иммерсионная техника (от латинского immersio – погружение).

Но коэффициенты преломления жидкостей не намного превышают единицу: например, для бензола $n \approx 1{,}5$, для бромоформа $n \approx 1{,}6$. Так что правы те, кто говорят, что микроскоп не может разрешить расстояния, существенно меньшие половины длины волны.

А вот тут начинается то, чего не знал сам Аббе. В 1924 году французский физик Луи де Бройль развил идею о том, что материальной частице с импульсом mv можно сопоставить волну с длиной

$$\lambda = \frac{h}{mv},$$

где $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж · с – постоянная Планка. Например, если ускорить электрон в электрическом поле с разностью потенциалов U, то он приобретет скорость

$$v = \sqrt{\frac{2Ue}{m_e}},$$

где $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд электрона, $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг – его масса. Значит, длина волны электрона, согласно де Бройлю, будет равна

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_eUe}}.$$

Так, при разности потенциалов U = 1В (характерной для обычной батарейки) получим

$$\lambda = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}} \text{ м} \approx 10^{-9} \text{ м} = 1 \text{ нм}.$$

При этом, согласно теории Аббе, становится возможным рассматривать объекты молекулярных размеров! Это уже не микроскоп, а, можно сказать, наноскоп. Правда, он называется по-прежнему микроскопом, только *электронным*.

Обратим еще внимание на то, что в знаменателе выражения для длины волны де Бройля стоит масса частицы. А что если взять не электроны, а ионы каких-то элементов или даже молекулярные ионы? Поскольку они на много порядков массивнее электрона, их дебройлевская длина волны может быть значительно уменьшена. Вместе с нею уменьшится и различимое расстояние между двумя точками A и B. Так получился *ионный* микроскоп.

Завершим наш рассказ словами из книги английского физика Г.Липсона «Великие эксперименты в физике» (М.: Мир, 1972): «Можно сказать, что оптическая промышленность обязана теории больше, чем любая другая отрасль. Здесь теория выступала не только как обобщение практики, но и как путеводная нить».

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

О двух велосипедистах и вишневой косточке

В.ПРОТАСОВ

Год спустя я снова охотился в том же лесу. Конечно, к тому времени я совсем позабыл об истории с вишневой косточкой. Каково же было мое изумление, когда из чащи леса прямо на меня выпрыгнул великолепный олень, у которого между рогами росло высокое, развесистое вишневое дерево!

Э.Распэ. Приключения барона Мюнхгаузена

И все это выросло из задачи 1, совсем простенькой и неинтересной, которую мы вначале и решать-то не хотели.

Последняя фраза этой статьи

Мы не случайно вынесли в эпиграф фразу из истории «Необыкновенный олень» о приключениях барона Мюнхгаузена. Как известно, однажды на охоте барон выстрелил в оленя вишневой косточкой, и через некоторое время на голове оленя выросло роскошное вишневое дерево. Мы попробуем проследить, каким образом из косточки вырастает дерево. А именно, как из простой одноходовой задачи получается целая серия красивых геометрических теорем. В качестве вишневой косточки возьмем такую задачу:

Задача 1. *В трапеции ABCD боковая сторона BC перпендикулярна основаниям. Тогда середина стороны AD равноудалена от вершин B и C.*[1]

«Ну и что же тут решать?» – спросите вы. И будете правы. Задача – совершенно элементарная. Может, следует заняться более интересными вещами? Обязательно, но сначала все-таки приведем решение.

Решение. Обозначим середины сторон AD и BC через K и L соответственно (рис.1). Поскольку KL – средняя линия трапеции, она параллельна основаниям, следовательно она перпендикулярна BC. Таким образом, KL – серединный перпендикуляр к стороне BC, поэтому $KB = KC$.

