Десять бабочек

А. Спивак

Всякая вещь есть форма проявления беспредельного разнообразия.

Козьма Прутков

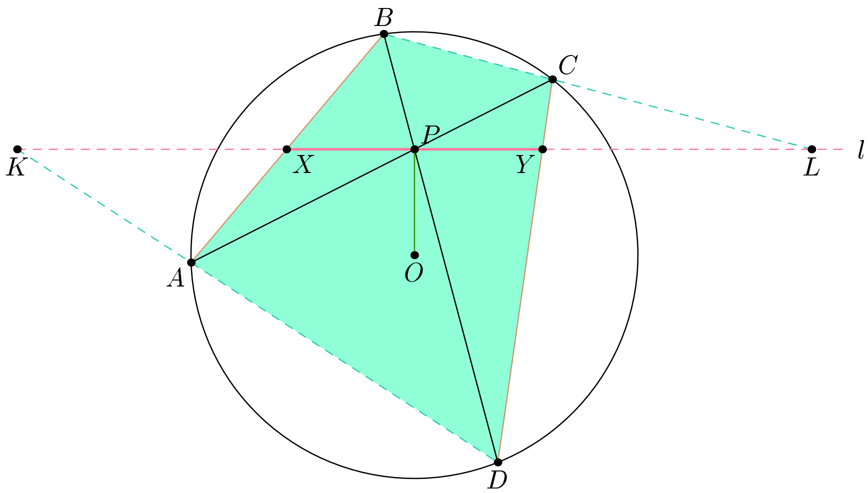

Рисунок 1

Рассмотрим вписанный в окружность четырёхугольник $ABCD$ (рис. 1). Пусть точка P пересечения его диагоналей не совпадает с центром O окружности, то есть $ABCD$ — не прямоугольник. Восставим в точке P перпендикуляр l к прямой OP и рассмотрим отрезок XY, высекаемый на прямой l четырёхугольником $ABCD$. Оказывается, точка P — непременно середина этого отрезка! Более того, если прямые BC и AD не параллельны прямой l и пересекают её в точках N и L, то $KP = PL$.

Это и есть знаменитая теорема о бабочке[*]. Я изложу 10 доказательств этой замечательной теоремы. Конечно, математическое утверждение не становится более верным от того, что мы знаем несколько доказательств. Прагматически настроенный читатель скажет даже, что лучше бы изучить не 10 доказательств одной теоремы, а 10 разных теорем. Тем не менее, нужно иногда останавливаться и вдумываться.

Некоторые из доказательств не выходят за пределы школьной программы, а в других использованы радикальный центр трёх окружностей, двойные отношения, стереографическая проекция, проективные преобразования, ориентированные углы и даже пучки кривых второго порядка.

I. Три окружности

Докажем сначала равенство $PX = PY$. Для этого выполним дополнительное построение[†]: отразим данную окружность относительно точки P (рис. 2).

[*] «Бабочка» — это самопересекающаяся ломаная $ABDC$.

[†] Этот замечательное доказательство придумал студент мехмата МГУ А. Акопян.

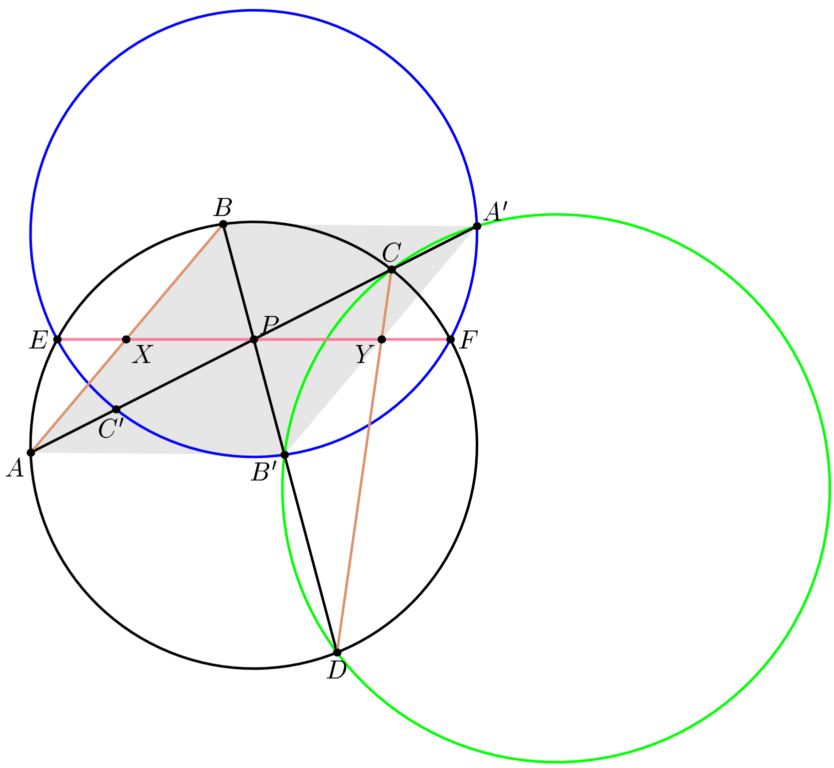

Рисунок 2

Лемма. *Точки A', C, B' и D лежат на одной окружности.*

Доказательство леммы. *Первый способ.* В силу теоремы о вписанном угле, $\angle BAC = \angle BDC$. При центральной симметрии угол BAC переходит в угол $B'A'C'$. Следовательно,

$$\angle B'DC = \angle BDC = \angle BAC = \angle B'A'C' = \angle B'A'C,$$

откуда $\angle B'DC = \angle B'A'C$, что[*)] и доказывает лемму.

