Кстати, дифракция должна происходить и на входном зрачке любого глаза (он ведь тоже вырезает кусок фронта волны). Значит, параллельные лучи и в самом здоровом глазе соберутся на сетчатке не в точку (как обещает геометрическая оптика), а в кружок, радиус которого приближенно равен

$$r \approx \frac{\lambda}{d} D,$$

где D – диаметр глазного яблока, d – диаметр зрачка.

Природа распорядилась так, что глаз человека имеет наиболее четкое изображение на сетчатке при диаметре зрачка d = 3 мм. Это связано с размером светочувствительных клеток. Так называемое желтое пятно, на которое проецируется изображение, выстлано пятнадцатью тысячами колбочек. Это площадка с угловым размером $1{,}5° \approx 1/40$ рад. Значит, на каждую клетку-колбочку приходится угол

$$\alpha = \frac{1}{40\sqrt{15000}} \text{ рад} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ рад}.$$

А угол дифракции при d = 3 мм равен

$$\theta^{(1)}_{\min} = \frac{\lambda}{d} = \frac{0{,}5 \cdot 10^{-6} \text{м}}{3 \cdot 10^{-3} \text{м}} \text{ рад} \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ рад},$$

т.е. он того же порядка, что и угол α.

Можно еще раз удивиться, как мудро природа «приладила» друг к другу все эти характерные размеры для условий жизни в лучах Солнца!

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Ортоцентр, середина стороны, точка пересечения касательных и... еще одна точка!

Ю.БЛИНКОВ

В ЭТОЙ СТАТЬЕ БУДЕТ РАССМОТРЕНА СЛЕДУЮЩАЯ ГЕОметрическая конструкция. Пусть AA_1 и BB_1 – высоты остроугольного[1] неравнобедренного треугольника ABC, а ω и ω_1 – окружности, описанные около треугольников ABC и A_1B_1C соответственно, точки O, O_1 – их центры. Пусть ω и ω_1 повторно пересекаются в точке P. Оказывается, эта точка обладает некоторыми интересными свойствами, о которых и пойдет речь ниже.

Основные факты в статье пронумерованы и называются **задачами**, а вспомогательные утверждения – **леммами**. Кроме того, в тексте есть **упражнения** (некоторые дополнительные свойства рассматриваемой конструкции). В статье они приводятся без решений. Указания к решениям упражнений и доказательствам фактов также приведены в разделе «Ответы, указания, решения.» Без решений приводятся и некоторые известные факты – вспомогательные **утверждения** (свойства ортоцентра, окружностей, гомотетии, симедианы). Доказательства этих фактов можно найти, например, в задачнике В.В.Прасолова.

Многие из рассматриваемых здесь задач предлагались на различных олимпиадах (иногда формулировки несколько изменены по сравнению с предлагавшимися на олимпиадах), причем некоторые – в качестве сложных. Но если разобраться в конструкции (что и предлагаем сделать читателю!), задачи становятся вполне по силам и «непрофессионалам».

***

Итак, рассмотрим свойства точки P. Для начала «свяжем» ее с высотами и серединой стороны. Но прежде сформулируем следующее важное свойство ортоцентра (точки пересечения высот):

Утверждение 1. *Точка, симметричная ортоцентру относительно середины стороны AB треугольника ABC, лежит на его описанной окружности и диаметрально противоположна точке C.*

Задача 1. *Докажите, что точки M (середина AB), H (ортоцентр) и P лежат на одной прямой.*

Решение. Так как CH – диаметр окружности ω_1 ($\angle CA_1H = 90°$), то $\angle CPH = 90°$ (рис.1). Таким образом, точка пересечения прямой PH с окружностью ω диаметрально противоположна точке C.

