СНОВА О ТЕОРЕМЕ МОРЛЕЯ

Л.ШТЕЙНГАРЦ

Три короткие задачи о биссектрисах

Одной из самых удивительных и красивых теорем в геометрии по праву считается *теорема Морлея*, которая утверждает следующее (рис.1):

Точки пересечения смежных трисектрис углов (т.е. лучей, делящих данный угол на три равные части) произвольного треугольника являются вершинами равностороннего треугольника.

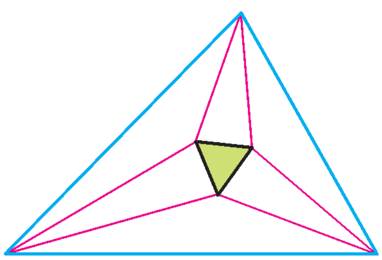

Рис. 1

Теорема была открыта в 1904 году английским математиком Франком Морлеем (Frank Morley). Тогда он рассказал об этой теореме своим друзьям, а опубликовал ее двадцать лет спустя в Японии.

У этой теоремы есть, к сожалению, один существенный «недостаток». До недавнего времени были известны лишь довольно сложные доказательства этой теоремы (см. список литературы в конце статьи). Как правило, учителя, рассказывая ученикам об этой теореме, говорят, в каком году и кем она была открыта, показывают красивый чертеж, но очень редко ее доказывают. На наш взгляд, этот «недостаток» можно устранить.

В этой небольшой статье мы предлагаем три совсем нетрудные задачи, решения которых доступны практически любому школьнику. После этих задач доказательство теоремы Морлея становится почти очевидным.

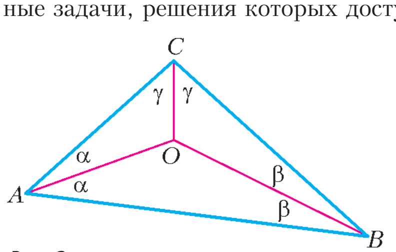

Рис. 2

Задача 1. *Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке O (рис.2). Докажите, что угол COB на 90° больше, чем половина угла A.*

Решение. Введем обозначения: $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$, $\angle C = 2\gamma$. Ясно, что $\alpha + \beta + \gamma = 90°$. Тогда $\beta + \gamma = 90° - \alpha$. Следовательно, $\angle COB = 180° - (\beta + \gamma) = 180° - (90° - \alpha) = \alpha + 90°$.

Задача 2 (обратная к задаче 1). *Внутри треугольника ABC (рис.3) взята точка O так, что угол COB на 90° больше, чем угол CAO, а угол COA на 90° больше, чем угол CBO. Докажите, что AO, BO и CO являются биссектрисами углов данного треугольника.*

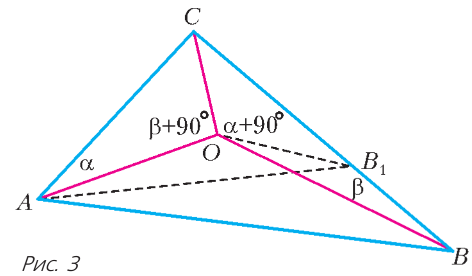

Рис. 3

Решение. Обозначим: $\angle CAO = \alpha$, $\angle CBO = \beta$. Тогда, по условию, $\angle COA = \beta + 90°$, $\angle COB = \alpha + 90°$. То, что *CO* – биссектриса угла *C*, очевидно, так как в каждом из треугольников *ACO* и *BCO* сумма двух углов одинакова (каждая из них равна $\alpha + \beta + 90°$).

Докажем теперь, что *AO* – биссектриса угла *CAB*. Предположим, что это не так. Возьмем тогда на стороне *CB* (или на ее продолжении) точку B_1 так, чтобы луч *AO* оказался биссектрисой угла CAB_1 (см. рис.3). При этом окажется, что *O* – точка пересечения биссектрис треугольника CAB_1. Тогда получаем (см. задачу 1), что $\angle COB_1 = \alpha + 90°$, а это противоречит условию – ведь $\angle COB = \alpha + 90°$. Следовательно, *AO* – биссектриса угла *A*. Но так как, кроме того, *CO* – биссектриса угла *C*, то *BO* – биссектриса угла *B*, что и требовалось.

