# Новый взгляд на теорему Штейнера – Лемуса

**Л. ШТЕЙНГАРЦ**

### Загадочная теорема о биссектрисах

В геометрии одной из самых загадочных теорем считается *теорема Штейнера – Лемуса*. Формулируется она следующим образом:

*Доказать, что если в треугольнике две биссектрисы равны, то этот треугольник равнобедренный.*

Загадочность этой теоремы заключается в ее кажущейся простоте. Ведь совершенно нетрудно доказать, что в равнобедренном треугольнике две биссектрисы равны. Более того, аналогичные теоремы (как прямые, так и обратные) не представляют никаких особых проблем ни для медиан, ни для высот треугольника. Но вот с обратной теоремой для биссектрис дело обстоит намного сложнее.

**Упражнения**

**1.** Докажите, что в равнобедренном треугольнике: а) биссектрисы; б) медианы; в) высоты, проведенные к боковым сторонам, равны.

**2.** Докажите, что если в треугольнике равны: а) две медианы; б) две высоты, то этот треугольник равнобедренный.

История обсуждаемой нами теоремы, скорее всего, началась в первой половине XIX века. В 1840 году немецкий математик Кристиан Людольф Лемус в письме своему французскому коллеге Шарлю Штурму упомянул этот вопрос и попросил его придумать чисто геометрическое доказательство. Штурм в то время уже был действительным членом Парижской академии наук, и через него задача стала известна многим ученым. Среди них был великий швейцарский геометр Якоб Штейнер. Он одним из первых доказал теорему, но его доказательство было сложным, и поэтому многие не оставляли попыток найти более простые методы. Сейчас известно несколько десятков различных доказательств теоремы Штейнера – Лемуса.

Несколько лет назад нам удалось придумать еще одно доказательство, которое мы и хотим предложить читателям. Это доказательство несколько похоже на то, которое имеется в книге Г.С.М.Коксатера и С.Л.Грейтцера «Новые встречи с геометрией». И все же оно – другое.

### Доказательство теоремы

Введем понятие, которое, на наш взгляд, заслуживает того, чтобы его ввели в школьную программу при изучении геометрии: назовем дугу, которая не больше полуокружности, *малой дугой*. Ясно, что градусная мера малой дуги не больше 180°. Также вполне очевидно, что две хорды равны тогда и только тогда, когда равны соответствующие им малые дуги.

**Упражнения**

**3.** Докажите, что из двух хорд одной окружности, большей является та, которой соответствует бóльшая малая дуга.

**4.** Докажите, что из двух малых дуг большей является та, которой соответствует бóльшая хорда.

Итак, предположим, что существует неравнобедренный треугольник $ABC$, у которого биссектрисы $AA_1$ и $BB_1$ равны (рис.1). Введем обозначения: $\angle A = 2°$, $\angle B = 2\beta$. Допустим, для определенности, что угол $A$ больше угла $B$, т.е. $° > \beta$. Кроме того, $2° + 2\beta < 180°$ (так как это сумма двух углов треугольника).

Проведем окружность через точки $A$, $B$ и $A_1$. При этом возможны три случая. Разберем каждый из них.

*Случай 1:* точка $B_1$ оказалась на окружности (рис. 2).

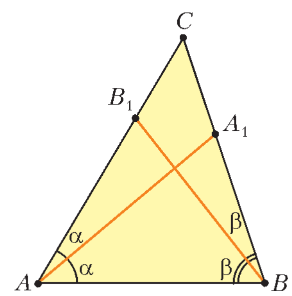


Рис. 1

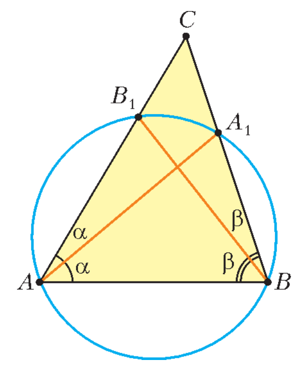


Рис. 2

Тогда $\angle AA_1B = \angle AB_1B$ (как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу). Но эти углы являются внешними для треугольников $AA_1C$ и $BB_1C$ соответственно. Из этого сразу следует, что $° = \beta$.

*Случай 2:* точка $B_1$ оказалась внутри окружности (рис. 3). При этом $\cup EFA_1 > \cup FmA_1$. Следовательно, $\angle EBA_1 > \angle FAA_1$. Получается, что $\beta > \alpha$, а это противоречит нашему предположению.

