлов. Тогда в соответствии с правилом отрезка они делят сторону BC на $m + 1$ равный отрезок. Обозначим $\vec{e} = \dfrac{\overrightarrow{BC}}{m+1}$, т.е. $BC = (m+1)\cdot\left|\vec{e}\right|$. Рассмотрим среди всех узлов внутри треугольника ABC узлы с наименьшим расстоянием до BC. Проведем через них прямую l, параллельную стороне BC (рис.6). Пусть прямая l пересекает AB в точке B', а AC – в точке C'. Ближайший узел к B' среди узлов, расположенных внутри треугольника ABC и на прямой l, обозначим через B_1, а ближайший узел к C' среди узлов, расположенных внутри треугольника ABC и на прямой l, обозначим через C_1. Тогда $B'B_1 \le \left|\vec{e}\right|$, $B_1C_1 \le (n-1)\cdot\left|\vec{e}\right|$ и $C_1C' \le \left|\vec{e}\right|$ (почему верны эти неравенства?). Поэтому получаем неравенство

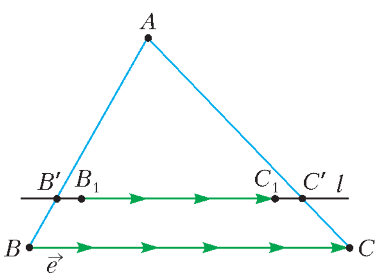

Рис. 6

$$B'C' \le B'B_1 + B_1C_1 + C_1C' \le (n+1)\cdot\left|\vec{e}\right|. \qquad (1)$$

С другой стороны, прямая l должна лежать между средней линией (может совпадать с ней) и стороной BC, так как если она лежит «выше средней линии», то, отражая узел A симметрично относительно узла B_1, мы получим узел, лежащий внутри треугольника ABC и находящийся ближе к стороне BC, чем узел B_1 (рис.7). Значит, длина $B'C'$ не меньше длины средней линии, т.е.

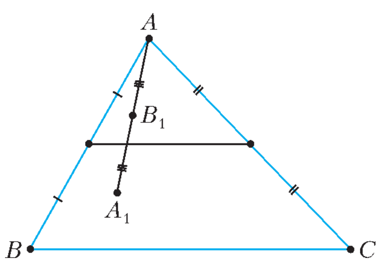

Рис. 7

$$B'C' \ge \frac{BC}{2} = \frac{(m+1)\left|\vec{e}\right|}{2}. \qquad (2)$$

Совмещая неравенства (1) и (2), получаем:

$$\frac{(m+1)\cdot\left|\vec{e}\right|}{2} \le B'C' \le (n+1)\cdot\left|\vec{e}\right|.$$

Значит, $m \le 2n+1$.

Построить пример для $m = 2n + 1$ несложно, исходя из решения (главное, чтобы все точки внутри треугольника лежали на средней линии): $A(0;2)$; $B(0;0)$; $C(2n+2;0)$. Нетрудно проверить, что на стороне BC ровно $2n + 1$ узел, а внутри треугольника ровно n узлов.

Контрольный вопрос. Где в предложенном решении мы использовали условие $n > 0$? Чем плох случай $n = 0$?

Интересный сюжет проглядывается в задаче 4 и упражнениях 2 и 3.

Задача 4 (XXXIV Турнир городов). *Внутри целого треугольника расположены n узлов. Докажите, что из этих n узлов можно выбрать два различных узла таких, что прямая, проходящая через них, содержит одну из вершин треугольника или параллельна одной из сторон, если: а) $n = 2$; б) $n > 2$.*

Решение. а) Предположим противное: пусть прямая l, проходящая через два узла P и Q, не параллельна ни одной из сторон треугольника и не проходит ни через одну из вершин треугольника (рис.8). Тогда проведем через вершины A, B, C соответственно три прямые l_a, l_b, l_c, параллельные l. Тогда эти четыре прямые различны, прямая l и еще одна из прямых l_a, l_b, l_c лежат между двух других прямых (допустим, что l и l_b лежат между l_a и l_c). Предположим также, что прямая l лежит также между l_b и l_c. Тогда обозначим через B' точку пересечения l_b и стороны AC, а через P', Q' – точки пересечения прямой l и сторон AC и BC соответственно. Нетрудно проверить, что $PQ < P'Q' < BB'$. Если мы отложим от точки B вектор, равный по длине PQ и сонаправленный $\overrightarrow{BB'}$, то по правилу параллелограмма получим третий узел внутри треугольника ABC, отличный от P и Q. Противоречие с условием: оказалось, что внутри треугольника находятся три узла.