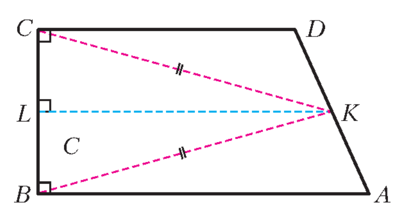

Рис. 1

Удивительно, что эта «косточка», которая является даже не задачей, а скорее школьным упражнением, дает начало множеству замечательных геометрических фактов. Среди них есть и сложные задачи, опубликованные в различных сборниках, и одна из «теорем о бабочке», и две задачи, предлагавшиеся в разные годы на Международной математической олимпиаде. В качестве первого шага мы докажем следующее утверждение, уже более интересное и трудное:

[1] *Задачи и упражнения мы будем формулировать в виде утверждений, слова «Докажите, что ...», как правило, будем опускать.*

Задача 2. *Даны две окружности, пересекающиеся в точках A и B. Тогда на плоскости найдется точка K с таким свойством: если провести через точку A произвольную прямую, пересекающую окружности вторично в точках P_1 и P_2, то K будет равноудалена от середин хорд AP_1 и AP_2.*

Решение. Центры данных окружностей (обозначим их через O_1 и O_2) вместе с серединами отрезков AP_1 и AP_2 являются вершинами прямоугольной трапеции. Применив к ней результат задачи 1, получим, что середина отрезка O_1O_2 и есть искомая точка K.

Простота решения во многом, конечно, кажущаяся. Задача из серии «решается легко, если знать как». Все-таки нужно сначала установить положение точки K, затем увидеть на чертеже прямоугольную трапецию... Для нас же важно то обстоятельство, что в решении не использовано ничего, кроме результата задачи 1. Математики в таких случаях говорят, что задача 2 есть прямое следствие задачи 1. Сделаем второй шаг и перейдем к еще одному прямому следствию:

Задача 3. *Даны две окружности, пересекающиеся в точках A и B. Тогда на плоскости найдется точка с таким свойством: если провести через точку A произвольную прямую, пересекающую окружности вторично в точках P_1 и P_2, то эта точка будет равноудалена от P_1 и P_2.*

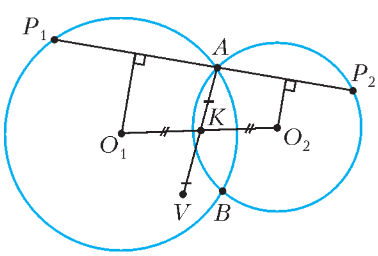

Рис. 2

Решение. Из задачи 2 мы знаем, что точка K, середина отрезка O_1O_2, равноудалена от середин хорд AP_1 и AP_2. Растянем плоскость в два раза относительно точки A (т.е. проведем гомотетию с коэффициентом 2 с центром A). При этом середины данных хорд перейдут в точки P_1 и P_2, а точка K – в точку V такую, что отрезок AV будет иметь середину в точке K (рис.2). Получаем, что V равноудалена от точек P_1 и P_2.

Здесь пора сделать остановку и задуматься. Несмотря на короткое решение, задача 3 справедливо считается трудной. В разных видах она появлялась и в известных сборниках, и на олимпиадах высокого уровня. А ведь по сути в ней нет ничего, кроме элементарного свойства прямоугольной трапеции, установленного в задаче 1. Как же так получилось, что одно простое действие (гомотетия относительно точки A) превращает сложную и красивую теорему в тривиальную задачку про трапецию? Обратимся еще раз к решению. Мы провели *произвольную* прямую P_1P_2 и выделили прямоугольную трапецию с вершинами в центрах окружностей O_1, O_2 и серединах отрезков AP_1, AP_2. Осталось воспользоваться задачей 1, а потом сделать гомотетию с коэффициентом 2. Для каждой прямой P_1P_2 возникает, таким образом, своя трапеция. И к каждой из них применимо одно и то же рассуждение, т.е. мы одним шагом применили результат задачи 1 сразу к бесконечному множеству прямоугольных трапеций. Можно сказать, что задача 3 – это та же задача 1, только повторенная бесконечно много раз.

Такое «тиражирование» математического рассуждения встречается постоянно, причем мы сами, решая задачи, этого не замечаем. Великий французский ученый Анри Пуанкаре (1854–1912) писал об этом феномене как об основной движущей силе математики на ее пути от простого к сложному, спасающей математику от бесконечных тавтологий. Эта сила состоит в «охвате бесконечности одной формулой», как говорил Пуанкаре в своей книге «О науке»: «Здесь сказывается только утверждение могущества разума, который способен постичь бесконечное повторение одного и того же акта, раз этот акт оказался возможным однажды».

