Геометрические шедевры Шарыгина

В.ПРОТАСОВ, В.ТИХОМИРОВ

Творческая жизнь Игоря Федоровича Шарыгина складывалась не вполне обычным образом. Он проявил себя очень одаренным студентом. Закончив Московский университет в 1959 году, он поступил в аспирантуру и успешно завершил ее, защитив диссертацию, где им были получены яркие математические результаты в теории функций и теории приближений. Но вскоре после аспирантуры он оставил «высокую науку» и целиком посвятил себя школьной математике – исследованиям по элементарной геометрии – и развитию математического просвещения. Он оставил множество замечательных книг и статей, но, пожалуй, в наибольшей мере его талант проявился в геометрическом композиторстве, т.е. в создании геометрических шедевров. Этой стороне его творчества и посвящена наша статья. Она написана двумя авторами. Первый из них причисляет себя к ученикам Шарыгина, второй был связан с Игорем Федоровичем почти пятидесятью годами дружбы и творческого взаимодействия.

Как отобрать из огромного геометрического наследия Игоря Федоровича несколько задач для небольшой журнальной статьи? Признаться, для авторов это было большой проблемой. Мы решили поступить просто: написать про те задачи Шарыгина, которые в наибольшей мере понравились и запомнились нам. Это будет, конечно, весьма субъективный взгляд. Хотя, как сказал один замечательный писатель, все мнения всегда субъективны, а объективного мнения не существует вовсе.

Начнем с такой красивой миниатюры.

Задача 1. *В треугольнике ABC с углом B, равным 120°, проведены биссектрисы AA', BB' и CC' (рис.1). Чему равен угол $A'B'C'$?*

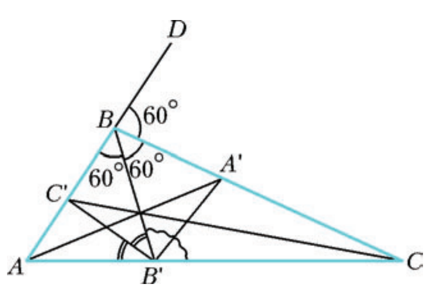

Рис. 1

Задача уникальна тем, что рассчитана на учеников 7 класса средней школы[1], однако вызывает трудности у всех, кто видит ее впервые, включая абитуриентов математических факультетов, победителей олимпиад и профессиональных математиков. Причина проста: эта задача чрезвычайно трудно «считается». Желающие могут попробовать решить ее с помощью теорем синусов, косинусов и формул тригонометрии. Это возможно, но совсем не просто. Подобные «крепкие орешки» сам Игорь Федорович очень ценил. Называя тригонометрию «киллером» геометрии, которая часто позволяет найти короткое счетное решение и тем самым лишить красивую задачу всякой геометрической идеи, он стремился создавать такие задачи, в которых тригонометрия была бы бессильна или слаба. Задача 1 является одним из «антикиллером».

Вот авторское решение задачи, которое мы разбиваем на отдельные пункты, выделяя «логические ходы».

1) Рассмотрим треугольник ABB' (!)(см. рис.1).

2) Угол B в треугольнике ABC равен 120°, следовательно, угол $B'BC$ равен 60°, ибо BB' – биссектриса.

3) Продолжим сторону AB и обозначим через BD луч, продолжающий AB. Тогда угол CBD тоже равен 60°, ибо он дополняет угол B до развернутого угла.

4) Следовательно, BC – это биссектриса внешнего (по отношению к треугольнику ABB') угла $B'BD$.

5) Воспользуемся известной теоремой: *биссектрисы двух внешних и третьего внутреннего углов треугольника пересекаются в одной точке.*

6) Из этой теоремы следует, что $B'A'$ биссектриса (тоже внешнего по отношению к треугольнику ABB') угла $BB'C$ (!).

7) Совершенно аналогично доказывается, что $B'C'$ – биссектриса угла $BB'A$.

8) Значит, угол $A'B'C'$ равен половине развернутого угла $AB'C$, т.е. он равен 90°.

