Касающиеся окружности: от Тебо до Фейербаха

В.ПРОТАСОВ

Две замечательные теоремы

В чем состоит красота математики? Даже ставить подобный вопрос наивно, особенно в небольшой статье. Тем не менее, иногда на конкретных примерах удается разглядеть те кирпичики, из которых эта красота складывается. Одним из таких кирпичиков несомненно является взаимосвязь различных объектов. Это часто воспринимается как чудо, когда два известных математических результата, взятые из разных областей и, казалось бы, не имеющие ничего общего, оказываются тесно связанными друг с другом. Словно два человека, знакомые много лет, вдруг обнаруживают, что они на самом деле – близкие родственники.

В этой статье мы рассмотрим две известнейшие теоремы о касании окружностей – теорему Фейербаха и теорему Тебо. Открыты они были разными людьми в разное время (первая теорема старше второй на 116 лет). Для каждой из них найдено множество доказательств, основанных на различных идеях. Тем не менее, мы увидим, что теоремы эти – родные сестры. У них общие родители: обе теоремы следуют из двух разных случаев одного и того же факта. Но – все по порядку.

Начнем с формулировок. В любом треугольнике 9 точек – середины сторон, основания высот и середины трех отрезков, соединяющих вершины с точкой пересечения высот, – лежат на одной окружности. Она называется *окружностью девяти точек* треугольника. Этот красивый факт был частично установлен в 1765 году Леонардом Эйлером (1707–1783), поэтому окружность девяти точек называют также окружностью Эйлера. В 1822 году К.Фейербах доказал теорему об одном свойстве окружности девяти точек. Свойство это столь замечательно, что побудило некоторых математиков называть эту окружность окружностью Фейербаха.

Теорема Фейербаха. *Окружность девяти точек касается вписанной и всех вневписанных окружностей треугольника.*

Напомним, что вневписанной называется окружность, касающаяся одной стороны треугольника и продолжений двух других сторон. Так, вневписанная окружность треугольника ABC, соответствующая вершине A, касается стороны BC и продолжений сторон AB (за точку B) и AC (за точку C). У каждого треугольника, таким образом, три вневписанных окружности. Автор теоремы – Карл Вильгельм Фейербах (1800–1834), немецкий математик, старший брат знаменитого философа Людвига Фейербаха. Он был преподавателем гимназии в небольшом университетском городе Эрланген на юге Германии. Этот город будет прославлен лишь через 50 лет после открытия Фейербаха: в 1872 году Ф.Клейн сформулирует свою знаменитую *эрлангенскую программу* о систематизации геометрии. А о самом авторе замечательной теоремы в нынешнем Эрлангене, увы, ничто не напоминает. Нет даже мемориальной доски Фейербаху.

К настоящему времени найдено множество доказательств теоремы Фейербаха. Большинство из них используют достаточно сильные средства, такие как инверсия или обобщенная теорема Птолемея. Есть и элементарные доказательства. Одно из них было получено автором этих строк («Квант» № 9 за 1992 г.), оно выводит теорему Фейербаха как частный случай теоремы о сегменте.

В отличие от Карла Фейербаха, автора одной великой теоремы, французский математик Виктор Тебо (1882–1960) за свою научную карьеру создал более 1000 теорем и задач (один только журнал «American mathematical monthly» опубликовал 582 из них!). По этому показателю Тебо является признанным лидером. Это тем более удивительно, что он не был профессионалом. Тогда (как, впрочем, и теперь) занятия геометрией не приносили достойного дохода, поэтому Тебо в течение многих лет работал в страховой компании.

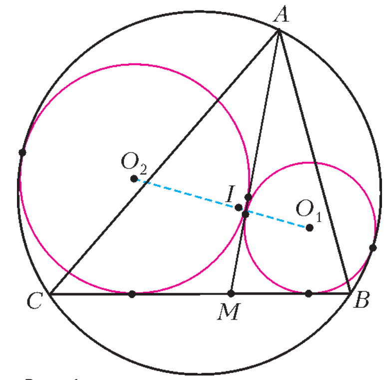

Рис. 1

Из обширного наследия Тебо самой известной является теорема о трех коллинеарных окружностях. Чтобы ее сформулировать, поясним сначала некоторые термины. *Линией центров* двух окружностей мы будем называть прямую, содержащую их центры. *Криволинейным треугольником* будем называть фигуру, ограниченную двумя отрезками и дугой окружности. Так, на рисунке 1 криволинейный треугольник AMB ограничен отрезками AM, MB и дугой BA описанной окружности треугольника ABC; криволинейный треугольник AMC ограничен отрезками CM, MA и дугой AC описанной окружности.