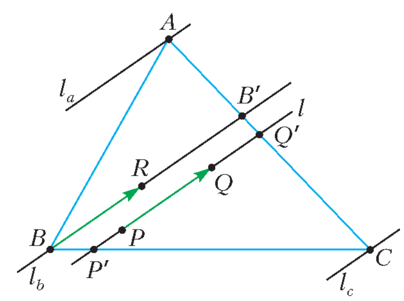

Рис. 8

Задачу б) предлагаем читателям в качестве упражнения.

Упражнения

2. Внутри целого выпуклого многоугольника расположены n узлов. Докажите, что из этих n узлов можно выбрать два различных узла таких, что прямая, проходящая через них, содержит одну из вершин многоугольника или параллельна одной из сторон, если: а) $n = 2$; б) $n > 2$.

3. Внутри целого невыпуклого многоугольника расположено ровно $n > 1$ узлов. Верно ли, что из этих n узлов можно выбрать два различных узла таких, что прямая, проходящая через них, содержит одну из вершин треугольника или параллельна одной из сторон?

И напоследок осталась еще одна задача.

Задача 5. *Центр описанной окружности O неравнобедренного остроугольного целого треугольника ABC является узлом. Какое наименьшее число узлов может быть внутри этого треугольника ABC?*

Ответ: 3 узла.

Решение. Заметим, что точка пересечения высот H также является узлом, если центр описанной окружности O – узел. Действительно, рассмотрим ромб $AOCO'$ (рис.9). По правилу параллелограмма точка O' – узел. Но тогда для целого вектора $\overrightarrow{OO'}$ верно $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{BH}$ (почему это верно?). Значит, по правилу параллелограмма точка H тоже узел.

Предположим, что внутри треугольника расположены ровно 2 узла O и H (они различны, так как иначе треуголь-

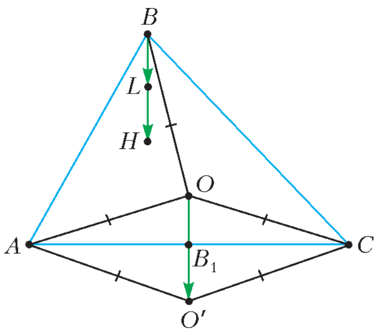

Рис. 9

ник был бы равносторонним). Согласно правилу пяти узлов для точек A, B, C, O, H середина одного из отрезков является узлом. Но это не может быть середина отрезка, соединяющего точку внутри с вершинами треугольника, так как это была бы вторая точка, лежащая внутри, т.е. треугольник был бы равнобедренным (так как тогда O, H и вершина треугольника лежали бы на одной прямой). Она также не может быть серединой OH, так как тогда мы получили бы еще одну точку внутри треугольника. Значит, середина одной из сторон является узлом. Допустим, это середина B_1 стороны AC. Тогда $\overline{OB_1}$ является целым вектором. Значит, по правилу параллелограмма точка L такая, что $\overline{BL} = \overline{OB_1}$, будет узлом (см. рис.9). Следовательно, середина отрезка BH является узлом, и эта точка не совпадает с O, так как иначе треугольник был бы равнобедренным. Получили третью точку внутри треугольника. Противоречие.

Построить пример для 3 узлов теперь уже несложно. В прямоугольной системе координат рассмотрим точки $A(0;0)$, $B(1;3)$, $C(4;0)$, тогда внутри треугольника лежат такие точки: $O(2;1)$, $H(1;1)$ и $L(1;2)$.

Итак, с помощью совсем простых примеров нам удалось решить достаточно сложные задачи! Ниже – еще несколько задач, которые так или иначе связаны с узлами, но в них иногда требуются знания и приемы, выходящие за рамки данной статьи.

Упражнения

4. (Всероссийская олимпиада, 2002 год). В выпуклом многоугольнике (возможно не целом) на плоскости содержится не меньше m^2+1 точек с целыми координатами. Докажите, что в нем найдутся $m+1$ точек с целыми координатами, которые лежат на одной прямой.