Эта задача может быть сформулирована и в сферической геометрии. Поясним, что это значит. Если вы возьмете модель сферы – резиновый мячик, на котором можете рисовать, – и нарисуете три больших круга, у вас получатся два центрально симметричных сферических треугольника. Рассмотрим один из них. Обозначим его вершины снова A, B и C. В этом треугольнике величины углов определяются как величины углов между касательными к сфере, проведенными в соответствующей вершине. Поэтому можно понять, что значит «угол B равен сто двадцати градусам». Определение биссектрисы такое же, как на плоскости, – это дуга большого круга, проходящая через вершину угла и делящая его пополам. Сохраняется и свойство биссектрисы быть равноудаленной от сторон угла. А потому и формулировка задачи 1, и ее решение, и ответ сохраняются, если ставить задачу на сфере!

А те, кто знают, что такое геометрия Лобачевского, сразу поймут, что и формулировка задачи 1, и ее решение, и ответ сохраняются, если ставить задачу на плоскости Лобачевского.

Все три утверждения вместе объединяет фраза: *задача 1 является фактом абсолютной геометрии* (*т.е. не зависит от аксиомы о параллельных*).

Обсудим вопрос: а на самом деле трудна или нет рассмотренная нами задача 1? Давайте на ее примере пофилософствуем над тем, как оценивать трудность математической проблемы и можно ли вообще это делать.

В принципе, трудность конкретного решения задачи можно оценивать числом логических ходов, но можно эти логические ходы распределять по трем категориям и описывать сложность решения тремя натуральными числами (или нулями), характеризующими *высоту*, *ширину* и *глубину* этого решения.

Высота – это число простых импликаций в решении. Выше мы выделили восемь логических ходов. Некоторые из них – это *простые логические связки*. Таков, например, пункт 2: $\angle B = 120°$, BB' – биссектриса $\Rightarrow \angle B'BC = 60°$.

---

[1] *Она была включена в рабочие тетради для седьмого класса (В.Ю.Протасов, И.Ф.Шарыгин. Геометрия. Рабочая тетрадь. 7 класс. – М.: Дрофа, 1997). Дело в том, что решение задачи не использует ничего, кроме свойства биссектрисы находиться на равных расстояниях от сторон угла.*

Иные же логические ходы – это *отсылки на известные теоремы*. Таков пункт 5. (При этом, разумеется, список «известных теорем» необходимо как-то заранее фиксировать). Число отсылок составляют ширину приводимого решения.

И наконец, два хода отмечены восклицательными знаками – они характеризуют глубину решения. Такова символика комментирования шахматной партии: восклицательными знаками выделяются наиболее замечательные ходы, не вытекающие из поверхностного взгляда на позицию и свидетельствующие об особой изощренности игрока в данный момент. Так и здесь ниоткуда не следует, что разумно рассматривать именно треугольник ABB', но действительно оказывается, что в этом рассмотрении – ключ к решению задачи. А второй восклицательный знак поставлен логическому ходу, где обнаруживается, что $B'A'$ – биссектриса внешнего угла. Тоже прямо ниоткуда не следует, что именно в этом суть дела.

Подведем итог: в нашем решении высота равна пяти, ширина – единице, а глубина – двум. Отметим сразу, что подавляющее большинство геометрических задач Шарыгина обладает нетривиальной глубиной, в частности и в только что определенном значении этого слова.

Но, прервем пока наши философские обсуждения.

Задача 2. *Про четырехугольник ABCD известно, что он вписан в окружность и что существует окружность с центром на стороне AD, касающаяся трех других сторон. Докажите, что AD (длина отрезка) равняется AB + CD.*

Эта задача была придумана Шарыгиным для «Задачника «Кванта» и сразу стала популярной. А через несколько лет она была включена в вариант Международной математической олимпиады, причем не от России (тогда СССР), а от другой страны, и, конечно же, без ссылки на автора. Один из близких друзей Игоря Федоровича заметил как-то, что Шарыгина постоянно обкрадывали.

Снова попробуем оценить сложность приводимого далее решения.

1) Проведем окружность через точки B, C и O, где $O \in AD$ – центр окружности, касающейся AB, BC и CD (!) (рис.2,*а*).

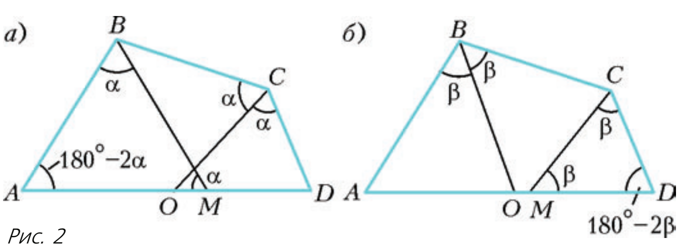

Рис. 2

2) Пусть M – другая точка (может быть, совпадающая с O), в которой окружность пункта 1 пересекает прямую AD, угол AMB обозначим через α (!).