Теорема Тебо. *На стороне BC треугольника ABC взята произвольная точка M. В криволинейные треугольники AMB и AMC вписано по окружности. Тогда линия центров этих окружностей содержит центр вписанной окружности треугольника ABC.*

Окружности, вписанные в криволинейные треугольники AMB и AMC, мы теперь будем называть окружностями Тебо. Данную теорему В.Тебо опубликовал в виде задачи (без доказательства) в 1938 году. Первые доказательства (вычислительные) были получены уже после смерти автора теоремы, в 1970-х годах, а первое чисто геометрическое доказательство – и вовсе в 1986 году. Теорема Тебо вызывает широкий интерес многих авторов. Из публикаций на русском языке выделим недавнюю интересную статью Е.Д.Куланина («Математическое просвещение», вып. 11, 2007 г.).

Мы с вами увидим, что и теорема Фейербаха, и теорема Тебо на самом деле вытекают из разных случаев одного и того же общего факта. Конечно, увидим мы это не сразу. Потребуется предварительная работа. Вначале мы вспомним несколько элементарных геометрических фактов. Затем докажем основную теорему, из которой выведем сначала теорему Тебо, а затем и теорему Фейербаха. Поэтому и статья названа вопреки хронологии – от Тебо до Фейербаха.

Повторим геометрию

Нам понадобятся несколько несложных геометрических результатов. Напомним, что угловой мерой дуги AB окружности (обозначение $\overset{\smile}{AB}$) называется величина угла между радиусами OA и OB. При этом дугой AB считается та из двух смежных дуг, которая проходится от A к B в положительном направлении (против часовой стрелки). Таким образом, дуги AB и BA составляют полную окружность. Центр вписанной окружности треугольника мы будем обозначать буквой I (от английского inscribed – вписанный).

Центр вписанной окружности. Что мы знаем об этой точке? Она расположена внутри треугольника и равноудалена от его сторон, лежит на пересечении биссектрис треугольника. Что еще? Одно свойство точки I часто бывает полезно при решении задач. Оно говорит о том, где именно на биссектрисе лежит центр вписанной окружности.

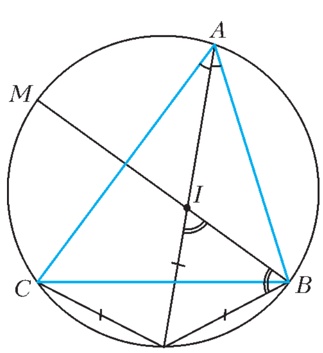

Рис. 2

Продолжим биссектрису угла A до пересечения с описанной окружностью в точке L (рис. 2). Тогда $LI = LB = LC$.

Докажем это. Так как $\angle LAB = \angle LAC$, то точка L является серединой дуги BC, значит, $LB = LC$. Далее, пусть M – точка пересечения биссектрисы угла B с описанной окружностью. Угол IBL равен половине дуги ML, т.е. полусумме дуг MC и CL. Это, в свою очередь, равно полусумме дуг AM и LB (поскольку $\overset{\smile}{AM} = \overset{\smile}{MC}$ и $\overset{\smile}{LB} = \overset{\smile}{CL}$), которая равна углу BIL. Итак, углы IBL и BIL равны, значит, треугольник IBL равнобедренный, и $IL = BL$.

Читатель без труда сформулирует и докажет аналогичные утверждения для центров вневписанных окружностей треугольника.

Касание окружности и хорды. *На плоскости даны окружности α и β (рис.3). Окружность α лежит внутри окружности β и касается ее в точке T, а также касается ее хорды BC в точке Q. Луч TQ пересекает окружность β в точке L. Тогда L – середина дуги CB, а TL – биссектриса угла BTC. Более того, $LQ \cdot LT = LB^2 = LC^2$.*

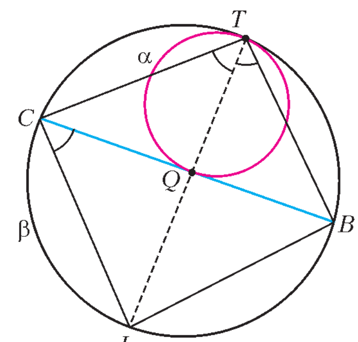

Рис. 3

Для доказательства рассмотрим гомотетию с центром в точке T, переводящую окружность α в окружность β. Она переводит точку Q в точку L, прямую BC, касающуюся окружности α в точке Q, в параллельную ей прямую, касающуюся окружности β в точке L. Так как эта касательная параллельна хорде BC, то L – середина дуги BC. Далее, вписанные углы LCB и LTC равны, поскольку опираются на равные дуги. Значит, треугольники LCQ и LTC подобны, из чего заключаем, что $LQ \cdot LT = LC^2$.