5. (Всероссийская олимпиада, 2000 год).[1] Дан целый выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Докажите, что внутри или на границе выпуклого пятиугольника, образованного диагоналями пятиугольника $ABCDE$, находится узел.

6 (Олимпиада 239 ФМЛ, С.-Петербург, 1998 год). Докажите, что площадь выпуклого целого $2n$-угольника не меньше $\frac{n^3}{100}$.

7. Докажите, что среди 9 узлов можно выбрать 3 так, чтобы их центр масс был узлом.

К сожалению, многие задачи и другие вопросы, связанные с узлами, нам не удастся разобрать в рамках одной статьи. В частности, в стороне осталась известная формула Пика. Поэтому автор будет очень рад, если читатель не поленится и обратит внимание на предложенную литературу.

Литература

1. *В.В.Прасолов*. Задачи по планиметрии. – М.: МЦМНО, 2007. Глава 24 «Целочисленные решетки».

2. Математика в задачах. Сборник материалов выездных школ команды Москвы на Всероссийскую олимпиаду. Под ред. А.А.Заславского и др. – М.: МЦМНО, 2009. Статья В.В.Прасолова и М.Б.Скопенкова «Теорема о 12».

3. *В.В.Вавилов, А.В.Устинов.* Многоугольники на решетках. – М.: МЦМНО, 2006.

4. *Н.Б.Васильев*. Вокруг формулы Пика. – «Квант», 1974, №12.

[1] Эта задача предлагалась также на Межнациональном Венгерско-Израильском соревновании 1992 года.

ЗНАЕТЕ ЛИ

Здание знаменитой московской 57-й школы прежде принадлежало частному реальному училищу К.К.Мазинга. Интересно узнать, какие задачи там решали лет 100 назад – например, на испытаниях зрелости в 1899 году (преподаватель – Г.Чистяков). Приводим их в старой орфографии. А вы решите?

Задачи на испытаніяхъ зрѣлости въ 1899 г.

Частное реальное училище К.К.Мазинга въ Москвѣ.

VI классъ.

Алгебра. Разность коэффиціентовъ 3-го членовъ разложенія по биному Ньютона $\left(\frac{1}{\sqrt{a^3}}+\sqrt[3]{a^2}\right)^m$ равна 90. Опредѣлить число членовъ ариѳметической прогрессіи, 1-й членъ которой равенъ m; сумма всѣхъ членовъ равна коэффиціенту того члена данного разложенія, который содержитъ $a^{1,(3)}$ и разность прогрессіи есть число, логариѳмъ котораго при основаніи 0,04 равенъ $-\frac{1}{2}$.

Геометрія. Даны двѣ окружности; площадь правильнаго шестиугольника, описаннаго около меньшаго круга, равна площади равносторонняго треугольника, вписаннаго въ большій кругъ. Вычислить, во сколько разъ периметръ правильнаго треугольника, описаннаго около большаго круга, болѣе периметра квадрата, вписаннаго въ меньшій кругъ, а также найти отношеніе между поверхностями шаровъ, которые получаются отъ вращенія данныхъ круговъ около ихъ діаметровъ.

Тригонометрія. Къ кругу, радіусъ котораго $v = 28{,}3$ дм., проведены изъ внѣшней точки P касательныя, прикасающіяся въ точкахъ R и S. Вычислить стороны, углы и площадь треугольника PRS, если извѣстно, что перпендикуляръ RT, опущенный изъ R на прямую PS, равенъ 40,9 дм.

VII (дополнительный) классъ.

Алгебра. Рѣшить уравненіе: $ax^2+bx^2+c=0$, причемъ: $a=0,4\left(\frac{4}{1-i}-\frac{5}{4-\sqrt{-4}}+\frac{3}{1+i}\right)$; b равно наименьшему значенію выраженія: $2z^2-z+10,125$ и c равно предѣлу выраженія:

$$\left(2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\ldots\cdot\right)^2.$$

Геометрія. Въ правильной четыреугольной пирамидѣ плоскій уголъ при вершинѣ равенъ углу между ребромъ и плоскостью. Вычислить двугранные углы при основаніи и между боковыми гранями этой пирамиды.

Приложеніе алгебры къ геометріи. Данъ кругъ радіуса R и внѣ его точка A на разстояніи a отъ центра; построить равнобедренный треугольникъ такъ, чтобы вершина его лежала въ точкѣ A, а основаніе было хордою даннаго круга и равнялось высотѣ 3-ка.