3) Четырехугольник $OBCM$ – вписанный, и потому $\angle BCO = \alpha$.

4) Стороны CB и CD касаются (по условию задачи) окружности с центром O, и потому CO – биссектриса.

5) Из п.4 и 3 следует, что $\angle BCD = 2\alpha$.

6) Четырехугольник $ABCD$ вписанный (по условию), следовательно, из п.5 вытекает, что, $\angle BAD = 180° - 2\alpha$.

7) В треугольнике ABM известны два угла A и M, следовательно, $\angle ABM$ равен $180° - (180° - 2\alpha + \alpha) = \alpha$.

8) Из п.7. следует, что треугольник ABM равнобедренный, т.е. $AB = AM$

9) Аналогично доказывается, что $CD = DM$ (рис.2,*б*), откуда и следует утверждение задачи.

Мы видим, что здесь 9 логических ходов, два восклицательных знака (то, что через три точки B, C и O надо проводить окружность, – это изобретение, это акт наития или творческой силы, потому и стоит первый восклицательный знак, но то, что важнейшую роль сыграет точка M, тоже очень нестандартно). И широта приведенного решения весьма значительная: п.3 – теорема о равенстве углов, опирающихся на одну и ту же дугу; п.4 – теорема о биссектрисе; п.6 – теорема о сумме противоположных углов вписанного четырехугольника; п.7 – теорема о сумме углов треугольника; наконец, п.9 – теорема о равенстве углов равнобедренного треугольника.

Итак, высота приведенного решения равна двум, ширина – пяти и глубина – тоже двум.

В 1993 году старшему из авторов этой статьи было поручено возглавить жюри очередной Московской математической олимпиады. Естественно было обратиться к И.Ф.Шарыгину с просьбой придумать задачи к ней. Вот его задача для 9 класса. Она шла под шестым номером, как самая трудная.

Задача 3. *Дан четырехугольник ABCD. Известно, что $\angle BAC = 30°$, $\angle D = 150°$ и, кроме того, AB = BD. Требуется доказать, что AC – биссектриса угла C.*

Вот авторское решение задачи.

1) Пусть B' – точка, симметричная B относительно AC (рис.3,*а*).

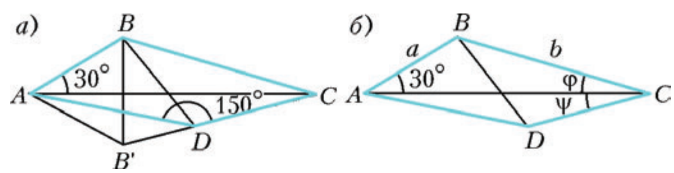

Рис. 3

2) В силу симметрии, $AB = AB'$ и $\angle BAC = \angle B'AC$.

3) Из п. 2 следует, что треугольник ABB' равносторонний.

4) Из п. 3 и условия $AB = BD$ вытекает, что точки A, B' и D лежат на окружности с центром в B (радиуса AB) (!).

5) Из п.3 и 4 вытекает, что угол ADB' опирается на дугу в 60°.

6) Из п.5 следует, что $\angle ADB' = 30°$.

7) Из п.6 получаем, что точка D лежит на одной прямой с B' и C.

8) Следовательно, прямая CD симметрична CB, т.е. AC – биссектриса угла BCD, что и требовалось.

Но продолжим наше философствование. А как же все-таки оценивать сложность самой задачи, а не ее решения? Можно поступить так, как часто математики и поступают: в качестве оценки сложности задачи можно взять минимум сложности по всем имеющимся решениям. Попробуем приложить эту идеологию к задаче 3.

До сих пор было рассказано о геометрических решениях. А сейчас будет представлено аналитическое решение задачи 3.