Сформулируйте и докажите самостоятельно аналогичное утверждение для окружностей, касающихся внешним образом. При этом TL будет биссектрисой угла, смежного с углом BTC.

Степень точки относительно окружности. Радикальная ось. *Степенью точки относительно окружности* называется величина $d^2 - R^2$, где R – радиус окружности, а d – расстояние от данной точки до центра окружности. Степень любой точки M, лежащей вне окружности, равна квадрату касательной, проведенной из точки к окружности (т.е. квадрату отрезка от M до точки касания). Для любой прямой, проходящей через точку M и пересекающей окружность в точках A и B, произведение $MA \cdot MB$ равно степени точки M. Для доказательства достаточно вспомнить, что произведение $MA \cdot MB$ (произведение секущей на ее внешнюю часть) одинаково для всех прямых, проходящих через точку M. Для прямой, проходящей через центр окружности, это произведение равно $(d-R)(d+R) = d^2 - R^2$. Значит, и для всех прямых оно равно степени точки M. Если M лежит внутри окружности, то $d < R$, а значит, степень точки M отрицательна. В этом случае для любой хорды AB, проходящей через точку M, произведение отрезков MA и MB равно степени точки M, взятой со знаком «плюс».

Для двух окружностей геометрическим местом точек, имеющих одинаковые степени относительно *этих окружностей, является прямая, перпендикулярная их линии центров.*

В самом деле, если степени точки M относительно окружностей равны, то $O_1M^2 - R_1^2 = O_2M^2 - R_2^2$ (O_1, O_2 – центры окружностей, а R_1, R_2 – их радиусы). Таким образом, $O_1M^2 - O_2M^2 = R_1^2 - R_2^2$, т.е. разность квадратов расстояний от точки M до точек O_1 и O_2 постоянна. Поэтому (докажите это!) геометрическим местом таких точек является прямая, перпендикулярная O_1O_2. Эта прямая называется *радикальной осью* двух окружностей. Любая пара неконцентрических окружностей имеет радикальную ось. Если окружности пересекаются, то радикальной осью служит прямая, содержащая их общую хорду.

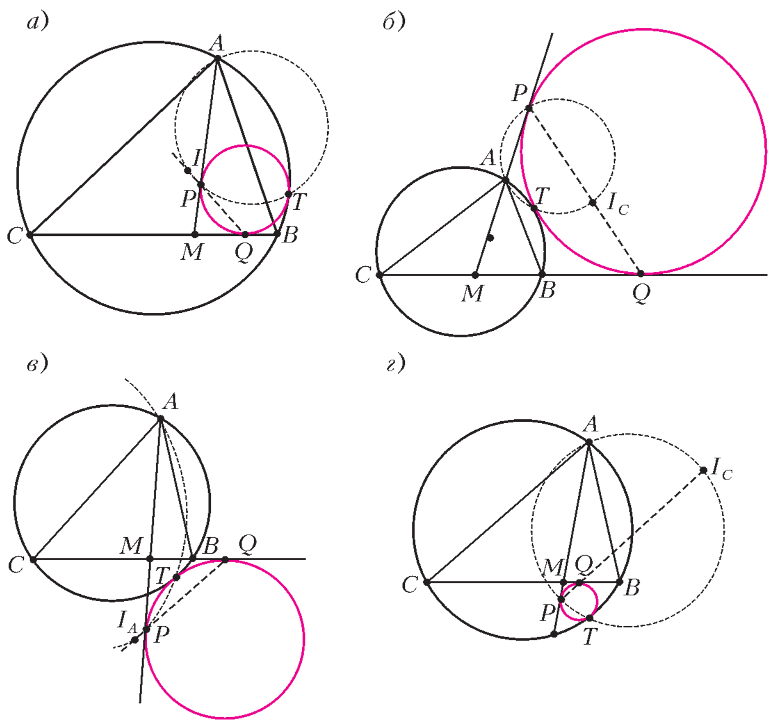

Рис. 5

Центральная теорема

Мы начнем с основной теоремы, из которой следуют теоремы Тебо и Фейербаха.