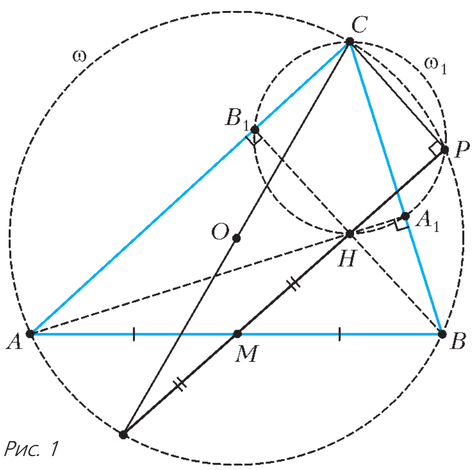

Рис. 1

С другой стороны, точка, симметричная H относительно M, диаметрально противоположна точке C (утверждение 1). Следовательно, прямые PH и MH совпадают, что и требовалось.

Задача 2. *а) Окружности, описанные около треугольников* AMA_1 *и* BMB_1*, проходят через точку P.*[2] *б)* PM –

[1] Конечно, утверждения, аналогичные рассматриваемым в этой заметке, верны и для тупоугольных треугольников.

[2] Еще несколько свойств этих окружностей предлагаем читателям доказать самостоятельно (упражнения 1 и 3).

биссектриса углов APA_1 и BPB_1. в) Прямая PA проходит через точку, симметричную точке A_1 относительно прямой CH. Докажите эти утверждения.

Решение. а) Заметим, что $\angle MAA_1 = 90° - \angle ABC = \angle HCA_1 = \angle HPA_1 = \angle MPA_1$ (рис.2), т.е. точки A, M, A_1 и

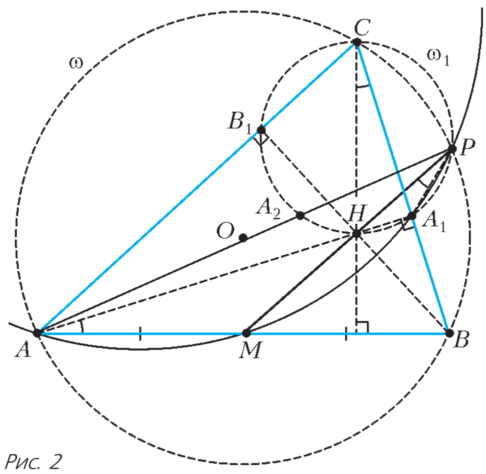

Рис. 2

P лежат на одной окружности. Для точек B, M, B_1 и P доказательство аналогично.

б) Из а) и равенства $MA = MA_1$ (MA_1 – медиана прямоугольного треугольника ABA_1) следует, что PM – биссектриса $\angle APA_1$.

в) Пусть PA пересекает вторично окружность ω_1 в точке A_2. Так как PM – биссектриса угла APA_1, то дуги HA_1 и HA_2 равны, значит A_1 и A_2 симметричны относительно диаметра CH окружности ω_1.

Упражнение 1. Пусть L_1 и L_2 – вторые точки пересечения окружности, описанной около треугольника AMA_1, с прямыми BC и AC соответственно, а K_1 и K_2 – вторые точки пересечения окружности, описанной около треугольника BMB_1, с прямыми AC и BC соответственно. Тогда:

а) L_1, K_1, M и O лежат на одной прямой;

б) (Ю.Блинков, Московская устная олимпиада по геометрии, 2011) L_2, K_2, M и O_1 лежат на одной прямой;

в) L_1, K_1, L_2, K_2 лежат на одной окружности;

г) прямые L_1L_2, K_1K_2 и PM пересекаются в одной точке.

***

Для дальнейшего нам понадобится следующее свойство окружностей:

Утверждение 2. *Пусть даны три окружности, из которых каждые две пересекаются. Тогда прямые, содержащие их общие хорды, пересекаются в одной точке (эта точка называется радикальным центром данных окружностей) или параллельны.*

Добавим в конструкцию прямую A_1B_1. Пусть прямые A_1B_1 и AB пересекаются в точке S.

Задача 3. *Докажите, что точки C, P и S лежат на одной прямой.*

Решение. Рассмотрим общие хорды трех окружностей: ω, ω_1 и окружности ω_2 с диаметром AB (рис.3). Прямые AB, A_1B_1 и CP пересекаются в одной точке, откуда следует утверждение задачи.[3]

Вернемся к нашей конструкции. Проведем медиану CM. Из задачи 3 можно получить, например, такие утверждения, в которых точка P присутствует в «неявном виде».