Очень старый и глубокий вопрос многими математиками ставился так: что лучше – алгебра и анализ или геометрия? Как вы уже наверняка поняли, И.Ф.Шарыгин был сторонником именно геометрии, и первый автор этой статьи такое мнение всегда разделял. Второй автор посвятил обсуждению этого вопроса несколько статей (в частности, в «Кванте»), стараясь защитить концепцию, что не следует упорядочивать несравнимое, не нужно отдавать предпочтение чему-то одному, неразумно явным образом становиться на одну из двух сторон. Мир наполнен двойственностью, вещами, которые неразрывно связаны друг с другом, но дают возможность посмотреть на мир с двух разных сторон. И вот такими двумя разными сторонами являются геометрия и алгебра.

Переходим теперь к описанию аналитического решения.

1) Обозначим $\angle BCA$ через φ, а $\angle DCA$ – через ψ, сторону AB обозначим через a, а BC – через b (рис.3,*б*).

2) Из треугольника ABC по теореме синусов получаем

$$\frac{a}{\sin\varphi} = \frac{b}{\sin 30°} = 2b. \quad (1)$$

3) Обозначим $\angle CAD$ через χ; из условия ($\angle ADC = 150°$), п.1 и теоремы о сумме углов треугольника вытекает равенство

$$\chi = 180° - 150° - \psi = 30° - \psi.$$

4) Из условий задачи ($\angle BAC = 30°$ и $AB = BD$) и п.3 следует, что $\angle A = 60° - \psi = \angle BDA$.

5) Из п.4 следует, что $\angle BDC = 90° + \psi$.

6) По теореме синусов из треугольника CBD следует соотношение

$$\frac{a}{\sin(\varphi+\psi)} = \frac{b}{\sin(90°+\psi)}. \quad (2)$$

7) Из (1) и (2) получаем

$$\sin(\varphi+\psi) = 2\sin\varphi\cos\psi.$$

8) Раскрывая синус суммы, приходим к равенству

$$\sin\varphi\cos\psi = \cos\varphi\sin\psi.$$

9) Из п.8 следует, что $\varphi = \psi$. Задача решена.

Как сравнить приведенные решения? Импликаций в аналитическом решении чуть больше, но восклицательных знаков там совсем нет: задачу можно признать *стандартной*. Возможны различные предпочтения: опытные геометры проголосуют за первое, неопытные, но владеющие тригонометрией, – за второе решение. На олимпиаде эту задачу решили 5–6 человек, и был лишь один плюс-минус за аналитическое решение.

И еще один, в каком-то смысле драматический, момент в жизни второго автора связан с И.Ф.Шарыгиным. Это случилось летом 1984 года. Шла подготовка к очередной Международной математической олимпиаде. Происходила эта подготовка под Москвой, в доме отдыха. Туда привезли команду, и разные математики приезжали ее тренировать. Попросили принять участие и второго из авторов этой статьи. А он как раз тогда писал свою книжку «Рассказы о максимумах и минимумах» и пропагандировал мысль, что большинство задач плоской геометрии на максимум и минимум можно решить так: надо их формализовать разумным образом, а потом применять либо теорему Ферма о том, что в точках максимума и минимума производная равняется нулю, либо правило множителей Лагранжа. И будущим олимпийцам крайне неосторожно было предложено давать лектору геометрические задачи на максимум и минимум, а он будет их немедленно решать по своей методе (которая в лекции была уже изложена). А потом олимпийцам предлагалось рассказывать свои решения и сравнивать «кто кого». Это предложение вызвало бурное веселье: олимпийцы были уверены в том, что победа будет за ними, тем более что незадолго до того их учил геометрии сам Игорь Федорович Шарыгин.

Вот одна из тех задач, автором которой был, конечно, Игорь Федорович; она фигурировала на Московской олимпиаде в 1980 году.

Задача 4. *Дан круг с центром O, AC – диаметр круга. На OC дана точка F. Спрашивается, как провести хорду BD через точку F так, чтобы площадь четырехугольника ABCD была максимальной?*

Вот решение И.Ф.Шарыгина.

1) Рассмотрим треугольники ABC и OBF (рис.4,*а*).

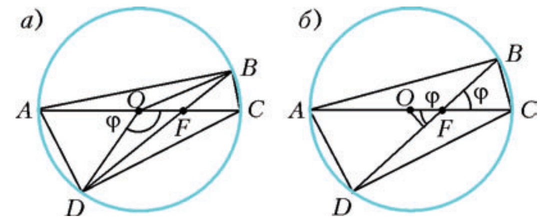

Рис. 4

2) У этих треугольников высоты одинаковые, следовательно, площади относятся так же, как OF относится к AC.