Второй способ. Как известно, для двух пересекающихся в точке P хорд AC и BD верно равенство $AP \cdot PC = BP \cdot PD$. Таким образом,

$$PC \cdot PA' = PC \cdot PA = PB \cdot PD = PB' \cdot PD.$$

Значит, $PC \cdot PA' = PB' \cdot PD$. Мы второй раз доказали лемму.

А теперь — самое главное. CD — общая хорда чёрной и зелёной окружностей, EF — чёрной и синей, $A'B'$ — синей и зелёной. В силу теоремы о радикальном центре трёх окружностей[†)], эти три отрезка пересекаются в одной точке. Попросту говоря, точка Y лежит на отрезке $A'B'$.

Таким образом, концы отрезка XY лежат на противоположных сторонах параллелограмма $ABA'B'$. Поскольку точка P — центр симметрии этого параллелограмма, то она делит отрезок пополам: $XP = PY$, что и требовалось доказать.

Упражнение 1. *При помощи аналогичного построения докажите равенство $KP = PL$.*

[*)] В силу теоремы, обратной теореме о вписанном угле.

[†)] Эта теорема сформулирована и доказана в статье «Радикальный центр», опубликованной в этом же номере.

Заменив всюду в рассуждении статьи букву B на букву D, а D — на B, мы можем доказать равенство $KP = PL$. А именно, вместо точек A', C, B' и D мы рассмотриваем точки A', C, D' и B (рис. 1). Они лежат на одной окружности (докажите!), и прямые $A'D'$, BC и EF являются радикальными осями пар этих окружностей, а точка L — их радикальным центром.

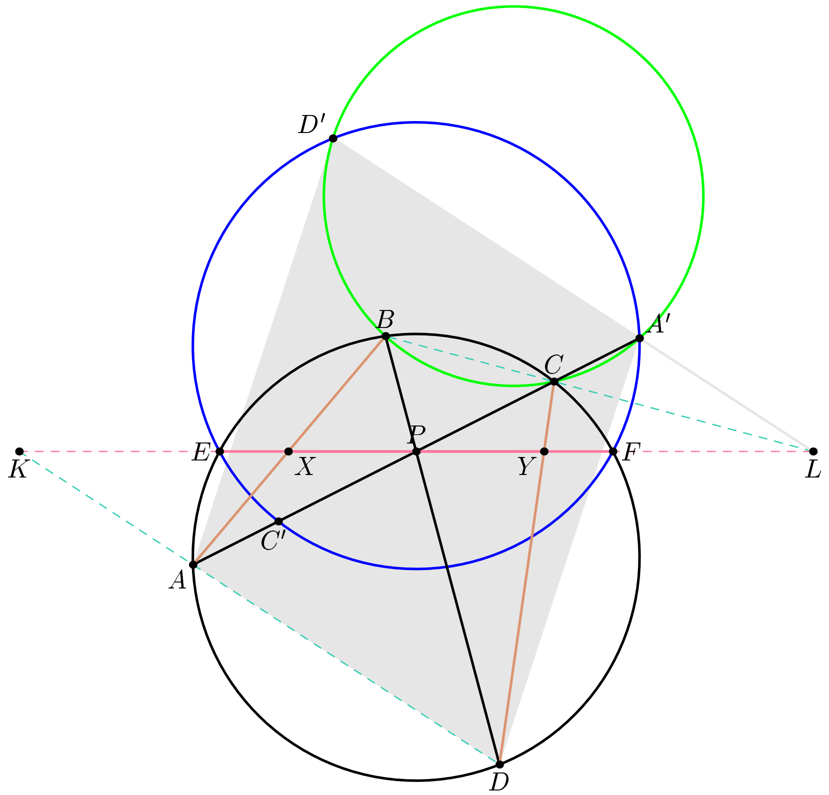

Рисунок 1 ответов

II. Середины хорд

Опустим из центра O окружности перпендикуляры на хорды AB и CD соответственно (рис. 3). Как известно, основания S и T этих перпендикуляров — середины соответствующих хорд. Далее, треугольники ABP и DCP подобны (а именно, в силу теоремы о вписанном угле $\angle ABP = \angle ABD = \angle ACD = \angle PCD$ и аналогично $\angle BAP = \angle CDP$). Проведём в этих подобных треугольниках медианы PS и PT соответственно. Возникают подобные*) треугольники SBP и TCP. Следовательно, $\angle BSP = \angle CTP$.

