ТЕОРЕМА МОРЛЕЯ. СТО ЛЕТ СПУСТЯ

Л.А.ЕМЕЛЬЯНОВ, Т.Л.ЕМЕЛЬЯНОВА (Калуга)

В 1904 г. Франком Морлеем была сформулирована и доказана теорема, которую впоследствии окрестили «последним великим открытием в планиметрии». Можно по-разному относиться к тому, что это «последнее открытие», но то, что это великое открытие, не вызывает сомнения. Начнем с формулировки:

Теорема Морлея. *Точки пересечения смежных трисектрис углов произвольного треугольника являются вершинами равностороннего треугольника* (рис. 1).

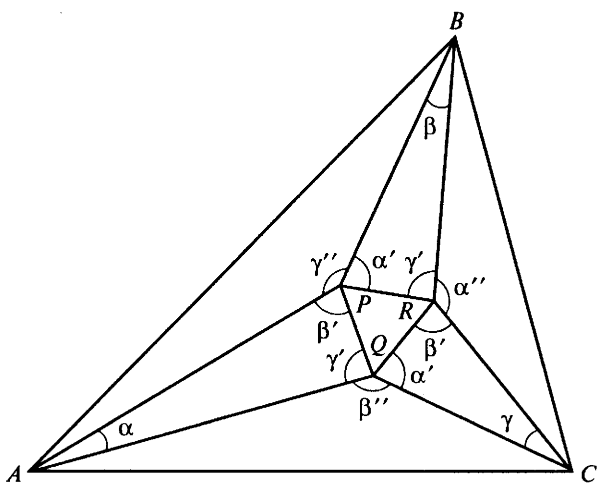

Рис. 1

Некоторые пояснения. Трисектрисами (по аналогии с биссектрисой) называются прямые, делящие угол треугольника на три равные части. *Смежными* будем называть трисектрисы, ближайшие к одной стороне.

Почему Франк Морлей выбрал именно эти трисектрисы и как он обнаружил этот равносторонний треугольник (который позже назвали его именем), остается загадкой, но впоследствии при компоновке трисектрис внутренних и внешних углов треугольника было обнаружено еще несколько равносторонних треугольников. Всего их получилось 18. Возможно, Морлей был первым, кто преодолел страх перед задачей о трисекции угла и решил исследовать такой загадочный объект, как трисектриса. Однако трисектриса до сих пор остается малоизученной прямой. Удивительным является и то, что эта теорема, носящая такой общий характер, стоит в планиметрии как-то особняком, т.е. она мало связана с другими теоремами и фактами. Попробуем хотя бы частично устранить эту отчужденность.

Проведем рассуждение «обратным ходом», используя однозначность построения треугольника Морлея.

Доказательство. Пусть PQR – равносторонний треугольник. Зададим положительные числа α, β, γ так, чтобы $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{3}$. Определим $\alpha'=\alpha+\frac{\pi}{3}$, $\alpha''=\alpha+\frac{2\pi}{3}$. Аналогично для β и γ:

$$\beta'=\beta+\frac{\pi}{3},\ \ \beta''=\beta+\frac{2\pi}{3};$$

$$\gamma'=\gamma+\frac{\pi}{3},\ \ \gamma''=\gamma+\frac{2\pi}{3}.$$

Отметим точку A так, чтобы $\angle AQP=\gamma'$ и $\angle APQ=\beta'$. Тогда

$$\angle QAP=\pi-(\beta'+\gamma')=\pi-\left(\beta+\gamma+\frac{2\pi}{3}\right)=\alpha.$$

Аналогично построим точки B и C (рис. 1).

Для доказательства, например, того, что AQ – трисектриса, достаточно показать, что $\angle CAQ=\alpha$. По теореме синусов, примененной к треугольнику AQC, а затем к треугольникам CQR и AQP, в силу того, что $QR=QP$, заключаем

$$\frac{\sin\angle CAQ}{\sin\angle ACQ}=\frac{QC}{QA}=\frac{QC}{QR}\cdot\frac{QP}{QA}=\frac{\sin\beta'}{\sin\gamma}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\beta'}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

С учетом того, что $\angle CAQ+\angle ACQ=\pi-\beta''=\alpha+\gamma$, получаем, что $\angle CAQ=\alpha$, $\angle ACQ=\gamma$.

Существует несколько доказательств теоремы Морлея. А вспомогательное рассуждение, приведенное здесь – не самое естественное, но самое короткое, и именно оно понадобится для дальнейшего изложения. Другие доказательства можно прочитать в книге Д.О.Шклярского, Н.Н.Ченцова и И.М.Яглома «Избранные задачи и теоремы элементарной математики». Часть II. Геометрия (планиметрия). Можно обратиться также к статье «Теорема Морлея», написанной Э.Г.Готманом и З.А.Скопецом и опубликованной в № 1 нашего журнала за 1983 г.

Прежде чем далее говорить о теореме Морлея, вспомним другой объект элементарной геометрии, тоже не очень популярный в школьном курсе.