Основная теорема. *На стороне BC треугольника ABC выбирается произвольная точка M. В криволинейный треугольник AMB вписана окружность, касающаяся отрезков MA и MB в точках P и Q соответственно и окружности ABC – в точке T. Тогда прямая PQ проходит через точку I.*

Доказательство. 1) Первый шаг – небольшое дополнительное построение (рис.4). Обозначим через γ окружность, вписанную в криволинейный треугольник AMB. Проведем прямую QI и обозначим через P' точку ее повторного пересечения с окружностью γ (первый раз они пересекаются в точке Q). Обозначим через L точку, в которой прямая AI повторно пересекает окружность ABC. Так как AI – биссектриса угла A, то L – середина дуги BC.

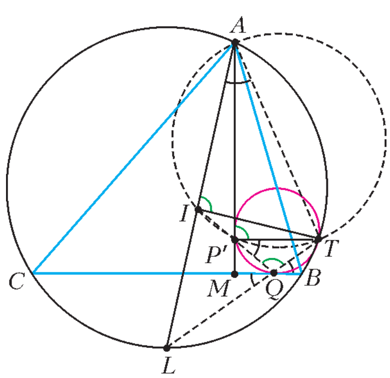
Рис. 4

2) *Углы BQT, QP′T и TAI равны.* В самом деле, угол BQT равен полусумме дуг CL и BT, угол TAI равен половине дуги LT, т.е. полусумме дуг LB и BT. Но дуги CL и LB равны, следовательно, $\angle BQT = \angle TAI$. Наконец, угол BQT между касательной и хордой равен углу $QP'T$, который стягивает эта хорда.

3) *Четырехугольник TAIP′ – вписанный.* Это следует из доказанного равенства углов $\angle QP'T = \angle TAI$. Значит, $\angle AIT = \angle AP'T$. Далее, $LQ \cdot LT = LB^2 = LI^2$. Следовательно, треугольники LQI и LIT подобны (по общему углу ILQ и двум пропорциональным сторонам). Из этого следует, что $\angle LQI = \angle LIT$. Таким образом, $\angle TQP' = \angle AIT = \angle AP'T$.

4) Равенство углов $\angle TQP' = \angle AP'T$ означает, что прямая AP' касается окружности γ. Следовательно, $P' = P$. □

В доказательстве теоремы мы заодно установили еще одно полезное свойство.

Следствие. *В условиях основой теоремы окружность ATP проходит через центр вписанной окружности I.*

В частном случае основной теоремы, когда точка M совпадает с вершиной C (тогда окружность γ будет касаться сторон CA и CB треугольника ABC и его описанной окружности), получаем известную олимпиадную задачу. Мы приводим ее в задаче 1. Много интересных вещей, связанных с этим случаем, можно найти в статье А.Гирича («Квант» №11 за 1990 г.).

Основная теорема может быть распространена и на другие случаи расположения окружности γ по отношению к треугольнику ABC. На рисунке 5 изображены четыре возможности. В разных случаях внутреннее касание заменяется внешним, а центр вписанной окружности I – центрами вневписанных I_A и I_C. Кроме того, точка M может лежать не на стороне BC, а на ее продолжении. Два возможных случая изображены на рисунке 6. Во всех случаях основная теорема верна и

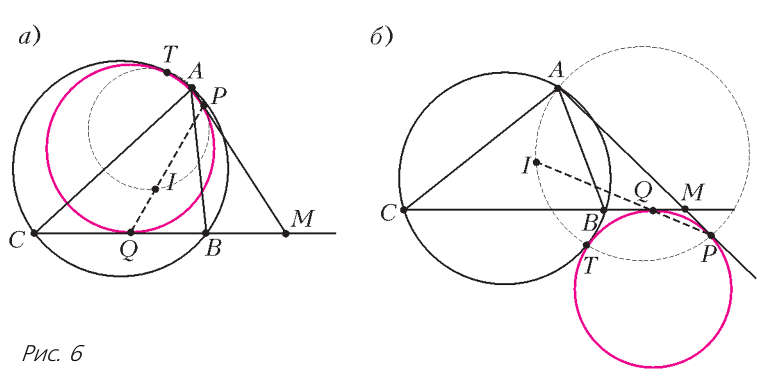

Рис. 6

доказывается так же. Изобразите остальные случаи и докажите теорему для них.

