витке потечет ток $I_2 = I_1 \cdot 16 \approx 22{,}4$ А. Напряжение, которое будет показывать второй вольтметр, пропорционально амплитуде текущего через него тока. Так как ток увеличился в $I_1/I \approx 1{,}4$ раза, то и напряжение тоже увеличится и станет равным

$$U_2' \approx 1{,}4U_2 \approx 14 \text{ В}.$$

С.Варламов

Ф2456. *Астрофизиками обнаружены газовые облака, движущиеся по почти круговым орбитам вокруг центра нашей Галактики. Такой вывод был сделан на основании результатов наблюдений за свечением этих облаков. Оказалось, что частоты f в спектрах излучения молекул или атомов газовых облаков изменяются по гармоническому закону с периодом порядка 10 лет вблизи соответствующих частот f_0 неподвижных атомов и молекул таких же газов. Причем выполняется такое соотношение: $(f_{max} - f_{min})/f_0 \approx \approx 10^{-3}$. Оцените массу объекта (черной дыры), находящегося в центре нашей Галактики.*

Солнечная система располагается вблизи края нашей Галактики, поэтому наблюдаемое движение газовых облаков происходит в плоскости, в которой находится и наша Земля. Вследствие эффекта Доплера частоты волн, излучаемых молекулами или атомами в те моменты, когда скорость v их орбитального движения направлена к Земле или от Земли, отличаются от частот излучения f_0 неподвижных атомов или молекул в $(c+v)/c$ или $(c-v)/c$ раз соответственно. Иными словами, выполняется соотношение

$$\frac{2v}{c} = \frac{f_{max} - f_{min}}{f_0} \approx 10^{-3}.$$

Это означает, что газовые облака движутся со скоростями орбитального движения

$$v = \frac{c(f_{max} - f_{min})}{2f_0} = 150 \text{ км/с},$$

составляющими 0,05% от скорости света в вакууме. Движение происходит по круговым орбитам с периодом

$$T = 10 \text{ лет} = 3{,}16 \cdot 10^8 \text{ с}.$$

Расстояние от облаков до центра нашей Галактики, в котором находится черная дыра, составляет

$$R = \frac{vT}{2\pi}.$$

Ускорение, с которым движутся эти облака, обеспечивается гравитационным притяжением к черной дыре массой M:

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{GM}{R^2},$$

где $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2 – гравитационная постоянная. Отсюда находим массу черной дыры:

$$M = \frac{v^2R}{G} = \frac{v^3T}{2\pi G} = 2{,}54 \cdot 10^{33} \text{ кг}.$$

В.Славутинский

О вписанной окружности прямоугольного треугольника

А.Заславский

На листе относительно клетчатом,
Но на белом и чистом зато
Я пишу бледно-серое нечто,
Смахивающее на ничто.

А.Великий

Начнем с двух задач, недавно предлагавшихся на олимпиадах.

Задача 1 (М2447, XXXVIII Турнир городов). *Докажите, что в прямоугольном треугольнике ортоцентр треугольника, образованного точками касания сторон с вписанной окружностью, лежит на высоте, проведенной из прямого угла (рис.1).*

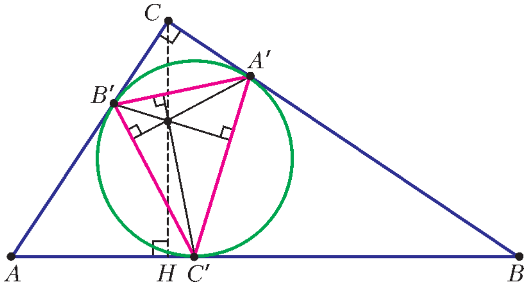

Рис. 1

Решение. Пусть в треугольнике ABC $\angle C = 90°$; A', B', C' – точки касания вписанной окружности со сторонами BC, CA, AB; CH – высота (рис.2). Так как $B'C'$ образует равные углы с прямыми AC, AB, высота из вершины A' образует равные углы с перпендикулярными им прямыми CB, CH. Следовательно, эта высота пересекает CH в такой точке H', что $CH' = CA'$. Поскольку $CA' = CB'$, высота из B' также проходит через H'.

