медиана к гипотенузе и в образовавшиеся треугольники вписаны окружности. Найдите расстояние между точками касания этих окружностей с гипотенузой.

4. В треугольнике со сторонами 3 и 5 и углом 120° между ними проведена биссектриса к третьей стороне и в образовавшиеся треугольники вписаны окружности. Найдите расстояние между точками касания этих окружностей с биссектрисой.

5. В прямоугольном треугольнике с катетом 1 и противолежащим углом 30° проведена высота к гипотенузе и в образовавшиеся треугольники вписаны окружности. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.

6. В прямоугольном треугольнике проведена высота к гипотенузе и в образовавшиеся треугольники вписаны окружности, расстояние между центрами которых равно d. Найдите радиус окружности, вписанной в данный треугольник.

7. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CD к гипотенузе AB. Докажите, что $r_1 + r_2 + r = CD$, где r_1, r_2 и r – радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD, BCD и ABC соответственно.

8. В треугольнике ABC проведена высота CD, лежащая внутри треугольника; r_1, r_2 и r – радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD, BCD и ABC соответственно. Докажите, что $r^2 < r_1^2 + r_2^2$ тогда и только тогда, когда угол ACB – тупой.

9. Докажите, что суммы длин скрещивающихся ребер тетраэдра равны тогда и только тогда, когда существует сфера, касающаяся всех его ребер. (Такой тетраэдр называют *каркасным*.)

10. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка D. Для треугольников ADC и BDC рассматриваются вневписанные окружности, касающиеся сторон AC и BC соответственно. Пусть P и Q – точки касания этих окружностей с прямой DC.

а) Найдите PQ, если $BC = a$, $AC = b$, $AD = x$, $BD = y$.

б) Рассмотрите частные случаи (аналогичные разобранным в свойстве 3).

11 (Л.Емельянов). На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D так, что равны радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABD и ACD. Докажите, что равны радиусы вневписанных окружностей этих треугольников, касающихся сторон AD и CD соответственно.

Список литературы и веб-ресурсов

1. *Н.Х.Агаханов и др.* Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993–2009: Заключительные этапы. – М.: МЦНМО, 2010.
2. *А.В.Акопян.* Геометрия в картинках. – Москва, 2011.
3. *Р.К.Гордин.* Геометрия. Планиметрия. Задачник для 7 – 9 классов. – М.: МЦНМО, 2004.
4. *И.А.Кушнир.* Геометрия на баррикадах – 2. – Киев: Знания Украины, 2011.
5. Материалы для проведения заключительного этапа XXXVII Всероссийской олимпиады школьников, 2010/11 учебный год. – Москва, 2011.
6. *В.В.Прасолов.* Задачи по планиметрии: в 2 ч. – М.: Наука, 1995.
7. *И.Ф. Шарыгин, Р.К. Гордин.* Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами. – М.: Астрель, 2001.
8. olympiads.mccme.ru/ustn – устные геометрические олимпиады.
9. www.problems.ru – база задач по математике.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Воробьями по пушкам!

А.ПОЛЯНСКИЙ

В ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ, ПОЛЬЗУЯСЬ ДВУМЯ ПРОСТЫМИ И элегантными фактами, решим две достаточно сложные задачи. Возникает ситуация, обратная пословице «из пушек по воробьям», поэтому мы и назвали статью «Воробьями по пушкам!» Все дальнейшие рассуждения напрямую будут связаны с расположением точек на картинке, поэтому автор надеется, что добросовестный читатель проверит все «в общем случае».

Вначале введем несколько обозначений. Пусть задан неравнобедренный треугольник ABC ($AB < BC$), на его сторонах AB и BC выбраны точки C_0 и A_0 соответственно, точка B_1 – середина дуги ABC описанной окружности ω треугольника ABC, точка I – центр окружности, вписанной в треугольник ABC, точка M – середина стороны AC. Равенство $B_1A = B_1C$ считаем очевидным.

А вот и наши факты-«воробьи».

Факт 1. *Равенство* $AC_0 = CA_0$ *выполняется тогда и только тогда, когда точки* A_0, C_0, B_1, B *лежат на одной окружности.*

Доказательство. Пусть $AC_0 = CA_0$ (рис. 1). Тогда треугольники AC_0B_1 и CA_0B_1 равны, поскольку $AC_0 = CA_0$, $AB_1 = CB_1$, $\angle BAB_1 = \angle BCB_1$ (как два угла, опирающихся на одну и ту же дугу BB_1). Из равенства треугольников получаем

$$\angle C_0B_1A_0 = \angle C_0B_1A + \angle AB_1A_0 = \\ = \angle AB_1A_0 + \angle A_0B_1C = \angle AB_1C = \angle ABC .$$