[3] *Комментарий для знатоков.* Точка P – точка Микеля для прямых AC, BC, AB и A_1B_1. Прямая CS – поляра точки H относительно окружности ω_2.

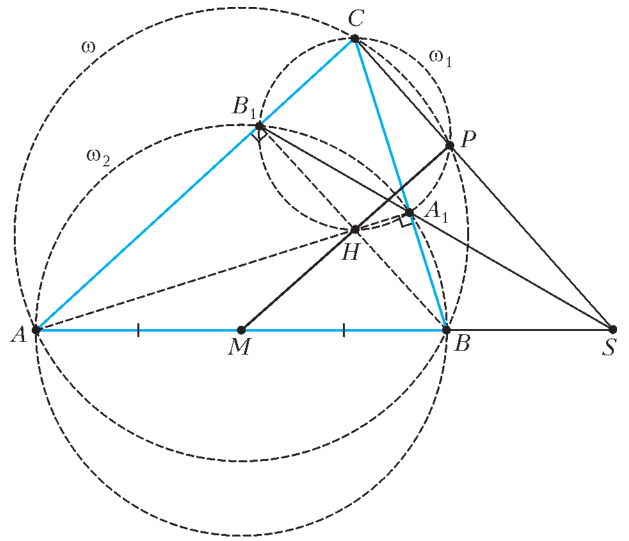

Рис. 3

Упражнение 2 (М2187). Докажите, что прямые SH и CM перпендикулярны.

Задача 4 (Ф.Ивлев, Московская устная олимпиада по геометрии, 2013). *Пусть R – середина CM. Докажите, что $OR \perp SC$.*

Решение. Заметим, что CP – хорда окружности ω (рис.4), т.е. O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку CP.

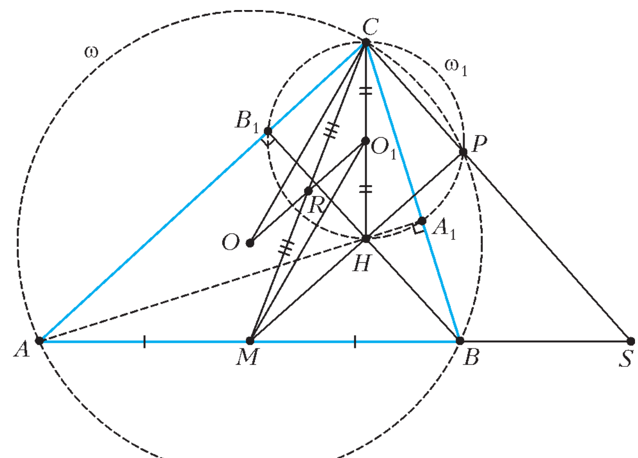

Рис. 4

Из задачи 1 следует, что $\angle CPM = 90°$. Поэтому R – середина гипотенузы прямоугольного треугольника CPM, а значит, также лежит на серединном перпендикуляре к отрезку CP. Учитывая, что C, P и S лежат на одной прямой (задача 3), получим требуемое.[4]

***

Продолжим, добавив в конструкцию касательные к окружности ω. Нам понадобятся дополнительно следующие факты, связанные с высотами:

Утверждение 3. *Касательные к описанной окружности треугольника, проведенные через его вершины, параллельны сторонам его ортотреугольника.*[5]

[4] Отметим, что точка R – середина OO_1. Этот факт следует из того, что OCO_1M – параллелограмм. Отсюда можно получить другой способ решения задачи 4.

[5] Ортотреугольник – это треугольник с вершинами в основаниях высот.

Утверждение 4. *Ортоцентр треугольника является центром вписанной окружности его ортотреугольника.*

Пусть касательные, проведенные в точках A и B к окружности ω, пересекают прямую A_1B_1 в точках X и Y соответственно и пересекаются в точке Z (рис.5). Докажем важную для дальнейшего лемму.