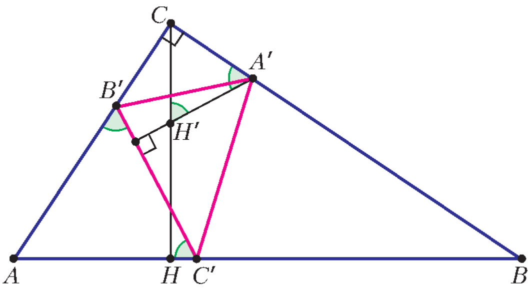

Рис. 2

Примечание. Если I – центр вписанной окружности треугольника ABC, а r – ее радиус, то $IA'CB'$ – квадрат. Поэтому из приведенного решения следует также, что $CH' = r$.

Упражнения

1. Докажите, что основания высот треугольника $A'B'C'$, проведенных из A' и B', являются точками пересечения биссектрис углов B и A соответственно со средней линией треугольника ABC, а вместе с точками C и C' они являются четверкой вершин параллелограмма.

2. Пусть в произвольном треугольнике KLM точка O' – точка, симметричная центру описанной окружности O относительно прямой KL, H – ортоцентр. Докажите, что четырехугольник $MOO'H$ является параллелограммом (возможно вырожденным). Получите другое решение задачи 1, применив этот факт к треугольнику $A'B'C'$.

Задача 2 (XIII Олимпиада имени И.Ф.Шарыгина, заочный тур). *В прямоугольном треугольнике ABC точка C_0 – середина гипотенузы AB; AA_1, BB_1 – биссектрисы; I – центр вписанной окружности. Докажите, что прямые C_0I и A_1B_1 пересекаются на высоте, проведенной из вершины C.*

Решение. Воспользуемся следующим фактом (верным для любого треугольника).

Лемма. *Прямая C_0I пересекает высоту CH в точке, лежащей на расстоянии r от вершины C.*

Действительно, пусть C'' – точка касания стороны AB с вневписанной окружностью, а C_2 – точка вписанной окружности, диаметрально противоположная C' (рис. 3). Точка C – центр гомотетии вписанной и вневписанной окружностей, при этом C_2 и C'' – соответствующие («верхние») точки окружностей, значит, C, C_2, C'' лежат на одной прямой. Кроме того, $C'C_0 = C''C_0$, т.е. C_0I – средняя линия треугольника $C'C''C_2$, и $C_0I \parallel CC_2$. Значит, прямые CC_2, C_2I, C_0I и CH образуют параллелограмм, откуда и следует утверждение леммы.

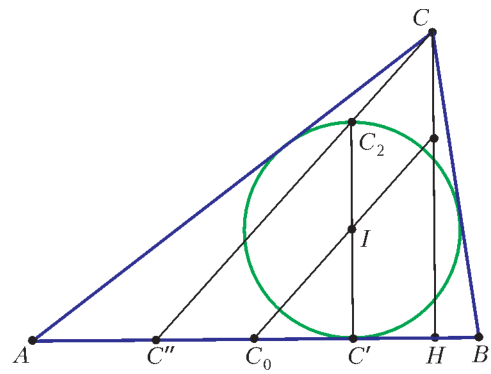

Рис. 3

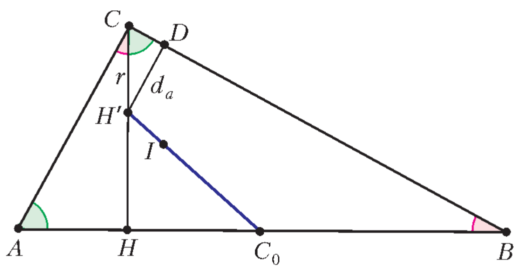

Рис. 4

Вернемся к задаче. Обозначим точку пересечения C_0I и CH через H' (рис.4). Так как $CH' = r$, расстояния от H' до прямых BC, CA и AB равны, соответственно,