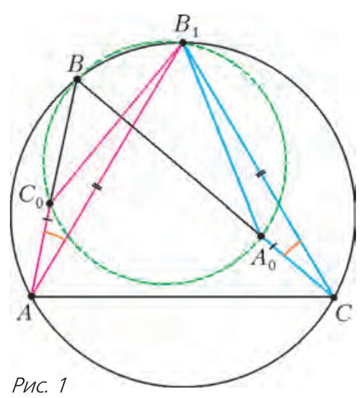

Рис. 1

А последнее означает, что точки A_0, C_0, B_1, B лежат на одной окружности ω_0. В обратную сторону утверждение теперь становится очевидным.

Факт 2. *Окружность, описанная около треугольника* A_0BC_0, *проходит через* I *тогда и только тогда, когда* $AC_0 + CA_0 = AC$.

Доказательство. Пусть точки A_0, B, C_0, I лежат на одной окружности (рис.2). Обозначим через C_0', A_0', B_0' точки касания вписанной окружности со сторонами AB, BC, CA соответственно. Если точки A_0 и C_0 совпадают с точками касания вписанной окружности A_0' и C_0' (в таком случае четырехугольник $BC_0'IA_0'$ – вписанный), то $AC_0' + CA_0' = AB_0' + CB_0' = AC$. Если же не совпадают, и точка A_0 лежит между A_0' и C (случай, когда A_0 лежит между B и A_0', рассматривается аналогично), то прямоугольные треугольники $IC_0'C_0$ и $IA_0'A_0$ равны по катету и углу: $IC_0' = IA_0'$ и $\angle IA_0B = 180° - \angle IC_0B = \angle IC_0A$ (первое равенство углов следует из того, что четырехугольник BC_0IA_0

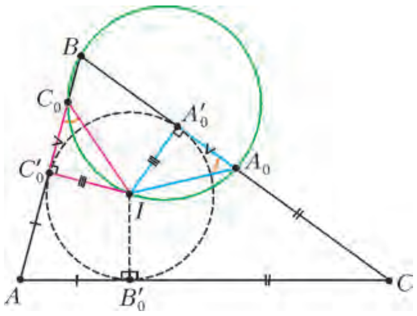

Рис. 2

вписанный). Тогда $C_0C_0' = A_0A_0'$ и $AC_0 + CA_0 = AC_0' + C_0'C_0 + CA_0' - A_0'A_0 = AC_0' + CA_0' = AC$. В обратную сторону утверждение доказывается аналогично.

Замечание (к фактам 1 и 2). Если точки C_0 и A_0 «выбегут» за стороны AB и CB, то факты 1 и 2 останутся справедливыми. Надо только оговорить, что если C_0 не будет находиться на луче AB и (или) A_0 не будет находиться на луче CB, то длины отрезков AC_0 и (или) CA_0 будем считать отрицательными.

Теперь мы готовы начать «стрельбу по пушкам» – т.е. применять наши факты-«воробьи» к двум задачам, которые были далеко не самыми легкими на Всероссийской олимпиаде по математике.

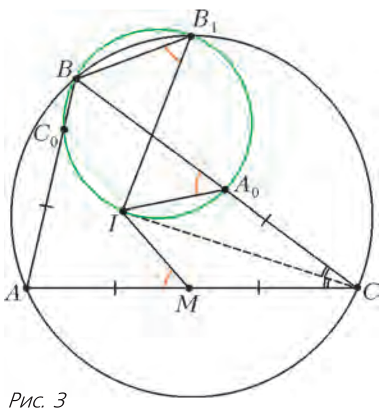

Рис. 3

Задача 1 (XXXI Всероссийская олимпиада, окружной этап, 9 и 10 классы, автор – А.Бадзян). *Докажите, что* $\angle IB_1B = \angle IMA$.

Решение. Построим окружность, описанную около треугольника BB_1I (рис. 3). Она пересекает стороны AB и BC в точках C_0 и A_0 соответственно. Из факта 1 следует, что $AC_0 = CA_0$, а из факта 2 – что $2AC_0 = AC_0 + CA_0 = AC$, откуда $AC_0 = CA_0 = CM = AM$. Значит, точки A_0 и M симметричны относительно биссектрисы CI. Следовательно, $\angle IMA = \angle IA_0B = \angle IB_1B$ (последние два угла равны как опирающиеся на одну дугу BC_0I). Утверждение доказано.