3) Аналогично получаем

$$\frac{S_{OBF}}{S_{ABC}} = \frac{OF}{AC} = \frac{S_{ODF}}{S_{ADC}}.$$

4) Следовательно, суммируя, получаем, что

$$\frac{S_{OBD}}{S_{ABCD}} = \frac{OF}{AC}.$$

5) Значит, вместо того чтобы максимизировать площадь четырехугольника, возможно максимизировать площадь треугольника *OBD.*

6) Или, что то же самое, максимизировать $\sin\angle BOD$. В этом месте возникает красивая неожиданность – «смена режима».

7) Обозначим угол BOD через φ. Наилучший угол обозначим $\hat\varphi$. Очевидно, что $\varphi_0 \le \pi$, где φ_0 соответствует случаю перпендикулярности AC и BD, и потому, если $\varphi_0 \le \pi/2$, то максимальная площадь соответствует значению $\hat\varphi = \pi/2$, если же $\varphi_0 > \pi/2$, то $\hat\varphi = \varphi_0$.

(Читателю предоставляется возможность самостоятельно найти число логических ходов в этом рассуждении.)

Так вот, школьники-олимпийцы предложили лектору решить эту задачу с помощью производных. Вот каким оказалось решение.

1) Сначала надо формализовать задачу. Пусть $AC = 1$, $OF = a$, а угол BFC обозначим φ (рис.4,*б*).

2) Олимпийцы подсказали, что площадь четырехугольника, вписанного в окружность, равна полупроизведению диагоналей на синус (острого) угла между ними.

3) Длина второй диагонали BD равна $2\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}$.

4) Из п.2 и 3 следует, что надо найти максимум функции $g(\varphi) = \sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}\,\sin\varphi$ при условии, что $0 \le \varphi \le \pi/2$.

5) Делаем замену $a\sin\varphi = \sqrt{z}$ и приходим к задаче о нахождении минимума функции $f(z) = (1-z)z$ при условии, что $0 \le z \le a^2$.

Это – простая задача, и можно ограничиться лишь выписыванием ответа: если $0 \le a \le \frac{1}{\sqrt2}$, то $\hat z = a^2$, т.е. $\hat\varphi = \frac{\pi}{2}$; если же $\frac{1}{\sqrt2} < a \le 1$, то $\hat z = \frac12$, т.е. $\hat\varphi = \arcsin\frac{1}{a\sqrt2}$.

Теперь судите сами, какое решение проще – геометрическое или аналитическое.

С этой задачей лектор справился достаточно успешно, и тогда рассерженные олимпийцы дали ему еще одну задачу, про которую уже твердо были уверены, что лектору ее не осилить. И действительно, сходу у него ничего не получилось, и он вынужден был взять тайм-аут, сказав: «Пойдите-ка попейте чайку!» А за время тайм-аута кое-как все же справился с решением.

Вот эта задача: *Дан угол A и в нем внутри две точки M и N. Как провести прямую BC через точку M так, чтобы* *площадь четырехугольника ABNC была минимальной (точки B и C лежат на сторонах угла A)?*

Читателю предлагается самостоятельно ее решить, а о том, как она решается с помощью анализа, можно прочитать в книге «Рассказы о максимумах и минимумах» (Библиотечка «Квант», вып.56).

Возможность аналитического решения не может бросить тень на две последние задачи: в обеих скрыто истинное изящество.

А вот еще один шедевр Шарыгина. Правда, Игорю Федоровичу он принадлежит лишь отчасти, сама задача довольно старая. Но – все по порядку.

Задача 5 (обобщенная теорема о бабочке). *На окружности дана хорда AB, на ней – точки M и N, причем $AM = BN$. Через точки M и N проведены хорды PQ и RS соответственно. Прямые QS и RP пересекают AB в точках K и L. Докажите, что $AK = BL$.*

История этой задачи довольно запутанная.