$$d_a = r\cos\angle HCB = r\cos\angle BAC = r\cdot AC/AB,$$

$$d_b = r\cdot BC/AB \text{ и } d_c = CH - r.$$

Поскольку удвоенная площадь треугольника равна $(AB+BC+CA)r = AB\cdot CH$, из этих равенств следует, что $d_c = d_a + d_b$. Очевидно, что этим свойством обладают также расстояния от точек A_1, B_1 до прямых BC, CA и AB. По теореме Фалеса нетрудно вывести, что все точки, обладающие этим свойством, лежат на прямой A_1B_1 (подробно об этом можно прочесть в статье А.Карлюченко и Г.Филипповского «Лемма биссектрального треугольника» в «Кванте» №2 за 2016 г.).

Из примечания к задаче 1 видно, что в обеих задачах речь шла об одной и той же точке. Поэтому из утверждений задач 1 и 2 следует, что:

– ортоцентр треугольника $A'B'C'$ лежит на прямой A_1B_1;

– ортоцентр треугольника $A'B'C'$ лежит на прямой C_0I.

Поскольку C_0 – центр описанной окружности треугольника ABC, последнее утверждение является частным случаем следующего общего факта (этот факт уже появлялся в «Задачнике «Кванта» – см. задачу М1819):

В треугольнике ABC точка O – центр описанной окружности, I – центр вписанной окружности, A', B', C' – точки касания вписанной окружности со сторонами BC, CA, AB. Тогда ортоцентр треугольника $A'B'C'$ лежит на прямой OI.

Об этом факте можно прочитать также в статье К.Козеренко и П.Факанова «Птолемеева ось треугольника» в «Кванте» №2 этого года.

Упражнение 3. Докажите, используя рисунок 5, что $OI/IH' = R/r$, и получите отсюда другое решение задачи 1.

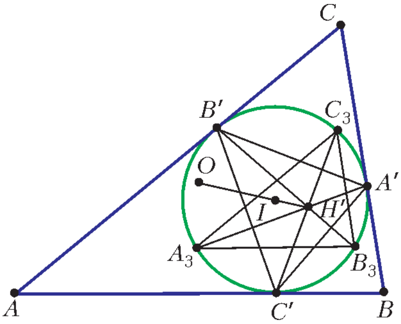

Рис. 5

Задача 3. *Пусть в треугольнике ABC $\angle C = 90°$ и $AC \ne BC$. Докажите, что прямая $A'B'$, касательная к описанной окружности треугольника ABC, проведенная в точке C, и прямая, проходящая через I и параллельная AB, пересекаются в одной точке.*

Решение. Пусть SC – касательная к описанной окружности, а точка S на ней такова, что $SI \parallel AB$ (рис.6). Тогда

$$\angle SCI = \angle SCA + \angle ACI = \angle ABC + \angle ACB/2,$$

$$\angle SIC = \angle ABC + \angle BCI = \angle ABC + \angle ACB/2.$$

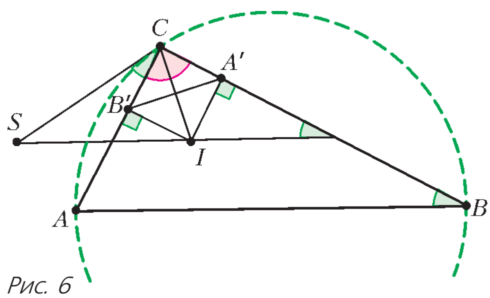

Рис. 6

Равенство $\angle SCI = \angle SIC$ означает, что треугольник CSI равнобедренный: $SI = SC$. Но так как $CB'IA'$ – квадрат, прямая $A'B'$ – это серединный перпендикуляр к CI, значит, $A'B'$ проходит через S.

Оказывается, через точку S из предыдущей задачи проходит и прямая A_1B_1, соединяющая основания биссектрис, и прямая, соединяющая точки касания вневписанных окружностей с катетами.

Для того чтобы это установить, удобно воспользоваться свойствами двойных отношений четверок точек. Сформулируем их в виде упражнений. Если решение упражнений вызовет трудности, можно обратиться к статье В.Тадеева «Простые, двойные, гармонические» (см. «Квант» №7 за 1982 г.).