Задача 2 (XXXVII Всероссийская олимпиада, заключительный этап, 11 класс, автор – М.Кунгожин). *Докажите, что центры I_A и I_C окружностей, вписанных в треугольники AMB и CMB, и точки B и B_1 лежат на одной окружности.*

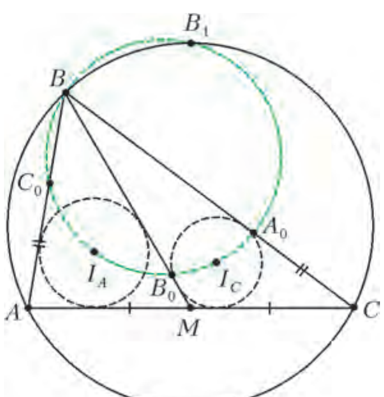

Рис. 4

Решение. Построим окружность, описанную около треугольника BI_AI_C (рис. 4). Пусть она пересекает отрезки BA, BM, BC в точках C_0, B_0, A_0 соответственно. Из факта 2, примененного к треугольникам AMB и CMB, получаем, что

$$AC_0 + MB_0 = AM = \frac{AC}{2} = MC = MB_0 + CA_0.$$

Значит, $AC_0 = CA_0$. Из факта 1 следует, что данная окружность проходит также и через точку B_1. Утверждение доказано.

Замечание. Интересно, что если M' – произвольная точка на плоскости, не лежащая на прямых AB и BC, то центры окружностей, вписанных в треугольники ABM' и BCM', и точки B, B_1 лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда $AM' = M'C$.

Также обратим внимание на то, что оба используемых факта-«воробья» являются частными случаями следующего общего утверждения (предлагаем читателю доказать его самостоятельно).

Факт 3. *Пусть точки X и Y движутся с постоянными скоростями (не обязательно равными) по двум фиксированным прямым, пересекающимся в точке O. Тогда окружность, описанная около треугольника XYO, проходит через две фиксированные точки O и Z, где Z является центром поворотной гомотетии, переводящей местоположения точек X в местоположения точек Y.*

Факт 1 тогда представляет собой случай, когда точки $X = A$ и $Y = C$ движутся с одинаковыми скоростями в направлении точки $O = B$ так, что $X' = C_0$ и $Y' = A_0$ – их новые местоположения, а $Z = B_1$ – центр поворотной гомотетии (с коэффициентом 1).

Аналогично можно сказать и про факт 2: точки $X = C_0'$ и $Y = A_0'$ движутся с одинаковыми скоростями в «противоположных» относительно точки $O = B$ направлениях так, что $X = C_0'$ и $Y = A_0'$ – их новые местоположения, а $Z = I$ – центр поворотной гомотетии (с коэффициентом 1).

Возможно, читателю удастся найти и другие применения приведенных в статье фактов – ведь это не единственные задачи математических олимпиад, где можно было бы использовать полученные знания. В качестве упражнений приведем несколько интересных задач, при решении которых можно использовать результаты данной статьи.

Упражнения

1 (обобщение задачи 1). Пусть на дуге BC (не содержащей точку A) описанной окружности ω треугольника ABC выбрана точка E, а на стороне AC – точка F. Докажите, что луч EF – биссектриса угла AEC тогда и только тогда, когда $\angle IEB = \angle IFA$, где I – центр вписанной окружности треугольника ABC.

2 (XXXI Всероссийская олимпиада, заключительный этап, 11 класс, автор – Л.Емельянов). Пусть A_0, B_0 и C_0 – точки касания вневписанных окружностей с соответствующими сторонами треугольника ABC. Описанные окружности треугольников A_0B_0C, AB_0C_0 и A_0BC_0 пересекают второй раз описанную окружность ω треугольника ABC в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику, образованному точками касания вписанной окружности треугольника ABC с его сторонами.

3 (XXI Турнир городов, осенний тур, сложный вариант, 10–11 классы, автор – Л.Емельянов). Пусть на сторонах BA и BC треугольника ABC выбраны точки C_0 и A_0 соответственно, а точки M и M_0 – середины отрезков AC и A_0C_0. Докажите, что если $AC_0 = CA_0$, то прямая MM_0 параллельна биссектрисе угла ABC.

4 (автор – И.Шарыгин). Пусть на стороне AC выбрана точка D. Обозначим через I_A и I_C центры окружностей, вписанных в треугольники ABD и CBD соответственно, а через B_0' – точку касания вписанной окружности треугольника ABC со стороной AC. Докажите, что угол $I_AB_0'I_C$ прямой.

5 (XXVI Международная математическая олимпиада, автор – И.Шарыгин). Дан треугольник ABC и окружность с центром O, проходящая через вершины A и C и повторно пересекающая отрезки AB и BC в различных точках K и N соответственно. Окружности, описанные около треугольников ABC и KBN, имеют ровно две общие точки B и M. Докажите, что угол OMB прямой.