Дело в том, что ей предшествовала не обобщенная, а классическая теорема о бабочке. Классическая теорема о бабочке соответствует случаю $M = N$, т.е. все то же самое, но изначально берется только одна точка M – середина хорды AB, через нее проводятся две произвольные хорды PQ и RS и утверждается, что $AK = BL$, где K и L – точки пересечения прямой AB с прямыми QS и RP соответственно. Классическая теорема о бабочке была очень известна и популярна. Появилась она довольно давно – в 1815 году в английском журнале «Gentleman's Dairy» (тогда не предполагалось, что женщины могут заниматься математикой, поэтому математические задачи публиковались в мужских журналах). На протяжении всех последующих лет «бабочка» доставляла истинное удовольствие каждому, кому доводилось с ней познакомиться. И, что интересно, были постоянные публикации, посвященные этой задаче, число этих публикаций перевалило за несколько сотен. Существует огромное количество разных решений этой задачи – например, в известной книжке Д.О.Шклярского, Н.Н.Ченцова и И.М.Яглома «Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум», в книге В.В.Прасолова «Задачи по планиметрии» и, естественно, в задачниках Шарыгина.

А как же родилась обобщенная теорема о бабочке? Будучи убежден, что красивая геометрическая теорема должна иметь чисто геометрическое доказательство, Игорь Федорович придумал такое доказательство для (классической) теоремы о бабочке. А потом просто заметил, что ничего не изменится в доказательстве, если «раздвоить» точку M на пару симметричных точек M и N. Так, спустя более чем полтора столетия, родилось естественное обобщение теоремы о бабочке. Это еще раз подтверждает совершенно особое положение элементарной геометрии. Геометрические теоремы и задачи всегда свежи и никогда не устаревают!

Рассмотрим подробнее то самое геометрическое решение, единое для классической и для обобщенной «бабочек».

Сделаем симметрию относительно серединного перпендикуляра к хорде AB. Окружность при этом перейдет в себя, точки N, Q, R – в точки M, Q', R' соответственно. Докажем, что прямые $Q'K$ и $R'M$ пересекаются на окружности, из этого будет следовать, что симметрия перевела точку L в точку K, что и требовалось. Для этого обозначим через V вторую точку пересечения исходной окружности с окружностью PMK. Так как четырехугольники $PMKV$ и $PQQ'V$ – вписанные, то $\angle QPV = 180° - \angle MKL = 180° - \angle QQ'V$, следовательно, $\angle MKL = \angle QQ'V$. С учетом того, что прямые QQ' и MK параллельны, отсюда вытекает, что точки V, K, Q' лежат на одной прямой. Итак, прямая $Q'K$ проходит через точку V. Точно так же доказывается, что прямая $R'M$ проходит через V. Таким образом, $Q'K$ и $R'M$ пересекаются на исходной окружности, что и требовалось доказать.

Следующая задача Шарыгина предлагалась на одной из Всесоюзных олимпиад по математике.

Задача 6. *В пространстве даны сфера и две точки A и B такие, что прямая AB не пересекает сферу. Рассматриваются всевозможные тетраэдры $ABMN$, для которых данная сфера является вписанной. Докажите, что сумма углов пространственного четырехугольника $AMBN$ (т.е. сумма углов AMB, MBN, BNA и NAM) не зависит от выбора точек M и N.*

Эта замечательная задача также являет собой пример «антикиллера». Она очень трудно считается, а геометрически решается наглядно и естественно, фактически – в один прием.

Обозначим через Q, S, P и R точки касания вписанной сферы с гранями AMB, ANB, BMN и AMN соответственно. Поскольку $BQ = BS$, как расстояния от точки B то точек касания прямых BQ и BS со сферой, и, аналогично, $AQ = AS$, то треугольники AQB и AQS равны по трем сторонам. Далее остается лишь аккуратный подсчет углов. Во-первых, $\angle ABQ = \angle ABS$ и $\angle BAQ = \angle BAS$. Так же доказываем, что $\angle MBP = \angle MBQ$ и $\angle NBP = \angle NBS$. Сложив два последних равенства, получаем

$$\angle ABM + \angle ABN - \angle MBN = \angle ABQ + \angle ABS = 2\angle ABQ.$$

Аналогично,

$$\angle BAM + \angle BAN - \angle MAN = 2\angle BAQ.$$

Таким образом,

$$\angle ABM + \angle BAM + \angle ABN + \angle BAN - \angle MBN - \angle MAN = 2\angle ABQ + 2\angle BAQ.$$

Заметим, что сумма первых двух слагаемых равна $180° - \angle AMB$ сумма третьего и четвертого равна $180° - \angle ANB$, а правая часть равна $360° - 2\angle AQB$. Следовательно, сумма $\angle AMB + \angle MBN + \angle BNA + \angle NAM$ равна $2\angle AQB$, а значит, не зависит от выбора точек M и N.