Определение 1. *Двойным отношением* четырех точек A, B, C и D, лежащих на одной прямой, называется действительное число

$$(ABCD) = \frac{\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right)}{\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}\right)}.$$

Упражнение 4. Докажите, что двойное отношение сохраняется при *центральной проекции*, т.е. если O – произвольная точка и прямые OA, OB, OC и OD пересекают произвольную прямую l' в точках A', B', C' и D' соответственно, то $(ABCD) = (A'B'C'D')$.

Определение 2. *Двойным отношением четырех прямых OA, OB, OC и OD* называется двойное отношение четырех точек, в которых они пересекают произвольную пятую прямую.

Определение 3. Четверка точек A, B, C, D называется *гармонической*, если $(ABCD) = -1$. Специальный случай гармонической четверки возникает, когда C – середина отрезка AB, а D – бесконечно удаленная точка.

Аналогично определяется гармоническая четверка прямых.

Упражнение 5. Докажите, что:

– внешняя и внутренняя биссектрисы угла треугольника вместе с двумя его сторонами образуют гармоническую четверку прямых;

– две стороны треугольника, медиана, проведенная к третьей стороне, и прямая, параллельная этой стороне и проходящая через противоположную вершину, образуют гармоническую четверку.

Вернемся к исследованию нашей конфигурации.

Задача 4. *Докажите, что в условиях задачи 3 прямая A_1B_1 проходит через точку S.*

Решение. Пусть касательная в точке C пересекает прямую A_1B_1 в точке K. Достаточно показать, что $IK \parallel AB$, тогда K будет совпадать с S.

Так как $\angle KCA = \angle ABC = \angle ACH$, прямые CA, CB, CH, CK образуют гармоническую четверку. Следовательно, гармоническими будут также четверка точек B_1, A_1, H', K и четверка прямых IA, IB, IC_0, IK. Поскольку C_0 – середина AB, получаем, что $IK \parallel AB$ (рис.7).

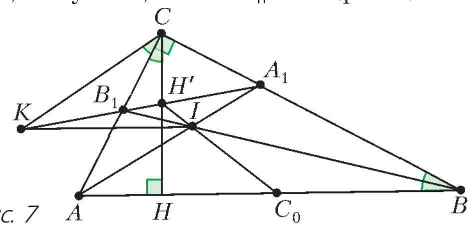

Рис. 7

Упражнения

6. Докажите, что в условиях задачи 3 через точку S проходит прямая $A''B''$, где A'' и B'' – точки касания катетов с соответствующими вневписанными окружностями (рис.8).

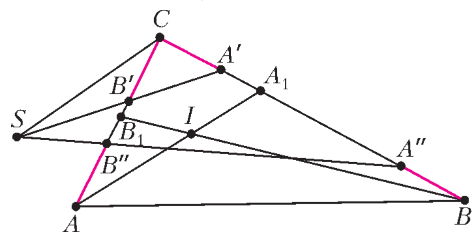

Рис. 8

Указание. Четверки точек C, A_1, A', A'' и C, B_1, B', B'' – гармонические.

7. Докажите, что в любом треугольнике четыре прямые, соединяющие

– точки касания двух сторон с вписанной окружностью,

– точки касания этих сторон с соответствующими вневписанными окружностями,

– основания проведенных к этим сторонам высот,

– основания проведенных к этим сторонам биссектрис

пересекаются в одной точке (либо параллельны).

Выявите связь этого общего факта с задачей 4 и упражнением 6.

Указание. Используйте двойные отношения четверок точек.

Задача с кружка, или Еще раз о задаче M2447

М.Панов

Появление на олимпиаде – зачастую лишь начало интересной жизни задачи. Этот рассказ – об интересных превращениях, которые случились с одной геометрической задачей, все с той же задачей M2447, которая обсуждается в статье А.Заславского из этого номера:

Задача. *Докажите, что в прямоугольном треугольнике ABC ортоцентр H' треугольника $A'B'C'$, образованного точками касания сторон с вписанной окружностью, лежит на высоте CH, проведенной из вершины прямого угла.*

Эта задача предлагалась на весеннем туре Турнира городов 2016 года. После олимпиады задачу стали обсуждать на геометрическом кружке Р.К.Гордина в 57 школе.