Доказательство теоремы Тебо

Установим сначала одно вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *К двум окружностям провели общую внешнюю и общую внутреннюю касательные. Тогда прямая, соединяющая две точки касания на первой окружности, и прямая, соединяющая две точки касания на второй окружности, пересекаются на линии центров.*

Доказательство. Пусть O_1 – центр первой окружности, а A_1 и B_1 – точки ее касания с проведенными прямыми; аналогичные обозначения – для второй окружности (точки A_1 и A_2 лежат на одной касательной). Проведем окружности δ и β с диаметрами A_1A_2 и B_1B_2 соответственно (рис.7). Прямая O_1A_1 касается δ, а прямая O_1B_1 касается β. Значит, из точки O_1 к данным окружностям опущены равные касательные ($O_1A_1 = O_1B_1$ – радиусы первой окружности).

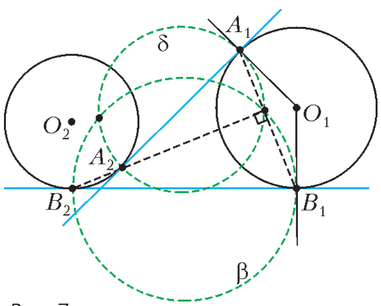

Рис. 7

То же – с точкой O_2. Таким образом, O_1O_2 – радикальная ось окружностей δ и β. Наконец, прямые A_1B_1 и A_2B_2 параллельны биссектрисам смежных углов между касательными, следовательно, они перпендикулярны между собой. Поэтому их точка пересечения лежит на обеих окружностях δ и β. Точка пересечения этих окружностей, конечно же, лежит на их радикальной оси O_1O_2. □

Теперь доказательство теоремы Тебо получается мгновенно. Прямая, соединяющая точки касания первой окружности Тебо со сторонами MA и MB, и прямая, соединяющая точки касания второй окружности со сторонами MA и MC, пересекаются на линии центров (лемма 1). □

Если воспользоваться случаями основной теоремы, изображенными на рисунках 5 и 6, то получим обобщения теоремы Тебо на разные расположения точки M и окружностей Тебо (на рисунке 8 они названы γ_1, γ_2). Так, на рисунке 8,*б* показан случай точки M, лежащей на продолжении стороны BC за точку B. Окружность γ_1 теперь касается окружности ABC извне. А на рисунке 8,*в* точка M лежит на стороне BC, и обе окружности γ_1, γ_2 касаются окружности ABC извне. На этот раз вместо центра вписанной окружности I нужно взять центр вневписанной, соответствующей вершине A. Доказательства во всех случаях совершенно одинаковы. Найдите самостоятельно еще несколько случаев, сформулируйте и докажите для них аналоги теоремы Тебо.

