ловины), то X либо не изменится (если новая розочка того же цвета, что и старая), либо изменится на 2 (новая и старая розочки разных цветов). Но после поворота на 180° величина X поменяет знак, а значит, в какой-то момент она будет равна 0. В этот момент и нужно сделать разрез вдоль диаметра.

10. Допустим, что ни одна из диагоналей четырехугольника $ABCD$ не проходит через середину другой диагонали. Пусть E – середина AC, F – середина BD. Тогда прямая EF не совпадает ни с одной из диагоналей, а значит, пересекает какую-то пару противоположных сторон четырехугольника. Будем считать, что она пересекает AB и CD в точках K и L соответственно (рис.2). Пусть $S_{ABCD} = S$. По условию $S_{AKLD} = \frac{1}{2}S$. Так как E – середина AC, то и $S_{ABED} = \frac{1}{2}S$. А поскольку каждый из треугольников BKE и DLE дополняет четырехугольник $AKED$ до фигур равной площади, то площади этих треугольников равны: $S_{BKE} = S_{DLE}$. Теперь заметим, что поскольку F середина BD, то длины перпендикуляров, опущенных из точек B и D на прямую EF, равны. Но эти перпендикуляры являются высотами треугольников BKE и DLE соответственно. Поэтому основания тоже должны быть равны, т.е. $KE = EL$. Значит, $AKCL$ – параллелограмм и $AB \parallel CD$, следовательно, $ABCD$ – трапеция или параллелограмм. В первом случае EF – средняя линия трапеции и, значит, параллельна ее основаниям, а во втором случае точки E и F совпадают: и то, и другое противоречит предложению.

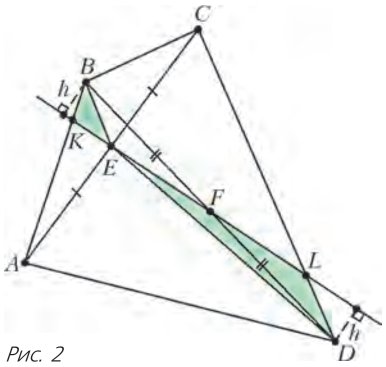

Рис. 2

ВОРОБЬЯМИ ПО ПУШКАМ!

1. Пусть EF – биссектриса угла AEC (рис.3). Проведем окружность через I, B и E. Она пересекает лучи AB и CB в точках C_0 и A_0 соответственно.

Из факта 2 следует, что $AC_0 + CA_0 = AC$, а по условию $AF + CF = AC$. Из факта 3 следует, что ΔAC_0E подобен ΔCA_0E, т.е. $AC_0 : CA_0 = AE : CE$, а из того, что луч EF – биссектриса угла AEC, следует $AF : CF = AE : CE$. Из этого набора соображений несложно сделать вывод, что $AF = AC_0$ и $CF = CA_0$, тогда точки A_0 и F симметричны относительно биссектрисы CI. Следовательно, $\angle IFA = \angle IA_0B = \angle IEB$ (последнее равенство приведено для углов, опирающихся на одну дугу BC_0I). В одну сторону утверждение доказано. В обратную сторону доказательство аналогично, и найти его предоставляется читателю.

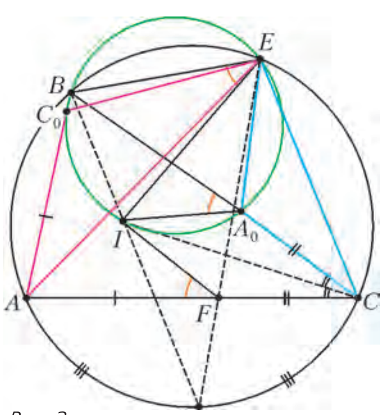

Рис. 3

2. Как известно, для точек касания вписанной окружности верно, что $AC_0 = CA_0$ (рис.4). Из факта 1 получаем, что описанная окружность около треугольника A_0BC_0 проходит через точку B_1 – середину дуги ABC окружности ω. Аналогично получаем, что точка A_1 – середина дуги CAB и точка C_1 – середина дуги BCA. Точки A_1, B, C_1 делят окружность ω на три дуги. Нетрудно проверить, что $\overset{\smile}{BC_1} = 180° - \angle A$, $\overset{\smile}{A_1B} = 180° - \angle C$. Значит, $\overset{\smile}{A_1C_1} = 180° - \angle B$. Тогда $\angle A_1B_1C_1 = 90° - \angle B/2$. Аналогично получаем и для других углов треугольника $A_1B_1C_1$, что их величины равны $\angle B_1C_1A_1 = 90° - \angle C/2$ и $\angle C_1A_1B_1 = 90° - \angle A/2$. А именно таковы углы у треугольника, образованного точками касания вписанной окружности со сторонами треугольника ABC. Утверждение доказано.