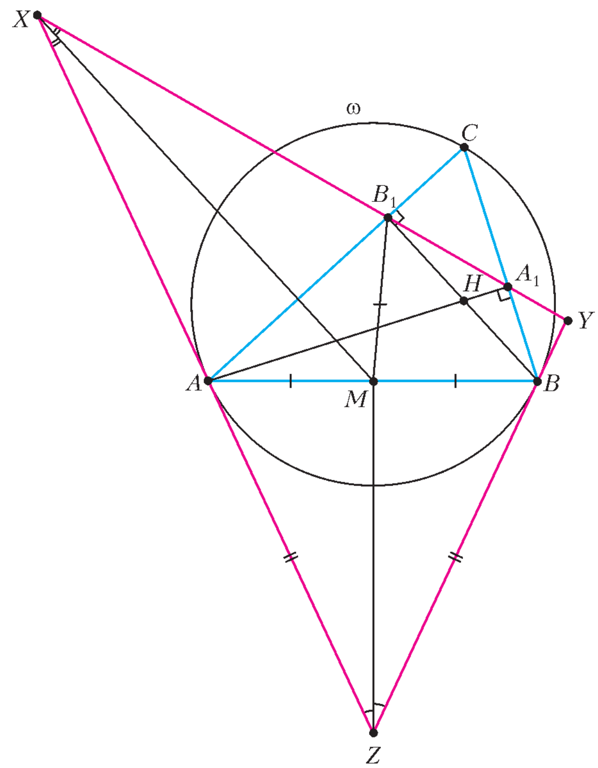

Рис. 5

Лемма 1. *M – центр вписанной окружности треугольника XYZ.*

Доказательство. 1) Так как $ZA = ZB$, то ZM – биссектриса угла XZY (см. рис.5).

2) Заметим, что $MA = MB_1$, т.е. M лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB_1. Из касания угол XAC равен углу B, но из утверждения 3 угол XB_1A также равен углу B. Значит, треугольник XAB_1 равнобедренный, и точка X тоже лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB_1, который является биссектрисой $\angle AXB_1$. Итак, M лежит на биссектрисе $\angle AXB_1$, что и требовалось.

Упражнение 3 (Ю.Блинков, турнир математических боев им. А.П.Савина, 2011). Докажите, что окружности, описанные около треугольников AMA_1 и BMB_1, проходят через точки X и Y соответственно.[6]

Далее мы неоднократно встретим треугольники с соответственно параллельными сторонами. Два таких треугольника гомотетичны (т.е. существует центр гомотетии, переводящей один из треугольников в другой), или же существует параллельный перенос, переводящий один из треугольников в другой. Прямые, соединяющие соответствующие вершины двух гомотетичных треугольников, пересекаются в центре гомотетии. Более того, верно следующее:

Утверждение 5. *Прямые, соединяющие соответствующие точки (например, точки пересечения высот, биссектрис, медиан и т.д.) двух гомотетичных треугольников, пересекаются в центре гомотетии.*

Упомянутые соображения являются мощным инструментом. Скажем, из утверждений 3, 4, 5 вытекает, что треугольник, образованный касательными, проведенными к ω в точках A, B, C, и ортотреугольник гомотетичны, причем прямая OH (она соединяет центры вписанных окружностей этих треугольников) проходит через центр гомотетии.

Используя вспомогательные утверждения и лемму 1, можно решить, например, следующую непростую задачу.

Упражнение 4 (Ю.Блинков, турнир математических боев им. А.П.Савина, 2008). Прямые MH, A_1B_1 и ZC_1 пересекаются в одной точке (C_1 – основание высоты из вершины C.) Докажите это.

Ну, а что же точка P? Оказывается, она имеет к данной конструкции самое непосредственное отношение.

Задача 5 (Ю.Зайцева, Московская устная олимпиада по геометрии, 2012). *Докажите, что описанные окружности треугольников ABC и XYZ касаются в точке P.*

Для решения этой трудной задачи нам опять потребуется вспомнить еще два факта и доказать лемму.