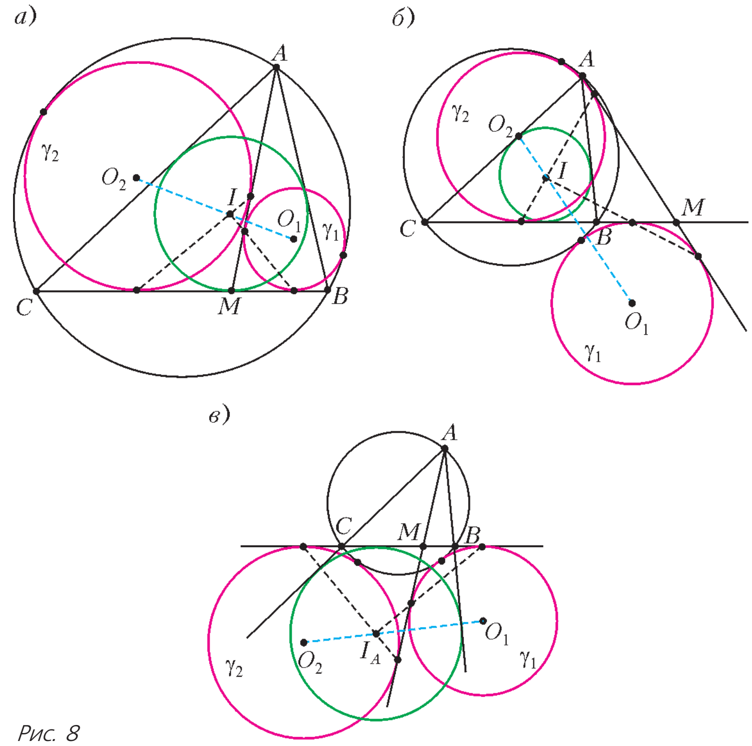

Рис. 8

Задача Аполлония

Как с помощью циркуля и линейки вписать окружность в треугольник? Странный вопрос! Нет ничего проще: проводим две биссектрисы треугольника, в точке их пересечения лежит центр вписанной окружности. А как вписать окружность в *криволинейный* треугольник, который ограничен двумя отрезками и дугой окружности? Читатель может убедиться самостоятельно, что сделать это совсем не просто. С решением данной задачи связано еще одно применение основной теоремы. На самом деле, эта задача – частный (точнее, предельный) случай задачи Аполлония о построении окружности, касающейся трех данных окружностей. Ее исследовал древнегреческий математик и астроном, ученик Евклида, лучший специалист античного мира по окружностям и коническим сечениям Аполлоний Пергский (ок. 260–170 до н.э.) в своем труде «О касании». Решение Аполлония было утрачено. Лишь 18 веков спустя, в 1600 году, знаменитый Франсуа Виет (1540–1603) сумел восстановить его. Виет справедливо гордился своим достижением и даже назвал свой труд «Apollonius Gallus» (Аполлоний галльский, т.е. французский).

Сейчас известно множество решений задачи Аполлония, большинство из них использует инверсию. Наш случай гораздо проще – две из трех окружностей вырождаются в прямые линии. И решение, которое следует из основной теоремы, на удивление простое. Пусть криволинейный треугольник AMB ограничен отрезками MA, MB и дугой BA некоторой окружности. Для простоты предположим, что эта окружность содержит точку M.

Построение. Продолжим луч BM до пересечения с окружностью в некоторой точке C. Через центр вписанной окружности треугольника ABC проведем прямую, параллельную биссектрисе угла AMC. Найдем ее точки пересечения со сторонами угла AMB. Тогда окружность, касающаяся сторон угла AMB в этих точках, – искомая.

Доказательство теоремы Фейербаха

Настал ключевой момент: переход от Тебо к Фейербаху. С помощью того же приема, которым мы доказали теорему Тебо, мы докажем и теорему Фейербаха.

Пусть ABC – данный треугольник, A_1, B_1, C_1 – середины его сторон, A_2, B_2, C_2 – основания высот. Последние шесть точек, как мы знаем, лежат на одной окружности – окружности девяти точек. Нужно доказать, что она касается вписанной и всех вневписанных окружностей треугольника ABC. Идея такова: выделим пару окружностей – вписанную окружность треугольника ABC и одну из его вневписанных окружностей, скажем ту, которая касается стороны AC. Попробуем представить эту пару как пару окружностей Тебо для некоторого треугольника, вписанного в окружность девяти точек. Если это удастся сделать, то теорема Фейербаха будет установлена. В самом деле, окружности Тебо (по определению!) касаются описанной окружности треугольника, т.е. нашей окружности девяти точек. Значит, окружность девяти точек касается вписанной и одной из вневписанных окружностей. Проделав то же с другими вневписанными окружностями, получим требуемое. Главный вопрос – какой из треугольников, вписанных в окружность девяти точек, нужно взять? Ни «серединный» треугольник $A_1B_1C_1$ (с вершинами в серединах сторон), ни «ортотреугольник» $A_2B_2C_2$ (с вершинами в основаниях высот) для этой целей не подойдут. Даже если ограничиться только шестью точками $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$, то существует 20 треугольников с вершинами в этих точках (почему именно столько?). Все они будут вписаны в окружность девяти точек. А подойдет из них только один! Не будем томить читателя, скажем ответ сразу: это треугольник $B_1B_2A_2$ (рис.9). Его вершины это основания двух высот – A_2 и B_2 и середина стороны – B_1.

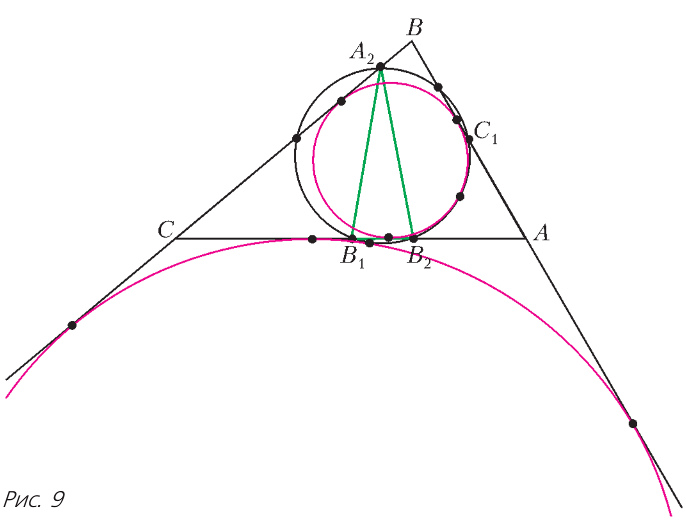

Рис. 9

В качестве точки M на стороне треугольника берется точка C. Она лежит на продолжении стороны B_2B_1 треугольника $B_1B_2A_2$.