Небольшая вариация задачи 3 приводит нас к еще одной сложной задаче, предлагавшейся в 1979 году на XXI Международной математической олимпиаде в Лондоне:

Задача 4 (о двух велосипедистах).[2] *Даны две окружности, пересекающиеся в точках A и B. Два велосипедиста едут по этим окружностям (каждый – по своей) с постоянными скоростями и в одном направлении (либо оба по часовой стрелке, либо оба – против). Они одновременно выезжают из точки B, делают один оборот и одновременно возвращаются в B. Тогда найдется неподвижная точка, которая все время равноудалена от велосипедистов.*

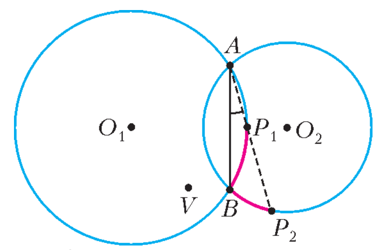

Рис. 3

Решение. Уверен, что вы уже все поняли. Эта точка и есть та самая точка V из задачи 3. В самом деле, если обозначить этих велосипедистов через P_1 и P_2, то в любой момент времени прямая P_1P_2 проходит через точку A (рис.3). Почему? Велосипедисты едут с одинаковыми угловыми скоростями, поэтому дуги BP_1 и BP_2 имеют одинаковую угловую меру. Значит, углы $\angle BAP_1$ и $\angle BAP_2$ равны, поскольку они опираются на эти дуги. А это значит, что точки P_1, P_2 и A лежат на одной прямой. Следовательно, $VP_1 = VP_2$ (задача 3).

Итак, в задачах 3 и 4 фигурирует одна и та же точка V. В ней сходятся все серединные перпендикуляры к отрезкам P_1P_2, соединяющим точки пересечения данных окружностей с прямыми, проходящими через A (задача 3). Она же всегда равноудалена от двух велосипедистов, одновременно выезжающих из точки B и двигающихся с одинаковыми угловыми скоростями. Уже этих двух свойств достаточно для того, чтобы точка имела свое название. Будем называть V *точкой двух велосипедистов*, соответствующей точке B. У любой пары пересекающихся окружностей таких замечательных точек две: одна соответствует точке A, другая – B. Эти точки симметричны относительно линии центров окружностей, а расстояние между ними равно длине общей хорды AB. Из решения задачи 3 легко установить их местоположение. Так, точка двух велосипедистов V, соответствующая точке B, является четвертой вершиной параллелограмма O_1AO_2V. Она же – четвертая вершина равнобедренной трапеции O_1O_2BV с основаниями O_1O_2 и BV.

У точек двух велосипедистов множество интересных свойств. Часть из них упомянута в упражнениях ниже. Решать их (равно как и остальные упражнения в этой статье) необязательно, в наших дальнейших исследованиях они не используются. Мы, однако, рекомендуем решить упражнения 1 и 2, поскольку они нам понадобятся.

Упражнения

1. Через точку пересечения двух окружностей проводятся две прямые, которые вторично пересекают окружности, первая – в точках P_1, P_2, вторая – в точках Q_1, Q_2. Тогда точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам P_1P_2 и

[2] *Для удобства мы немного изменяем формулировки олимпиадных задач, полностью сохраняя при этом их смысл.*

Q_1Q_2 является точкой двух велосипедистов для данных окружностей.

2. Если окружности пересекаются в точках A и B, V – их точка двух велосипедистов, соответствующая B, то угол ABV – прямой.

3. В условиях задачи 4 обозначим через O_1 и O_2 центры окружностей. Докажите равенство треугольников VO_1P_1 и P_2O_2V по двум сторонам и углу между ними. Пользуясь этим, получите другое решение задачи 4.

4 (Н.Б.Васильев).[3] Докажите утверждение задачи 4 для двух велосипедистов, двигающихся по окружностям в разных направлениях.

5. Две окружности пересекаются в точках A и B, V – точка двух велосипедистов, соответствующая B. Если через точки B и V провести произвольную окружность, то точки ее повторного пересечения с данными окружностями будут равноудалены от V.