Задача 3. *На сторонах OA_1 и OB_1 равностороннего треугольника A_1OB_1 (рис.4) построили внешним образом треугольники A_1OA и B_1OB так, что угол B_1OB на 60°*

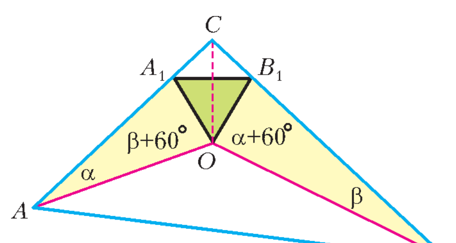

Рис. 4

больше, чем угол A_1AO, а угол A_1OA на 60° больше, чем угол B_1BO. Прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке C. Докажите, что AO, BO и CO являются биссектрисами углов треугольника ABC.

Решение. Обозначим: $\angle A_1AO = \alpha$, $\angle B_1BO = \beta$. Ясно, что $\angle AA_1O = \angle BB_1O$. Получается, что $\angle CA_1B_1 = \angle CB_1A_1$ (так как $\angle OA_1B_1 = \angle OB_1A_1 = 60°$), т.е. треугольник A_1CB_1 оказывается равнобедренным. Поэтому треугольники A_1OC и B_1OC равны (по трем сторонам), и каждый из углов A_1OC и B_1OC равен 30°. При этом $\angle BOC = \alpha + 90°$, а $\angle AOC = \beta + 90°$.

Следовательно (см. задачу 2), *AO*, *BO* и *CO* яляются биссектрисами треугольника *ABC*, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы Морлея

Пусть *ABC* – данный треугольник, а треугольник *XYZ* образован трисектрисами углов данного треугольника (рис.5). Докажем, что треугольник *XYZ* равносторонний.

Автор статьи – преподаватель школы «Шуву» из Иерусалима.

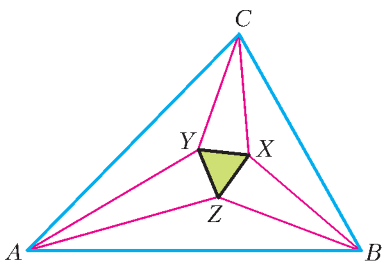

Рис. 5

Введем обозначения: $\angle A = 3\alpha$, $\angle B = 3\beta$, $\angle C = 3\gamma$. Рассмотрим произвольный равносторонний треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 6). Построим на стороне B_1C_1 треугольник $A_2B_1C_1$ так, чтобы $\angle A_2B_1C_1 = \gamma + 60°$, а $\angle A_2C_1B_1 = \beta + 60°$. Очевидно, что $\angle B_1A_2C_1 = \alpha$, так как $\alpha + \beta + \gamma = 60°$.

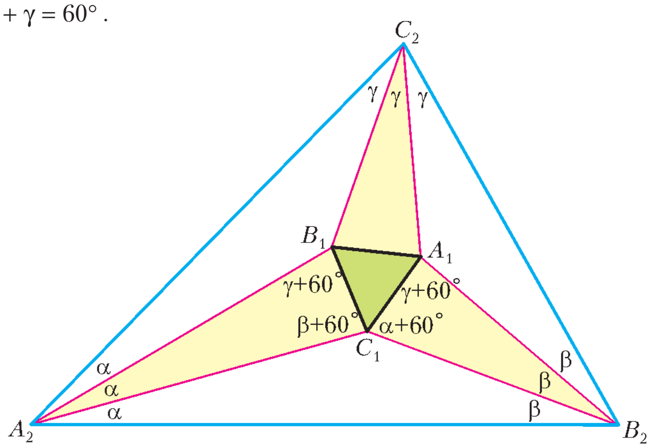

Рис. 6

Точно так же построим еще два треугольника $A_1C_1B_2$ и $A_1B_1C_2$ (см. рис.6).