Вписанная и вневписанная окружности треугольника ABC, касающиеся стороны AC, являются окружностями Тебо для треугольника $B_1B_2A_2$ и для точки C на продолжении его стороны B_1B_2. При этом возникает случай теоремы Тебо, изображенный на рисунке 8,б (когда точка M берется на продолжении стороны треугольника).

Итак, если в теореме Тебо взять точку M не на стороне, а на продолжении стороны треугольника, то получим теорему Фейербаха. Таким образом, обе теоремы – две грани одного и того же утверждения. И обе доказываются с помощью основной теоремы.

Теперь нужно доказать, что это действительно так: вписанная и вневписанная окружности являются окружностями Тебо для треугольника $B_1B_2A_2$ и точки C на продолжении его стороны B_1B_2. Для этого воспользуемся основной теоремой. Если мы покажем, что отрезок MN между точками касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами CA и CB соответственно содержит центр вписанной окружности I_1 треугольника $B_1B_2A_2$, то все будет сделано. В самом деле, получается, что через центр вписанной окружности I_1 провели прямую MN, образующую равные углы с прямыми CA_2 и CB_2. Тогда из теоремы (точнее, из ее случая, представленного на рисунке 6,*а*) следует, что окружность, касающаяся этих прямых в точках M и N (это – вписанная окружность треугольника ABC), вписана в криволинейный треугольник A_2CB_2, ограниченный отрезками CA_2, CB_2 и дугой B_2A_2 окружности девяти точек. Значит, она касается окружности девяти точек. Как видим, рассуждения те же, что и при построении в задаче Аполлония. Для вневписанной окружности доказательство совершенно аналогично.

Таким образом, осталось доказать, что прямая MN содержит центр вписанной окружности I_1 треугольника $B_1B_2A_2$. Нам удобнее будет начать с одного вспомогательного утверждения, которое, впрочем, является известной олимпиадной задачкой.

Лемма 2. *В произвольном треугольнике ABC точка пересечения биссектрисы угла B с прямой, содержащей среднюю линию, параллельную стороне CB, лежит на одной прямой с точками касания вписанной окружности со сторонами CA и CB.*

Доказательство. Пусть I – центр вписанной окружности, M и N – точки ее касания со сторонами CA и CB,

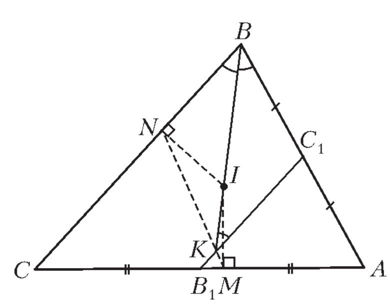

Рис. 10

K – точка пересечения средней линии B_1C_1 с биссектрисой угла B (рис.10). Из равенства накрест лежащих углов при параллельных прямых CB и C_1B_1 получаем, что $\angle BKC_1 = \angle KBC = \angle KBC_1$, а значит, $C_1B = C_1K$. Следовательно, медиана C_1K треугольника ABK равна половине его стороны AB, откуда $\angle AKB = 90°$. Тогда четырехугольник $AMKI$ – вписанный, и следовательно, $\angle KMC = \angle KIA = 90° - \frac{1}{2}\angle C = \angle NMC$. Значит, K лежит на прямой MN. □

Доказательство теоремы Фейербаха проведем для вписанной окружности, для вневписанной все аналогично. Так как AA_2C – прямоугольный треугольник, то $B_1A_2 = B_1C$ (рис.11). Следовательно, луч B_1C_1, параллельный стороне BC, является биссектрисой угла