На кружке школьники рассказали очень красивое решение, придуманное еще во время турнира. Известно, что для любого треугольника ABC верна теорема Гамильтона: вектор $\overrightarrow{OH}$ равен сумме векторов $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, где O и H – центр описанной окружности и ортоцентр (докажите это!). Поскольку в нашей задаче I – центр описанной окружности треугольника $A'B'C'$, то $\overrightarrow{IH'}=\overrightarrow{IA'}+\overrightarrow{IB'}+\overrightarrow{IC'}$ (рис. 1). Осталось заметить, что $CA'IB'$ – квадрат, т.е. $\overrightarrow{IA'}+\overrightarrow{IB'}=\overrightarrow{IC}$, и что $IC' \parallel CH'$.

Один из участников кружка, Д.Минеев, заметил (используя программу для геометрических построений geogebra), что

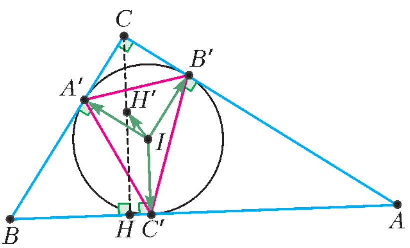

Рис. 1

через тот же ортоцентр проходят еще две прямые: прямая A_1B_1, где A_1, B_1 – основания биссектрис острых углов, и прямая C_0I, где I – центр вписанной окружности данного треугольника ABC, а C_0 – середина гипотенузы AB (она же центр описанной окружности треугольника ABC). Получилось такое обобщение.

Обобщение 1. *В прямоугольном треугольнике ABC точка C_0 – середина гипотенузы AB; AA_1, BB_1 – биссектрисы; I – центр вписанной окружности. Докажите, что прямые C_0I и A_1B_1 пересекаются на высоте CH, проведенной из вершины C.*

Это обобщение – точная копия задачи 2 из упомянутой статьи А.Заславского. Тогда на кружке все принялись доказывать это обобщение. Решить задачу удалось, причем несколькими способами. Д.Глуховский из 11 класса решил ее с помощью центра масс. (Об этом методе можно прочитать в книге М.Балка, В.Болтянского «Геометрия масс» серии «Библиотечка «Квант».) Он поместил подходящие массы в точки A, B, C и C_0 так, чтобы центр масс системы лежал на каждой из трех нужных прямых: в точку A поместил массу a^2+ab, в точку B – массу $ab+b^2$, в точку C – массу $ac+bc$, а в точку C_0 – отрицательную массу $(-2ab)$, где $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$. Читатель может в качестве упражнения провести нужные группировки масс и окончить доказательство.

Но оказалось, что в этом решении тот факт, что треугольник прямоугольный, используется ровно один раз – когда вычисляется отношение $AH:BH=b^2:a^2$. В произвольном треугольнике ABC точка S, делящая сторону AB в отношении $AS:BS=AC^2:BC^2$, – это основание *симедианы.* Симедиана – это прямая, симметричная медиане треугольника относительно соответствующей биссектрисы (о симедиане можно прочитать, например, в статье Ю.Блинкова в «Кванте» №4 за 2015 г.). Получается, что это решение с массами доказывает следующее обобщение.

Обобщение 2. *В произвольном треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и BB_1, пересекающиеся в точке I (центре вписанной окружности); C_0 – середина AB; прямые A_1B_1 и C_0I пересекаются в точке N. Тогда CN – симедиана, т.е. $\angle ACN=\angle BCC_0$.*

На этом дело на закончилось: Д.Креков сказал, что не обязательно, чтобы C_0 была серединой, и сформулировал очередное обобщение.