Лучи A_2B_1 и B_2A_1 пересекутся в некоторой точке M, так как сумма углов $B_1A_2B_2$ и $A_1B_2A_2$ меньше 180 градусов. При этом для треугольника A_2B_2M выполняются условия задачи 3. Поэтому A_2C_1 будет биссектрисой угла $B_1A_2B_2$, а B_2C_1 будет биссектрисой угла $A_1B_2A_2$. Это означает, что $\angle C_1A_2B_2 = \alpha$, а $\angle C_1B_2A_2 = \beta$.

Аналогичный результат получается и в остальных случаях (для A_2B_1, C_2B_1, C_2A_1 и B_2A_1).

Таким образом, оказывается, что в треугольнике $A_2B_2C_2$ проведены *трисектрисы*, и они при своем пересечении определяют равносторонний треугольник. Но очевидно, что треугольники $A_2B_2C_2$ и ABC подобны (по углам). Следовательно, и треугольник XYZ также равносторонний. Теорема Морлея доказана.

Литература

1. Г.С.М.Коксетер, С.П.Грейтцер. *Новые встречи с геометрией*. – М.: Наука, 1978.

2. Г.Тонорян, И.Яглом. *Теорема Морлея*. – «Квант», №8, 1978.

3. З.А.Скопец. *Геометрические миниатюры*. – М.: Просвещение, 1990.

4. В.В.Прасолов. *Геометрия. Задачи по планиметрии*. – М.:МЦНМО, 2007.

5. A.Connes. *A new proof of Morley's theorem*. – Publications Mathématiques de l'IHÉS, S88 (1998).

От редакции

С момента открытия теоремы Морлея прошло уже больше века, но до сих пор эта необыкновенно красивая задача привлекает к себе внимание математиков. В англоязычной литературе ее иногда называют «Morley's Miracle» («чудо Морлея»). «Квант» уже писал об этой теореме в № 8 за 1978 год в статье Г.Тонояна и И.Яглома «Теорема Морлея», где приведены первые элементарные, но весьма непростые ее доказательства.

Мы предлагаем вашему вниманию еще два элегантных и коротких рассуждения, найденных не так давно. Первое принадлежит Дж.Конвею (изобретателю игры «Жизнь»), а второе взято из математического фольклора. Они близки по духу, но в каждом есть своя изюминка.

Советуем также заглянуть на сайт
http://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/
Там приведено больше десятка доказательств теоремы, в том числе принадлежащих и известным математикам.

Доказательство Конвея

Пусть углы исходного треугольника равны $3\alpha, 3\beta, 3\gamma$. Введем удобное обозначение: будем писать φ^* вместо $\varphi + 60°$. Тогда $\alpha + \beta + \gamma = 0^*$. Заметим, что существуют треугольники с углами $(0^*, 0^*, 0^*)$, $(\alpha, \beta^*, \gamma^*)$, $(\alpha^*, \beta, \gamma^*)$, $(\alpha^*, \beta^*, \gamma)$, $(\alpha^{**}, \beta, \gamma)$, $(\alpha, \beta^{**}, \gamma)$, $(\alpha, \beta, \gamma^{**})$, так как в каждом случае сумма углов равна $180°$. Теперь для каждой тройки углов построим конкретный треугольник с этими углами, специально подбирая длины сторон.

Для тройки $(0^*, 0^*, 0^*)$ это будет равносторонний треугольник со стороной 1.

Для тройки $(\alpha^*, \beta, \gamma^*)$ – это треугольник, в котором сторона, соединяющая вершины с углами α^* и γ^*, равна 1 (рис.1,*а*). Аналогично поступим с тройками $(\alpha, \beta^*, \gamma^*)$ и $(\alpha^*, \beta^*, \gamma)$.