Утверждение 6. *Точки H_a, H_b и H_c, симметричные ортоцентру относительно соответствующих сторон треугольника ABC, лежат на его описанной окружности и образуют треугольник, гомотетичный ортотреугольнику.*

Утверждение 7 (основное свойство симедианы). *Треугольник ABC вписан в окружность. Касательные к окружности, проведенные в точках A и B, пересекаются в точке Z. Тогда прямая CZ содержит симедиану (прямую, симметричную медиане CM относительно биссектрисы угла C) треугольника ABC.*

Лемма 2. *Точки Z, P и H_c лежат на одной прямой.*

Доказательство. Согласно основному свойству симедианы, PZ – симедиана треугольника PAB. Остается понять, что H_c также лежит на симедиане. Ясно, что точка H' из утверждения 1 (симметричная H относительно M) симметрична точке H_c относительно серединного перпендикуляра к AB (рис.6). Тогда дуги AH' и BH_c равны, поэтому

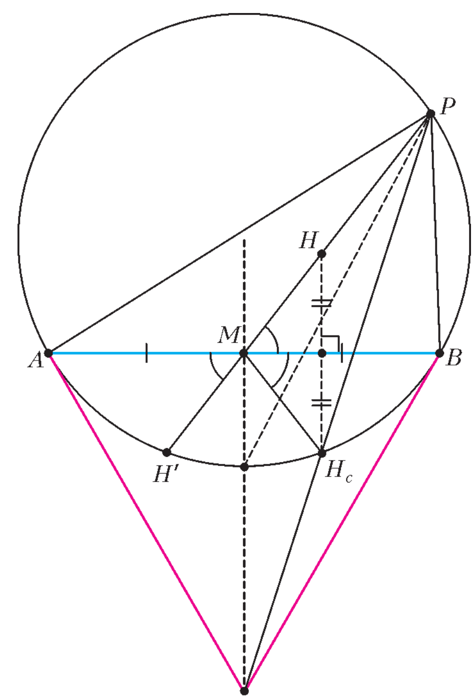

Рис. 6

[6] Можно вначале, используя счет углов, решить упражнение 3 и вывести из него лемму 1.

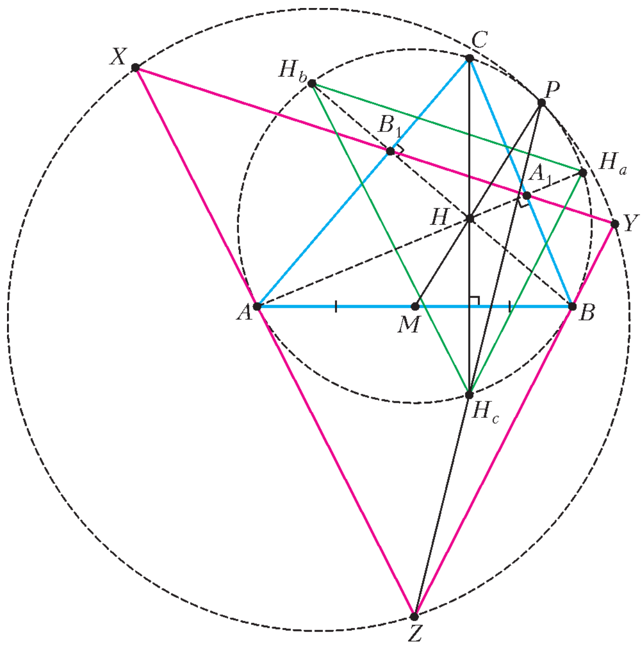

Рис. 7

прямые PH' (медиана) и PH_c симметричны относительно биссектрисы угла APB. Лемма доказана.

Решение задачи 5. Так как P принадлежит первой из окружностей, то достаточно доказать, что P – центр гомотетии, переводящей первую окружность во вторую. Рассмотрим треугольники YXZ и $H_aH_bH_c$ (рис.7). Заметим, что:

1) H – центр вписанной окружности треугольника $H_aH_bH_c$;

2) треугольники YXZ и $H_aH_bH_c$ гомотетичны;

3) так как треугольник $H_aH_bH_c$ вписан в окружность, описанную около треугольника ABC, то при этой гомотетии окружности перейдут друг в друга;

4) Из леммы 1 и предыдущих пунктов следует, что центр гомотетии лежит на прямых MH и ZH_c, т.е. на их пересечении. Учитывая лемму 2, получаем, что центр гомотетии совпадает с P, что и требуется.[7]

И, наконец, последнее. В упражнении 4 была рассмотрена прямая ZC_1. Через точку P, в отличие от прямой ZH_c, она не проходит, но зато верно следующее утверждение, похожее на упражнение 4.