Задача эта была предложена на олимпиаде последним номером, т.е. как сложная задача. Она и в самом деле сложная, если не знать решения заранее. А ведь в ее решении используются только признаки равенства треугольников и теорема о равенстве касательных, проведенных из одной точки к сфере!

Теперь приведем еще несколько задач Шарыгина без разбора их решений.

Задача 7 (задача Лебега для треугольника). *Найдите минимально возможную площадь треугольника, которым можно покрыть любой треугольник со сторонами, не превосходящими единицы.*

История этой задачи также занимательна.

Автор ее – великий французский математик Анри Леон Лебег. Свою первую работу он написал в 1899 году, а уже к 1902 году стал классиком математики. Лебег внес неоценимый вклад не только в ключевые направления математики XX века, но и в историю российской математики. Так сложилось, что Московская математическая школа начала развиваться в основном вдохновленная идеями Лебега, а затем разрослась в крупнейшую математическую школу не только в России, но и в мире. В классической формулировке задачи Лебега требовалось найти фигуру минимальной площади, покрывающей любую фигуру диаметра 1.

И.Ф.Шарыгин переносит эту задачу на треугольник и находит совершенно элементарное решение[2]. Мы не будем

[2] *Оно опубликовано в книге: И.Ф.Шарыгин. Геометрия 9–11. – М.: Дрофа, 1996 (задача №677).*

приводить это решение, сообщим лишь ответ, который, на наш взгляд, совершенно удивительный. Оптимальным является треугольник ABC, у которого $AB = 1$, $\angle A = 60°$, а высота, опущенная на сторону AB, равна $\cos 10°$. Что здесь необычного, спросите вы? Дело в том, что мы никогда не встречали ни одной экстремальной задачи (а математическая специальность авторов этой статьи – теория экстремума), у которой в ответе фигурировал бы угол 10°. Бывают «табличные» углы (120°, 90°, 60° и т.д.), на худой конец 72°, 36°… Но чтобы угол в 10° возник в совершенно естественной задаче на минимум – это удивительно!

Игорю Федоровичу везло на подобные вещи – либо необычные, нестандартные задачи, либо совершенно удивительные ответы в естественных, казалось бы, задачах. Приведем здесь еще один подобный пример.

Каждый из вас на уроках геометрии имел дело с развертками многогранников. Развертка, наряду с сечением, помогает свести стереометрическую задачу к одной или нескольким планиметрическим. А задавали ли вы себе вопрос: почему развертка вообще существует? Всегда ли многогранник можно развернуть на плоскость? Вдруг какие-то грани на развертке пересекутся? Тогда фигуру, получающуюся в развертке, нельзя будет вырезать из одного плоского листа бумаги. Существование подобных аномальных разверток долгое время было проблемой, занимавшей умы геометров. В результате были построены примеры многогранников, чьи развертки нельзя уложить на плоскость без самопересечений. Примеры были, конечно же, сложные. Но в 1997 году московский математик Алексей Тарасов (в то время он был студентом мехмата МГУ) придумал совершенно элементарный пример: он обнаружил, что существуют правильные треугольные усеченные пирамиды, развертки которых имеют самопересечения. Узнав о примере Тарасова, Игорь Федорович тут же формулирует его в виде задачи и включает в вариант III Соросовской олимпиады.

Все-таки, удивительная вещь – геометрия! В какой еще науке новейшие достижения (а пример Тарасова несомненно является таковым) могут быть на следующий день принесены в класс для разбора со школьниками или предложены в качестве задачи на олимпиаде?

Вот эта задача.