Теорема (прямая Симсона). *Проекции произвольной точки описанной окружности треугольника на его стороны лежат на одной прямой.*

Существование этой прямой было установлено в 1797 г. Вильямом Уоллесом, но историки математики почему-то решили «отдать» эту прямую

Симсону, жившему позже. Непонятно, но эта ситуация типична для авторства многих теорем в математике.

Доказательство. Пусть A_1, B_1 и C_1 – проекции точки P на стороны треугольника BC, CA и AB соответственно (рис. 2).

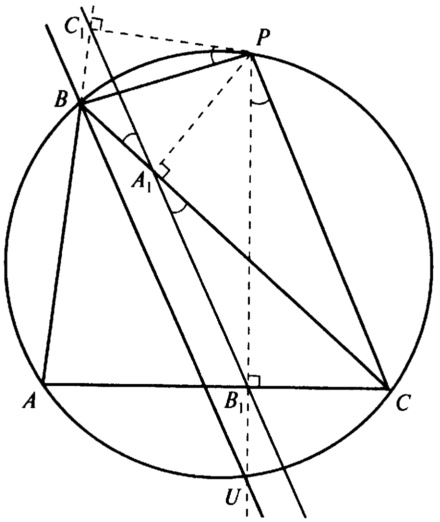

Рис. 2

Четырехугольник B_1AC_1P – вписанный, следовательно, $\angle BPC = \pi - \angle A = \angle C_1PB_1$, отсюда $\angle B_1PC = \angle C_1PB$. Но так как четырехугольник A_1PCB_1 – вписанный, то $\angle B_1PC = \angle B_1A_1C$, и так как четырехугольник A_1BC_1P – вписанный, то $\angle C_1PB = \angle C_1A_1B$. Таким образом $\angle B_1A_1C = \angle C_1A_1B$. Следовательно, точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

Следствие. Продолжим отрезок PB_1 до пересечения с описанной окружностью в точке U (рис. 2). Поскольку четырехугольники $PBUC$ и PA_1B_1C – вписанные, то $\angle PUB = \angle PCB = \angle PCA_1 = \angle PB_1A_1$. Поэтому прямая BU параллельна прямой Симсона A_1B_1.

Окружность девяти точек. Окружность, проходящая через середины сторон треугольника, проходит также через основания высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами треугольника.

Тот факт, что треугольники, образованные основаниями высот и серединами сторон, имеют общую описанную окружность, был обнаружен в 1765 г. Леонардом Эйлером. Остальные три из указанных девяти точек «получили свое место» на этой окружности позже и были названы в честь первооткрывателя точками Эйлера.

Известно, что прямая Симсона делит пополам отрезок, соединяющий точку, порождающую эту прямую, с ортоцентром треугольника. А так как ортоцентр есть внутренний центр гомотетии с коэффициентом 2 описанной окружности и окружности девяти точек, середина указанного отрезка лежит на окружности девяти точек. (Доказательство этих фактов можно прочитать в упомянутой выше книге «Избранные задачи и теоремы элементарной математики».) Отсюда, например, следует, что прямая Симсона любой точки пересекает окружность девяти точек.

Поставим такой вопрос: может ли прямая Симсона касаться окружности девяти точек, и если «да», то для каких точек описанной окружности это справедливо?

Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. На описанной окружности существуют ровно три точки, такие, что прямые Симсона, порожденные ими, касаются окружности девяти точек, причем

эти точки образуют равносторонний треугольник, образованный ими треугольник гомотетичен треугольнику Морлея.

Замечание. Нетрудно понять, что точки касания указанных прямых Симсона с окружностью девяти точек также образуют равносторонний треугольник, а также то, что касательные к описанной окружности, проведенные в трех указанных точках, параллельны сторонам треугольника Морлея и, следовательно, также образуют равносторонний треугольник.

Для доказательства этой теоремы достаточно убедиться в том, что если прямая Симсона касается окружности девяти точек, то она параллельна одной из сторон треугольника Морлея, т.е. обе они составляют одинаковые углы с соответствующей стороной исходного треугольника.

Доказательство. Пусть A' – одна из указанных трех точек, т.е. s – ее прямая Симсона, касается окружности девяти точек. Точки A_1, B_1, C_1 – проекции точки A' на стороны треугольника, O – центр описанной окружности, c_9 – окружность девяти точек (рис. 3).

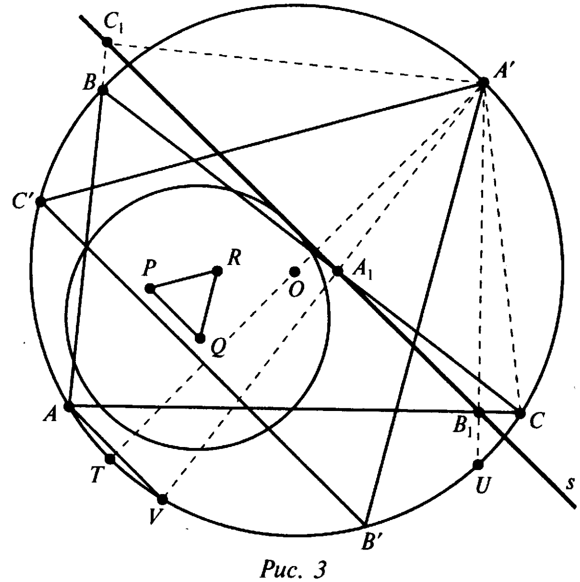

Рис. 3

Найдем угол между прямыми s и BC (назовем его φ), т.е. выразим его через величины углов треугольника ABC. Для определенности будем считать, что $\angle A > \angle C$.