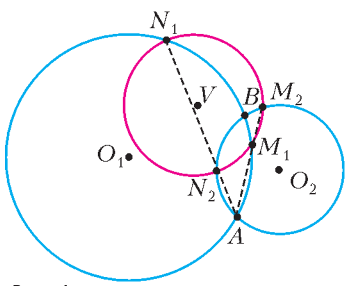

Рис. 4

6. Две окружности с радиусами r_1, r_2 пересекаются в точках A и B. Пусть V – точка двух велосипедистов, соответствующая точке B. Тогда для любой окружности с центром V, пересекающей обе окружности (первую – в точках M_1, N_1, вторую – в точках M_2, N_2), имеем (рис.4)

а) прямые M_1M_2 и N_1N_2 пересекаются в точке A;

б) четырехугольники VBM_1N_2 и VN_1M_2B – вписанные;

в) $\dfrac{M_1N_1}{M_2N_2} = \dfrac{AN_1}{AM_2} = \dfrac{AM_1}{AN_2} = \dfrac{BM_1}{BM_2} = \dfrac{BN_1}{BN_2} = \dfrac{r_1}{r_2}$.

Задача 4 о двух велосипедистах доставила немало удовольствия и участникам XXI Международной олимпиады, и членам жюри. Была она предложена нашей страной и дана в первый день олимпиады под номером три, что означает – самая сложная. Школьники нашли множество способов для ее решения – от чисто геометрических, до вычислительных и даже физических.

Прошло шесть лет, и на XXVI Международной олимпиаде в 1985 году от нашей страны тем же автором была представлена еще одна геометрическая задача, которая (о ужас!) оказалась на ту же самую идею. Правда, тогда даже автор задачи этого не заметил. Было опубликовано два авторских решения, основанных на разных приемах. Потом было найдено еще несколько геометрических решений. Ни одно из них и близко не упоминало точку двух велосипедистов.

Задача 5. *Дан треугольник ABC и окружность с центром в точке O, проходящая через вершины B и C и повторно пересекающая прямые AC и AB в точках P и Q соответственно. Описанные окружности треугольников APQ и ACB имеют ровно две общие точки A и M. Тогда угол OMA прямой.*

На первый взгляд, ничего общего с задачами 4 или 3. Никаких движущихся точек, никаких произвольных прямых. Есть только жестко фиксированная конструкция, для которой надо доказать, что один из углов прямой. И тем не менее, смотрите.

Решение. Пусть O – центр окружности $CPQB$ (рис.5). Точка O лежит на пересечении серединных перпендикуляров к отрезкам CP и BQ, поэтому она является точкой двух велосипедистов для окружностей APQ и ACB. Следовательно, OO_2O_1M – равнобедренная трапеция (O_1, O_2 – центры окружностей APQ и ACB соответственно). В частности, прямая OM параллельна прямой O_1O_2. Но прямая O_1O_2 перпендикулярна AM (линия центров двух окружностей перпендикулярна их общей хорде). Значит, и прямая OM перпендикулярна AM.

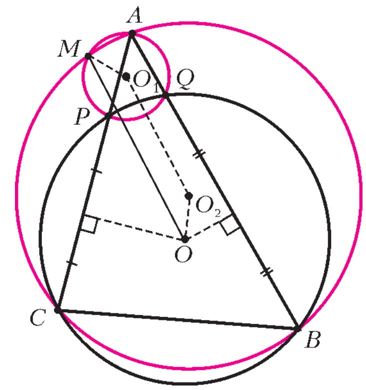

Рис. 5

Внимательный читатель наверняка заметил, что эта задача является прямым следствием упражнений 1 и 2.

Упражнение 7. Продолжения сторон AB и CD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке K, а продолжения сторон AD и BC – в точке L. Тогда описанные окружности треугольников BKC, AKD, ALB и DLC пересекаются в одной точке, лежащей на прямой KL. Более того, перпендикуляр, восставленный в этой точке к прямой KL, проходит через центр окружности $ABCD$.