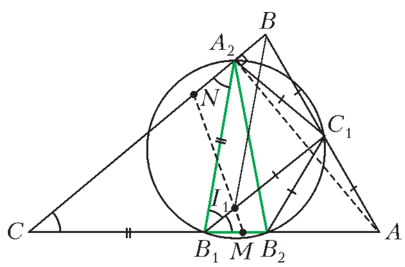

Рис. 11

A_2B_1A. Значит, он содержит точку I_1. Далее, точка C_1 лежит на описанной окружности треугольника $B_1B_2A_2$, следовательно (свойство центра вписанной окружности!), $C_1I_1 = C_1A_2$. Но поскольку треугольник AA_2B прямоугольный, $C_1A_2 = C_1B$. Таким образом, треугольник BC_1I_1 – равнобедренный. Тогда из равенств накрест лежащих углов $\angle I_1BC = \angle BI_1C_1$ следует, что BI_1 – биссектриса угла B. Применив лемму 2, получаем, что точка I_1 лежит на прямой MN. Теперь вступает в силу основная теорема: прямая MN проходит через центр вписанной окружности треугольника $B_1B_2A_2$, поэтому окружность, касающаяся сторон угла C в точках M и N (вписанная окружность треугольника ABC) касается окружности $B_1B_2A_2$ (окружности девяти точек). □

Задачи

В заключение предлагаем несколько задач. Решать их полезно, хотя и не обязательно (для понимания статьи это не требуется). Все задачи формулируются в виде утверждений, слова «докажите, что» для краткости будем опускать.

1. В угол с вершиной C вписана окружность. Рассмотрим всевозможные треугольники ABC с вершинами на сторонах угла, описанные около данной окружности. Тогда описанные окружности таких треугольников касаются фиксированной окружности. Что это за окружность?

2. В произвольной трапеции $ABCD$ окружность, касающаяся ее оснований AB и CD и дуги BC описанной окружности треугольника ABC, касается также и вписанной окружности этого треугольника.

3. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$.

а) Четыре точки: центры вписанных окружностей треугольников ABD и ACD, центр вневписанной окружности треугольника ABC, соответствующей вершине C, и центр вневписанной окружности треугольника BCD, соответствующей вершине B, лежат на одной прямой.

б) Обозначим через l прямую из пункта а). Рассмотрим три окружности: первая касается прямых AC и BD в точках их пересечения с l; вторая касается прямых AB и CD в точках их пересечения с l; третья касается прямых AD и BC в точках их пересечения с l. Эти три окружности касаются исходной окружности в одной точке.

В задачах 4–8 обозначения такие же, как в теореме Тебо.

4. К окружности Тебо проводится общая внешняя касательная, отличная от BC. Она пересекает отрезок AM в точке K. Тогда

а) проекция точки K на линию центров окружностей Тебо совпадает с точкой I;

б) прямая, параллельная BC и проходящая через K, касается вписанной окружности треугольника ABC.

5. Если O_1, O_2 – центры окружностей Тебо, то $\frac{O_1I}{O_2I} = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\angle AMB$.

6. Если Q_1 и Q_2 – точки касания окружностей Тебо со стороной BC, то в треугольнике Q_1IQ_2 угол I – прямой, а острые углы равны $\frac{1}{2}\angle AMB$ и $90° - \frac{1}{2}\angle AMB$.

7. Если AM – биссектриса треугольника ABC, то окружности Тебо касаются, а точка их касания – центр вписанной окружности треугольника ABC.

8. Окружности Тебо равны тогда и только тогда, когда M – точка касания вневписанной окружности треугольника ABC со стороной BC.

9. Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны AB в точке N. Проводятся две окружности: первая касается извне окружности ABC, продолжения стороны BC за точку B и продолжения отрезка AN за точку N; вторая касается окружности ABC, продолжения стороны BC за точку C и продолжения отрезка AN за точку N. Каждая из них равна вневписанной окружности треугольника ABC, соответствующей точке A.

10. На плоскости даны прямые a и b, а также окружность φ, касающаяся b. Рассмотрим семейство всевозможных треугольников ABC, описанных около окружности φ, у которых вершина A лежит на прямой a, а вершины B и C – на b. Тогда описанные окружности этих треугольников касаются двух фиксированных окружностей.

11. На плоскости даны окружности γ_1 и γ_2. Произвольная окружность, касающаяся и содержащая их, пересекает их общую внешнюю касательную в точках B и C, а общую внутреннюю касательную – в точке A, которая лежит в той же полуплоскости относительно прямой BC, что и окружности γ_1, γ_2. Тогда треугольник ABC имеет фиксированную вписанную окружность.

12. На плоскости даны точка K, окружность и точка A на этой окружности. Через K проводится произвольная прямая, пересекающая окружность в точках B и C. Тогда окружность девяти точек треугольника ABC касается двух фиксированных окружностей.