*Случай 3:* точка $B_1$ оказалась вне окружности (рис. 4). В этом случае хорда $BE$ меньше хорды $AA_1$, так как, по условию, отрезки $AA_1$ и $BB_1$ равны. Имеем $\cup EA_1B = \cup EA_1 + \cup A_1B = 2\beta + 2° < 180°$ и $\cup AEA_1 = 4\beta < 2\beta + 2° < 180°$. Значит, дуги $EA_1B$ и $AEA_1$ – малые. Теперь (так как хорда $BE$ меньше хорды $AA_1$) мы можем заключить, что дуга $EA_1B$ меньше дуги $AEA_1$. Таким образом, $2\beta + 2° < 4\beta$. А это снова противоречит тому, что $° > \beta$.

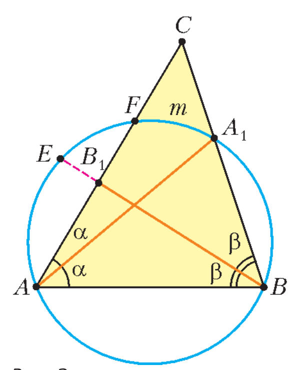


Рис. 3

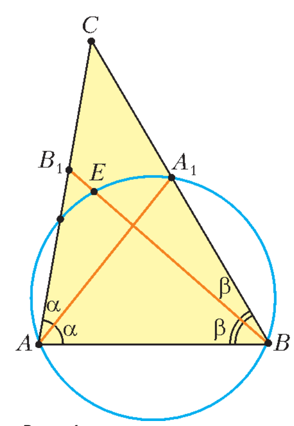


Рис. 4

Следовательно, треугольник $ABC$ – непременно равнобедренный, и теорема Штейнера – Лемуса доказана.

### ОТ РЕДАКЦИИ

Теореме Штейнера – Лемуса уже более полутора веков. За это время накопилось много разных ее доказательств, и, как мы видим, регулярно появляются новые. В начале 60-х годов XX века Мартин Гарднер написал про эту теорему в своей колонке в «Scientific American» и получил после этого множество откликов от читателей. Многие предлагали свои собственные доказательства, и среди них было немало оригинальных. «Квант» уже рассказывал об этой теореме в статье А.Коробова «Семь решений задачи Штейнера» («Квант» №4 за 1996 г.). Ниже мы приводим еще четыре доказательства теоремы Штейнера – Лемуса. Первое принадлежит самому Штейнеру и было опубликовано в 1844 году. Второе доказательство Гарднер выбрал как самое изящное из присланных ему читателями. Его авторы – Г.Гилберт и Д.Макдональд. Позже выяснилось, что Лемус придумал этот же способ, но лишь через десять лет после его письма Штурму, с которого началась вся история. Третье и четвертое доказательства – алгебраические.

Отметим также, что в посвященной этой же теореме статье Дж. Макбрайда «The equal internal bisectors theorem, 1840–1940... Many solutions or none? A centenary account» описана столетняя (на тот момент) история этой задачи и дана подборка доказательств.

### Доказательство Штейнера

Штейнер доказывал, что треугольник будет равнобедренным, если в нем равны две биссектрисы при тупых внешних углах.

Пусть в треугольнике $ABC$ равны внешние биссектрисы $BY$ и $CZ$ при стороне $BC$, а $E$ – центр вневписанной окружности (рис.5). Введем обозначения: $\angle CBE = {}^{\circ}$, $\angle BCE = \beta$ и предположим, что ${}^{\circ} > \beta$. Тогда $CE > BE$. Если