Обобщение 3. *В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и BB_1, пересекающиеся в точке I (центре вписанной окружности); M – произвольная точка на AB; прямые A_1B_1 и MI пересекаются в точке N. Тогда $\angle ACN=\angle BCM$ (рис.2).*

У этой задачи нашлись два решения. В каждом решении вместо равенства $\angle ACN=\angle BCM$ доказывается эквивалентное тригонометрическое равенство

$$\frac{\sin\angle NCA}{\sin\angle NCI}=\frac{\sin\angle BCM}{\sin\angle BCI},$$

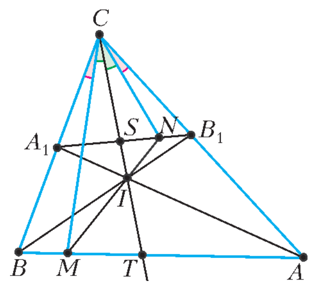

Рис. 2

или

$$\frac{\sin \angle ACN}{\sin \angle NCB} = \frac{\sin \angle BCM}{\sin \angle MCA}.$$

(Строгое обоснование эквивалентности можно провести, исходя из монотонности функции $f(x) = \dfrac{\sin(\alpha - x)}{\sin x}$ на интервале $0 < x < \alpha$, где α – фиксированный угол, $0 < \alpha < \pi$.)

В первом решении после многократного применения теоремы Чевы в форме синусов (для треугольников B_1CI, BCI и ABB_1) получалось соотношение

$$\frac{\sin \angle NCA}{\sin \angle NCI} = \frac{\sin \angle BCM}{\sin \angle BCI}$$

(получите его!).

Другой способ придумал М.Волчкевич. Пусть NX, NY, NZ – перпендикуляры из N на стороны AC, BC, AB; MV, MW – перпендикуляры из M на стороны AC, BC. Вспомним известное свойство прямой A_1B_1: для любой точки отрезка A_1B_1 сумма расстояний от нее до прямой AB равна сумме расстояний до прямых AC и BC (см., например, статью А.Карлюченко и Г.Филипповского «Лемма биссектрального треугольника» в «Кванте» №2 за 2016 г.). С помощью этого свойства можно вывести соотношение

$$\frac{NX}{NY} = \frac{MW}{MV},$$

что равносильно равенству

$$\frac{\sin \angle ACN}{\sin \angle NCB} = \frac{\sin \angle BCM}{\sin \angle MCA}.$$

Предлагаем читателю восстановить все детали этого красивого решения.

Ну и, наконец, уже после всего произошедшего на кружке задача была показана М.Евдокимову, и он предложил еще одно обобщение.

Обобщение 4. *В треугольнике ABC проведена биссектриса угла C и на ней взята произвольная точка I. Прямые AI и BI пересекают стороны BC и AC в точках A_1 и B_1; M – произвольная точка на AB; прямые A_1B_1 и MI пересекаются в точке N. Тогда $\angle ACN = \angle BCM$.*

А доказательство получилось короткое, практически в одну строчку. Техническую работу с отношениями синусов или расстояний заменила работа с двойными отношениями четверок точек и прямых (об этом также можно прочитать в статье А.Заславского).

Пусть S, T – пересечения биссектрисы CI с прямыми A_1B_1 и AB соответственно. При центральной проекции из точки I с прямой AB на прямую A_1B_1: $A \mapsto A_1$, $M \mapsto N$, $B \mapsto B_1$, $T \mapsto S$. Из сохранения двойного отношения при центральном проектировании получаем

$$\frac{A_1S}{B_1S} : \frac{A_1N}{B_1N} = \frac{AT}{BT} : \frac{AM}{BM}.$$

Это соотношение можно переписать в виде равенства

$$\frac{\sin \angle A_1CS}{\sin \angle B_1CS} : \frac{\sin \angle A_1CN}{\sin \angle B_1CN} = \frac{\sin \angle ACT}{\sin \angle BCT} : \frac{\sin \angle ACM}{\sin \angle BCM},$$

или

$$\frac{\sin \angle BCN}{\sin \angle ACN} = \frac{\sin \angle ACM}{\sin \angle BCM}.$$