А вот еще одна задача, в решении которой точка двух велосипедистов возникает самым неожиданным образом:

Задача 6 (о бабочке). *Через точку A, не лежащую на окружности, проведены две прямые, пересекающие эту окружность, одна – в точках P_1, P_2, другая – в точках Q_1, Q_2. Произвольная прямая, проходящая через A, пересекает окружность в точках M_1, M_2, а описанные окружности треугольников AP_1Q_1 и AP_2Q_2 – в точках N_1 и N_2 соответственно. Тогда $M_1N_1 = M_2N_2$.*

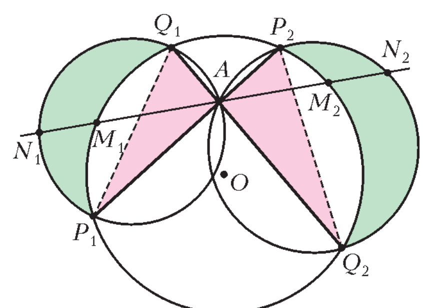

Рис. 6

Задача эта принадлежит к замечательному семейству «теорем о бабочке», о котором речь пойдет ниже. На рисунке 6 показана эта «бабочка» с треугольными крыльями AP_1Q_1 и AP_2Q_2, окаймленными закрашенными луночками. Любая прямая, проходящая через A и пересекающая эти луночки, пересекает их по равным отрезкам. Интересный факт, не правда ли? А доказывается он с помощью все той же задачи 3.

Решение. Пусть O – центр данной окружности. Он лежит на пересечении серединных перпендикуляров к отрезкам P_1P_2 и Q_1Q_2, поэтому он является точкой двух велосипедистов для окружностей AP_1Q_1 и AP_2Q_2. Значит, какую бы прямую ни провести через A, точка O будет лежать на серединном перпендикуляре к отрезку N_1N_2. Но, с другой стороны, O лежит на серединном перпендикуляре к хорде M_1M_2. Следовательно, отрезки N_1N_2 и M_1M_2 имеют общую середину, что и означает равенство $M_1N_1 = M_2N_2$.

Упражнение 8 (Г.В.Дорофеев). Получите другое решение задачи 6, основанное на следующем построении. Проведем прямую N_1Q_1 и обозначим через S точку ее повторного пересечения с исходной окружностью. Тогда: а) прямые SP_2 и M_1M_2 параллельны; б) треугольники M_1SN_1 и $M_2P_2N_2$ равны.

---
[3] *В тех случаях, когда нам известно имя автора задачи, мы будем его указывать.*

Цикл задач под общим названием «теоремы о бабочке» имеет давнюю и богатую историю. И хотя это выходит за рамки нашей темы, сделаем небольшое отступление. Сначала появилась классическая теорема о бабочке. Вот она:

Теорема о бабочке. На окружности дана хорда AB. Через ее середину проведены произвольные хорды PQ и RS. Прямые QS и RP пересекают AB в точках K и L. Тогда $AK = BL$.

Упражнение 9. Докажите эту теорему.

Эта задача была опубликована в 1815 году в английском журнале «Gentleman's Diary». Ее авторство приписывают английскому математику Уильяму Джорджу Горнеру (1786–1837), чье имя ныне известно каждому старшекласснику благодаря «схеме Горнера» для деления многочленов. С тех пор теорема о бабочке стала очень известной и популярной. За прошедшие почти два века найдено множество ее доказательств, как чисто геометрических, так и вычислительных. С некоторыми из них можно ознакомиться в задачниках И.Ф.Шарыгина, задачнике В.В.Прасолова, в книге Д.О.Шклярского, Н.Н.Ченцова и И.М.Яглома «Избранные задачи и теоремы элементарной математики», в знаменитой книге «Новые встречи с геометрией» Г.С.М.Кокстера и С.Л.Грейтцера. Не так давно о ней писал и «Квант» (статья «Геометрические шедевры И.Ф.Шарыгина», «Квант» № 1 за 2006 г.). Появилось много обобщений этой теоремы и много близких по духу задач, которые объединились в цикл под общим названием «теоремы о бабочке». Одно из самых интересных обобщений придумал замечательный геометр Игорь Федорович Шарыгин (1937–2004). Ему, кстати, принадлежит и задача 5, а задача 4 придумана им в соавторстве с другим замечательным математиком и многолетним автором журнала «Квант» Николаем Борисовичем Васильевым (1940–1998). Идея обобщенной теоремы о бабочке состоит в том, что середину хорды AB можно «раздвоить», при этом ничего не изменив в доказательстве. Мы даем формулировку этой теоремы в упражнении 10. А в упражнениях 11 и 12 – еще несколько теорем о бабочке, которые, как и задача 6, уже имеют мало общего с оригиналом. Кроме, разумеется, самой бабочки. Каждая из них содержит свою особую идею и требует отдельного доказательства. Попробуйте!