Для тройки $(\alpha^{**}, \beta, \gamma)$ сделаем так. Рассмотрим треугольник BXC (рис.1,*б*), в котором угол при вершине B равен β, при вершине X равен α^{**}, а при вершине C равен γ. Через

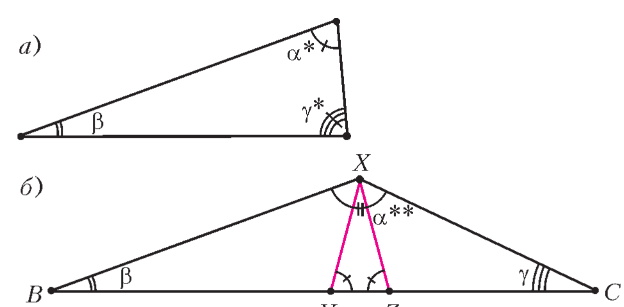

Рис. 1

вершину X проведем два луча, которые пересекают прямую BC в точках Y и Z под углом α^*, и подберем масштаб так, чтобы $XY = XZ = 1$. При этом сторона BX окажется равной стороне, лежащей против угла α^* в уже построенном треугольнике с углами α^*, β, γ^* (подумайте, почему). Это потребуется нам чуть дальше. Аналогично построим треугольники и для двух оставшихся троек такого вида.

Итак, мы получили 7 треугольников. Расположим их как показано на рисунке 2, и начнем придвигать их друг к другу, чтобы получился рисунок 3. Почему все так хорошо совпадет? Во-первых, суммы углов при всех внутренних вершинах

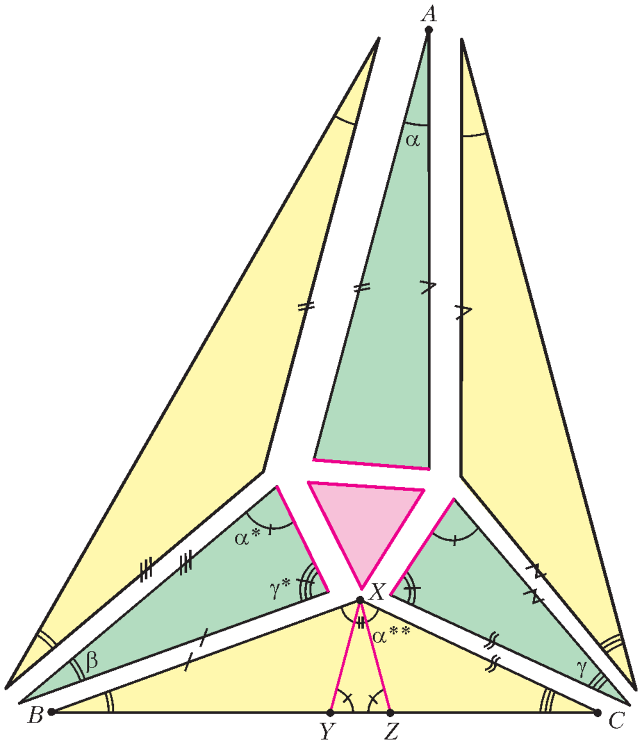

Рис. 2

равны 360°. Во-вторых, красный треугольник примыкает к зеленым по единичным отрезкам, а желтые треугольники примыкают к зеленым по равным отрезкам по построению (выше мы доказали это для треугольника BXC и треугольника с углами α^*, β, γ^*, аналогично рассматривается любая пара из желтого и зеленого треугольников).

Образовавшийся треугольник ABC подобен исходному по трем углам, а получившаяся картинка совпадает с той, что получится при проведении трисектрис. Поэтому и в исходном треугольнике образованный трисектрисами треугольник будет равносторонним.