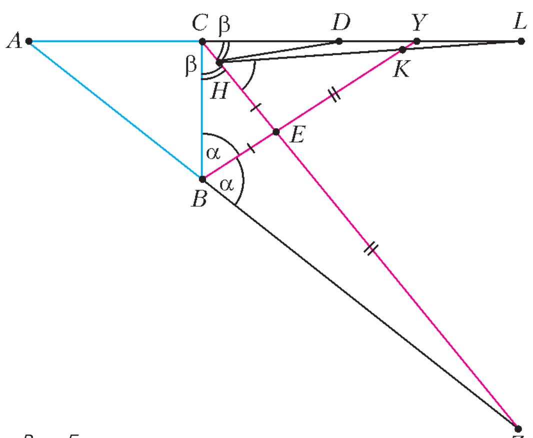


*Рис. 5*

отметить точки $H$ и $K$ так, чтобы выполнялись равенства $EH = EB$ и $EK = EZ$, то отрезки $HC$ и $KY$ будут равны. Из равенства треугольников $BEZ$ и $HEK$ получим, что $\angle ZHK = {}^{\circ}$. Значит, если $L$ – точка пересечения лучей $CY$ и $HK$, то $\angle CLH = {}^{\circ} - \beta$. В равнобедренном треугольнике $BEH$ угол при основании равен $\frac{{}^{\circ} + \beta}{2}$, откуда $\angle CBH =$ $\angle CBH = {}^{\circ} - \frac{{}^{\circ} + \beta}{2} = \frac{{}^{\circ} - \beta}{2} = \frac{1}{2}\angle CLH$.

Угол $YBZ$ – внешний для треугольника $ABY$, поэтому $\angle BYA < \angle YBZ = {}^{\circ} = \angle CBY$, т.е. $BC < CY$. Поэтому на отрезке $CY$ найдется такая точка $D$, что $CB = CD$. Тогда треугольники $CBH$ и $CDH$ равны, а значит, $\angle CDH =$ $= \angle CBH = \frac{1}{2}\angle CLH$. Получилось, что внешний угол треугольника $HDL$ меньше внутреннего не смежного с ним угла. А это, очевидно, противоречие. Значит, ${}^{\circ} = \beta$, т.е. $\angle ABC = \angle ACB$ и треугольник $ABC$ равнобедренный. Что и требовалось доказать.

В этом доказательстве существенно, что оба внешних угла, биссектрисы которых равны, тупые. Если один из них острый, то рассуждения Штейнера уже не работают. В следующем упражнении приведен пример такой ситуации.

**Упражнение 5.** В треугольнике $ABC$ с углами $\angle B = 12°$ и $\angle C = 132°$ проведены внешние биссектрисы $BM$ и $CN$ этих углов (точка $M$ лежит на прямой $AC$, точка $N$ – на прямой $AB$). Докажите (желательно без использования тригонометрии!), что $BM = CN$.

### Доказательство Гилберта – Макдональда (и Лемуса)

Пусть в треугольнике $ABC$ равны биссектрисы $BM$ и $CN$ (рис. 6). Пусть углы $B$ и $C$ не равны. Значит, один из них,

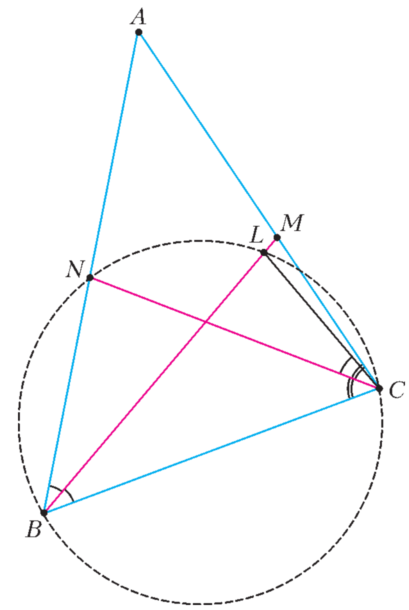


*Рис. 6*

скажем угол $C$, больше другого. Возьмем на $BM$ точку $L$, чтобы угол $BCL$ был равен половине угла $B$. Тогда точки $B$, $C$, $L$ и $N$ лежат на одной окружности. С одной стороны, верны неравенства $\angle CBN < \angle BCL < 90°$. С другой стороны, $BL < BM = CN$, и угол $BCL$ должен быть меньше угла $CBN$, так как он опирается на меньшую хорду. Противоречие.

### Алгебраические доказательства

Представляем их в виде серии несложных упражнений. Для первого доказательства нужна формула из упражнения 8, для второго – формула из упражнения 9. Ниже $AL$ – биссектриса угла $A$ треугольника $ABC$.

**Упражнения**

**6.** Докажите, что $\frac{BL}{CL} = \frac{BA}{CA}$.

**7.** Докажите, что $AL^2 = AB \cdot AC - LB \cdot LC$.

**8.** Докажите, что

$$AL^2 = AB \cdot AC \cdot \left(1 - \left(\frac{BC}{AB + AC}\right)^2\right)$$

и выведите отсюда теорему Штейнера – Лемуса.

**9.** Докажите, что $AL = \frac{2AB \cdot AC}{AB + AC}\cos\frac{\angle BAC}{2}$ и выведите отсюда теорему Штейнера – Лемуса.