Упражнения

10 (И.Ф.Шарыгин). На окружности дана хорда AB, на ней – точки M и N, причем $AM = BN$. Через точки M и N проведены хорды PQ и RS соответственно. Прямые QS и RP пересекают AB в точках K и L. Тогда $AK = BL$.

11. На сторонах угла взяты точки A и B. Через середину M отрезка AB проведены две прямые, одна из которых пересекает стороны угла в точках A_1, B_1, а другая – в точках A_2, B_2. Прямые A_1B_2 и A_2B_1 пересекают AB в точках P и Q. Тогда $MP = MQ$.

12. Сформулируйте и докажите аналоги классической теоремы о бабочке для параболы, гиперболы, эллипса. Для каких из этих фигур будет верно обобщение теоремы о бабочке, как в упражнении 10?

Указание. Можно воспользоваться тем, что эллипс является проекцией окружности на плоскость. В рассуждениях с параболой и гиперболой можно применить метод координат.

13 (С.Л.Берлов). Дан остроугольный треугольник ABC, H – точка пересечения его высот, D – середина AC. Если прямая, проходящая через H и перпендикулярная отрезку HD, пересекает прямые AB и BC в точках E и F, то $HE = HF$.

Та теорема о бабочке, которую мы доказали в задаче 6, значительно моложе классической, ей всего 20 лет. С ней у автора связаны светлые воспоминания. Я придумал ее в 15 лет и по совету учителя послал ее в журнал «Математика в школе». Там она и была напечатана в номере 3 за 1986 год, за что я вскоре получил первый в жизни гонорар – 5 рублей 88 копеек. С этими деньгами я гордо пошел в магазин и купил какие-то сувениры родителям.

Напоследок предложим еще несколько задач для самостоятельного решения. Все они так или иначе связаны с точкой двух велосипедистов.

Упражнения

14. Через точку пересечения двух окружностей проводится произвольная прямая, которая вторично пересекает окружности в точках P и Q. Найдите геометрическое место середин отрезков PQ.

15. Даны две окружности с общим центром O. Окружности α и β имеют разные радиусы и касаются данных окружностей. Тогда O является точкой двух велосипедистов для окружностей α и β.

16. В условиях предыдущей задачи прямая, соединяющая точки касания, проходит через одну из точек пересечения окружностей α и β.

17. Для данной пары окружностей постройте две концентрические окружности, каждая из которых касается двух данных. Сколько решений имеет задача в зависимости от расположения окружностей?

18. Пусть V – точка двух велосипедистов данной пары окружностей. Если провести инверсию относительно любой окружности с центром V, то V останется точкой двух велосипедистов и для образов окружностей.

19. Останется ли утверждение задачи 4 верным, если снять требование одновременного выезда велосипедистов из точки B?

20. Два велосипедиста движутся с одинаковыми скоростями по двум пересекающимся прямым. Тогда на плоскости существует неподвижная точка, которая все время равноудалена от велосипедистов.

21 (И.Ф.Шарыгин). На одной из двух пересекающихся сфер взяты точки P_1 и Q_1, на другой – точки P_2 и Q_2. Отрезок P_1P_2 проходит через общую точку сфер. Отрезок Q_1Q_2 проходит через другую общую точку сфер и параллелен прямой, соединяющей центры сфер. Тогда проекции отрезков P_1Q_1 и P_2Q_2 на прямую P_1P_2 равны.

22. Сформулируйте и решите аналоги задач 2 и 3 для двух пересекающихся сфер в пространстве. При этом в качестве A и B можно взять любую пару общих точек сфер.

23. Сформулируйте и решите пространственные аналоги упражнений 5, 9, 10 и 14–18 (вместо окружностей на плоскости нужно взять сферы в пространстве).

Попробуем подвести некоторые итоги. Две задачи международных олимпиад, задача о бабочке, два десятка геометрических задач, которые мы сформулировали в виде упражнений (некоторые из них появлялись на математических олимпиадах, в «Задачнике «Кванта» и в различных сборниках задач). Список далеко не полный. И все это выросло из задачи 1, совсем простенькой и неинтересной, которую мы вначале и решать-то не хотели.