Воспользуемся тем, что окружность девяти точек и описанная окружность гомотетичны относительно ортоцентра H треугольника. Поскольку середина отрезка $A'H$, с одной стороны, лежит на окружности девяти точек, а с другой стороны – на прямой s, и это единственная точка их пересечения, образом прямой s при указанной гомотетии будет касательная к описанной окружности, проведенная в точке A', и эта касательная будет параллельна прямой s. Отсюда следует, что $A'O \perp s$. Так как и $A'A_1 \perp BC$, то $\angle OA'A_1 = \varphi$ как углы с соответственно перпендикулярными сторонами.

Пусть U и V – вторые точки пересечения прямых $A'B_1$ и $A'A_1$ с описанной окружностью. По *следствию* из теоремы Морлея, получаем $BU \parallel s$ и $AV \parallel s$. Следовательно, $A'O \perp AV$, значит, $\cup AV = 4\varphi$.

Точки A', A_1, B_1, C лежат на одной окружности, поскольку $\angle A'A_1C = \frac{\pi}{2} = \angle A'B'C$, следовательно, $\angle B_1A'C = \angle B_1A_1C = \varphi$, т.е. $\cup UC = 2\varphi$. Так как $AV \parallel BU$, то $\cup VU = \cup AB = 2\angle C$.

«Соберем» описанную окружность:

$$2\pi = \cup AV + \cup VU + \cup UC + \cup CB + \cup BA = \\ = 4\varphi + 2\angle C + 2\varphi + 2\angle A + 2\angle C.$$

Отсюда $\varphi = \dfrac{\angle B - \angle C}{3}$.

Теперь посчитаем угол между стороной PQ треугольника Морлея и прямой BC (рис. 4). Назовем его ψ. В вычислениях будем использовать обозначения углов, введенные при доказательстве теоремы Морлея (α, β, γ ...).

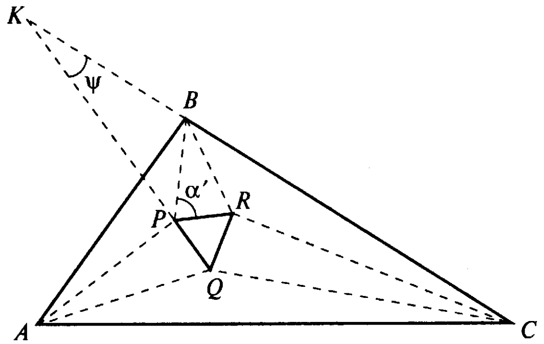

Рис. 4

Пусть K – точка пересечения прямых BC и PQ (возможно, бесконечно удаленная); $\angle KPR = \dfrac{2\pi}{3}$ как внешний угол правильного треугольника PQR. Следовательно, $\angle KPB = \dfrac{2\pi}{3} - \alpha' = \dfrac{2\pi}{3} - \alpha - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} - \alpha$. Далее

$$\psi = \pi - \angle KBP - \angle KPB = 2\beta - \frac{\pi}{3} + \alpha = \\ = (\alpha + \beta + \gamma) + \beta - \gamma - \frac{\pi}{3} = \beta - \gamma = \frac{\angle B - \angle C}{3}.$$

Итак, $\psi = \varphi$. Следовательно, прямая Симсона точки A' параллельна стороне PQ треугольника Морлея. Аналогично для точек B' и C'. Значит, треугольники $A'B'C'$ и RQP гомотетичны. Теорема доказана.

Казалось бы, на этом можно и завершить разговор о теореме Морлея. Однако хочется, чтобы этот материал стал началом для изучения свойств треугольника Морлея, ведь для пытливого ума любая фундаментальная теорема порождает больше вопросов, чем ответов. Например, нетрудно доказать, что исходный треугольник и его треугольник Морлея перспективны, т.е. прямые AR, BQ и CP пересекаются в одной точке. Что это за точка, является ли она какой-либо известной точкой для треугольников ABC или PQR, лежит ли она на какой-либо известной прямой? Или другой, вполне естественный вопрос: что такое центр гомотетии треугольников $A'B'C'$ и RQP?

Фантазируйте, задавайте себе вопросы, выдвигайте идеи, ведь современный компьютер легко позволяет проверить и подтвердить или опровергнуть многие геометрические гипотезы. К счастью, он (компьютер) все же не может эти гипотезы доказывать, для этого нужна геометрическая интуиция и мозги, но в развитии того и другого он может помочь.