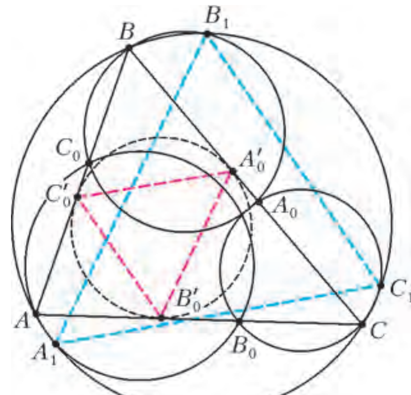

Рис. 4

3. При решении этой задачи нам понадобится то, что биссектриса угла B пересекает описанную окружность ω в середине S дуги AC, не содержащей B, т.е. $AS = SC$. Значит, AB_1CS – дельтоид, у которого диагонали пересекаются под прямым углом в точке M – середине AC (рис.5). Аналогичное можно сказать про окружность ω_0, середину S_0 дуги A_0C_0 и середину M_0 отрезка A_0C_0. Отметим также, что из доказательства факта 1 ясно, что $\Delta A_0B_1C_0$ является равнобедренным с углом ABC при вершине, т.е. подобен ΔAB_1C.

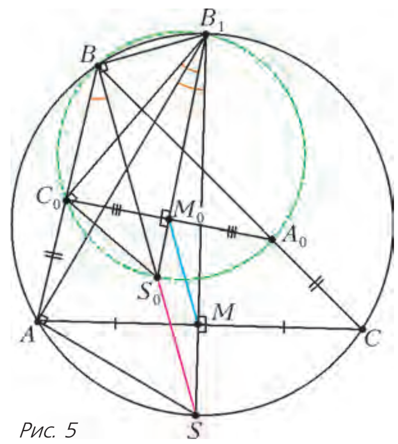

Рис. 5

Теперь мы готовы к решению. $\Delta S_0C_0B_1$ подобен ΔSAB_1, так как $\angle S_0C_0B_1 = \angle S_0BB_1 = \angle SBB_1 = \angle SAB_1$ (дважды пользовались тем, что углы, опирающиеся на одну дугу, равны) и $\angle S_0B_1C_0 = \angle S_0BC_0 = \angle SBA = \angle SB_1A$. Из вышесказанного следует, что C_0M_0 и AM являются высотами в $\Delta S_0C_0B_1$ и ΔSAB_1. Значит, точки M_0 и M делят стороны B_1S_0 и B_1S в равных отношениях, т.е. прямые MM_0 и SS_0 параллельны. Утверждение доказано.

4. Построим окружность, описанную около треугольника I_ADI_C (рис.6). Пусть она пересекается с отрезком BD и стороной AC в точках B_0 и B_0''. Нам достаточно показать, что B_0' и B_0'' совпадают, так как $\angle I_ADI_C$ – прямой. Применяя для треугольников ABD и CBD факт 2, получаем, что $AB_0'' + BB_0 = AB$ и $B_0''C + BB_0 = BC$. Следовательно, справедливо равенство $AB_0'' - B_0''C = AB - BC$. Легко также получить, что $AB_0' - B_0'C = AC_0' + C_0'B - BA_0' - A_0'C = AB - BC$, где C_0' и A_0' – точки касания вписанной окружности со сторонами AB и BC. Следовательно, точки

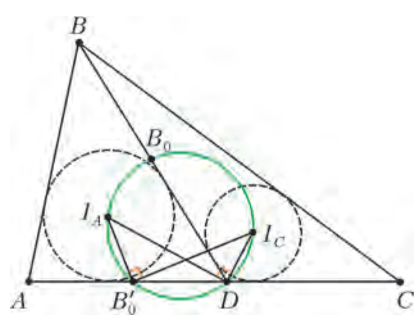

Рис. 6