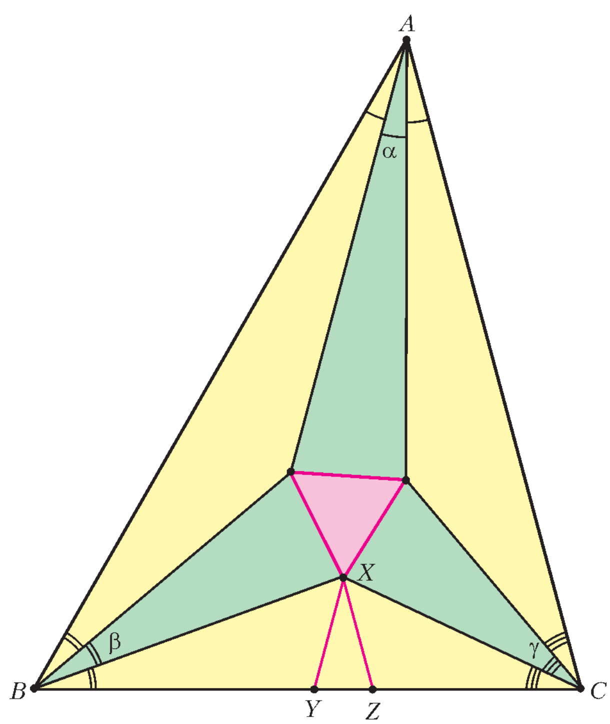

Рис. 3

Еще одно доказательство

Рассмотрим равносторонний треугольник XYZ и отразим его симметрично относительно каждой из сторон, получится

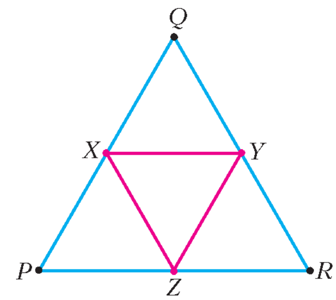

Рис. 4

треугольник PQR (рис.4). Пусть нам дан треугольник с углами 3α, 3β и 3γ. Тогда $\alpha+\beta+\gamma=60°$. Из точки X проведем луч, образующий угол γ с лучом XP, а из точки Z – образующий угол α с лучом ZP. Эти лучи обязательно пересекутся (в точке B), так как сумма углов, которые они образуют с отрезком XZ, меньше 180° (рис.5). Аналогично проведем лучи ZA и YA ($\angle RZA=\beta$, $\angle RYA=\gamma$). Ясно, что

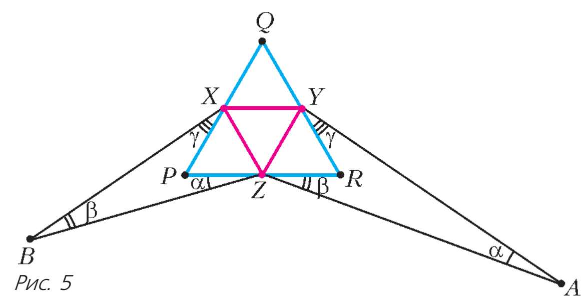

Рис. 5

угол при вершине B в треугольнике BXZ равен β, а угол при вершине A в треугольнике AZY равен α. Пусть прямая PR пересекает BX и AY в точках S и T соответственно (рис. 6). Треугольники SXZ и TYZ равны по стороне и двум прилегающим углам. Поэтому $SZ = TZ$. Далее, треугольники SBZ

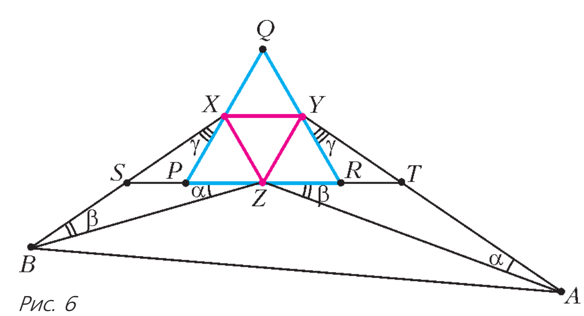

Рис. 6

и TZA подобны (в каждом есть углы α и β). Из двух последних утверждений получаем равенства $BZ:ZA = SZ:TA = TZ:TA$. Наконец, заметим, что $\angle BZA = \angle ZTA = 180° - \alpha - \beta$. Тогда треугольник BZA подобен треугольнику ZTA по двум сторонам и углу между ними. Таким образом, $\angle ZBA = \beta$, $\angle ZAB = \alpha$. Аналогичные рассуждения для точек X и Y вместо точки Z приведут нас к треугольнику ABC, углы которого равны 3α, 3β и 3γ. Этот треугольник подобен исходному, и, значит, снова теорема доказана.