Задача 8. *Пусть $ABCD$ – правильная треугольная пирамида с основанием ABC и плоскими углами при вершине D, равными α. Плоскость, параллельная ABC, пересекает AD, BD и CD в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Поверхность многогранника $ABCA_1B_1C_1$ разрезана по пяти ребрам: A_1B_1, B_1C_1, C_1C, CA и AB. При каких значениях α получившаяся развертка будет обязательно накрывать сама себя?*

Интересно, что задачу эту Игорь Федорович поставил под номером 2 (из пяти, предлагавшихся в первый день олимпиады), т.е. как легкую! Но, главным образом, интересен и необычен ответ. Он такой: при $\alpha \ge 100°$. Когда первый автор этой статьи проводил разбор задач после олимпиады, сразу несколько человек в зале воскликнули: «А разве может быть в геометрической задаче такой ответ? Сто градусов – это ведь относится скорее к физике!» (имелась в виду, видимо, температура кипения воды в нормальных условиях). И ведь они правы. Каждый, кто серьезно занимался геометрией, знает, что в нормальной геометрической задаче такого ответа быть не может! И тем не менее…

Еще одна задача.

Задача 9. *Обязательно ли равнобедренным является треугольник, если треугольник с вершинами в основаниях его биссектрис – равнобедренный?*

Решение этой задачи (см. задачу №500 в упомянутой ранее книге) не столь простое, как может показаться на первый взгляд. Это один из немногих случаев, когда И.Ф.Шарыгин не нашел геометрического решения задачи и прибег к вычислениям. Скорее всего, чисто геометрического решения здесь не существует, что ясно уже из ответа. А ответ весьма неожиданный: треугольник не обязательно равнобедренный, но только в том случае, когда один из его углов лежит в интервале $\left(\arccos\frac{\sqrt{17}-5}{4}; \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$, т.е. примерно от 102° до 104°. Если же треугольник не имеет тупых углов или имеет, но тупой угол не лежит в этом узком интервале, то треугольник обязательно равнобедренный.

Перед формулировкой следующей задачи Шарыгина напомним, что такое прямая Симсона. Пусть дан треугольник ABC и точка M в плоскости этого треугольника. Три проекции точки M на стороны треугольника ABC лежат на одной прямой тогда и только тогда когда M лежит на описанной окружности треугольника ABC. Эта прямая называется прямой Симсона точки M относительно треугольника ABC.

Задача 10 (прямая Симсона n-угольника). *Дан четырехугольник $ABCD$, вписанный в окружность, и произвольная точка M этой окружности. Точка M проецируется на прямые Симсона этой точки относительно четырех треугольников ABC, ABD, ACD, DCD. Тогда 4 получившиеся проекции лежат на одной прямой (прямой Симсона точки M относительно четырехугольника $ABCD$).*

Далее по индукции определяется прямая Симсона n-угольника:

Пусть дан n-угольник, вписанный в окружность, и произвольная точка M этой окружности. Точка M проецируется на прямые Симсона этой точки относительно всех n $(n-1)$-угольников с вершинами в вершинах данного n-угольника. Тогда n получившихся проекций лежат на одной прямой (прямой Симсона точки M относительно n-угольника).

Это – задача №613 из упомянутой книги.

В заключение – еще две задачи.

Задача 11 (задача №676). *В данном треугольнике провели медиану к наибольшей стороне, в каждом из получившихся двух треугольников проделали то же самое, получили 4 треугольника и так далее. Докажите, что все получающиеся таким образом треугольники можно разбить на конечное число классов подобных между собой треугольников.*

Задача 12. *Вокруг окружности радиуса 1 описан многоугольник площади S_1. Точки касания его сторон с окружностью соединили, получив многоугольник площади S_2. Каково наименьшее возможное значение суммы $S_1 + S_2$?*

Ответ в задаче: 6. Достигается на квадрате и только на нем. Ни авторского, ни какого-либо другого решения этой задачи мы, увы, не знаем. Сама задача была сообщена Игорем Федоровичем в частной беседе с первым автором этой статьи, было это около 20 лет назад. Шарыгин был немного разочарован «неинтересным» ответом к задаче. Говорил, что во время расчетов возлагал надежды на один пятиугольник, в котором число 6 почти достигалось, однако потом выяснилось, что он все равно хуже квадрата. Насколько нам известно, результата этого он не публиковал, возможно, из-за громоздкости решения или потому, что, как всегда, надеялся найти красивое геометрическое решение.

Может быть, это удастся вам, дорогой читатель? Тогда присылайте свои решения нам – авторам статьи – на адрес редакции журнала «Квант». Ждем ваших решений и хотим вас призвать, как всегда призывал Игорь Федорович своих читателей и слушателей: «Занимайтесь геометрией! Польза геометрии не в достижении результата, а в самих занятиях! Потому что геометрия – это витамин для мозга!»