Задача 6 (Ю.Блинков, Московская устная олимпиада по геометрии, 2011). *Прямые AP, BC и ZC_1 пересекаются в одной точке. Докажите это.*

Решение. Пусть A_2 – точка, симметричная A_1 относительно высоты CC_1 (рис.8). Согласно задаче 2 и утверждению 4, A_2 лежит на прямых AP, B_1C_1 и на окружности ω_1.

Вспомним, что $B_1C_1 \parallel AZ$; $A_1C_1 \parallel BZ$ (утверждение 3). Кроме того, $A_2A_1 \parallel AB$ (обе прямые перпендикулярны высоте) (рис.9). Таким образом, у равнобедренных треугольников AZB и $A_2C_1A_1$ соответствующие стороны параллельны, следовательно, эти треугольники гомотетичны, причем центр гомотетии лежит на пересечении прямых AA_2, BA_1 и ZC_1.

[7] Возможен и другой способ решения задачи 5 – через свойства полувписанной окружности (см. http://problems.ru/view_problem_details_new.php?id=116754)

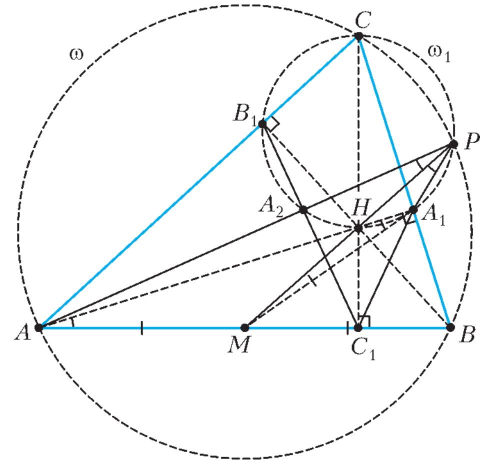

Рис. 8

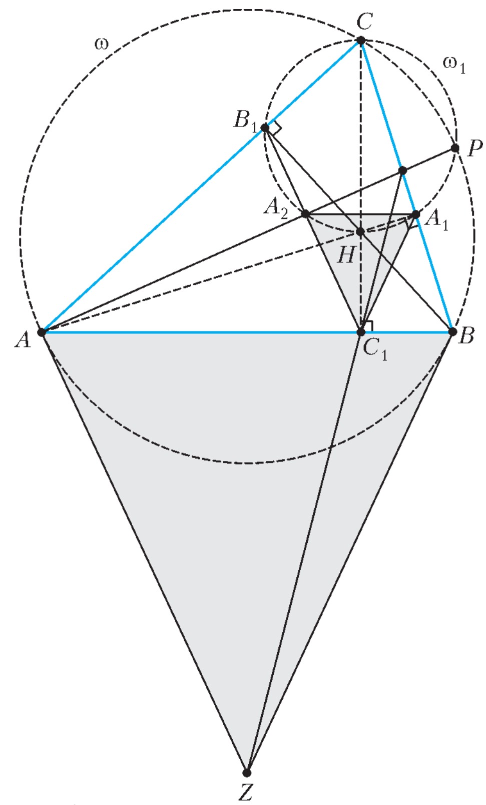

Рис. 9

Следовательно, прямые AP, BC и ZC_1 пересекаются в одной точке.[8]

Автор благодарен П.А.Кожевникову за ценные замечания, способствовавшие существенному улучшению текста статьи, А.Д.Блинкову за полезные обсуждения и Е.С.Горской – за выполнение эскизов рисунков.

[8] Раздаточный материал кружкового занятия по этой статье доступен на http://geometry.ru/persons/blinkov_yura/tochka_P.pdf