*) В этом суть доказательства!

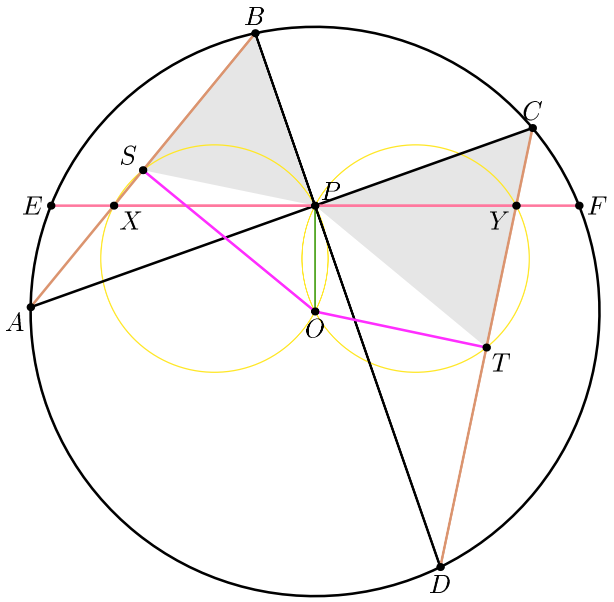

Рисунок 3

Поскольку углы XSO и XPO прямые, четырёхугольник $XSOP$ вписанный. Аналогично окружность можно описать и вокруг четырёхугольника $YTOP$. В силу теоремы о вписанном угле,

$$\angle XOP = \angle XSP = \angle YTP = \angle YOP.$$

Таким образом, отрезок OP является не только высотой, но и биссектрисой треугольника XOY. Значит, $XP = PY$, что и требовалось доказать.

Упражнение 2. *При помощи аналогичного построения докажите равенство $KP = PN$.*

III. Четыре подобия

Опустим перпендикуляры из точек X и Y на прямые AC и BD (рис. 4). Поскольку зелёный треугольник BXX_2 подобен зелёному треугольнику CYY_1, то

$$\frac{XX_2}{YY_1} = \frac{BX}{CY}.$$

Жёлтый и голубой треугольники XPX_1 и XPX_2 соответственно подобны жёлтому и голубому треугольникам YPY_1 и YPY_2, следовательно,

$$\frac{XX_1}{YY_1} = \frac{PX}{PY} = \frac{XX_2}{YY_2}.$$

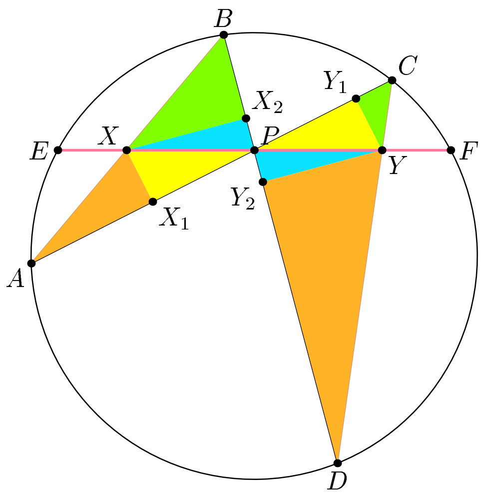

Рисунок 4

Поскольку коричневый треугольник AXX_1 подобен коричневому треугольнику DYY_2, то

$$\frac{XX_1}{YY_2} = \frac{AX}{DY}.$$

Осталось обозначить $EP = PF$ буквой a — и можно собирать урожай:

$$\frac{PX^2}{PY^2} = \frac{XX_1}{YY_1} \cdot \frac{XX_2}{YY_2} = \frac{XX_1}{YY_2} \cdot \frac{XX_2}{YY_1} = \frac{AX}{DY} \cdot \frac{BX}{CY} =$$
$$= \frac{AX \cdot XB}{DY \cdot YC} = \frac{EX \cdot XF}{FY \cdot YE} = \frac{(a - PX)(a + PX)}{(a - PY)(a + PY)} = \frac{a^2 - PX^2}{a^2 - PY^2}.$$

Значит,

$$\frac{PX^2}{PY^2} = \frac{a^2 - PX^2}{a^2 - PY^2},$$

то есть $PX^2(a^2 - PY^2) = PY^2(a^2 - PX^2)$. Раскрыв скобки и приведя подобные, получаем $PX^2 = PY^2$, что и требовалось доказать.

IV. Теорема синусов

Обозначим величины углов ABD, BPE, APE и PAB соответственно буквами α, β, γ и δ, а длину отрезка PX — буквой x (рис. 5). Применим теорему синусов к треугольнику BPX:

$$\frac{BX}{\sin\beta} = \frac{x}{\sin\alpha},$$

то есть $BX = x\sin\beta/\sin\alpha$. Аналогично, применив теорему синусов к треугольнику APX, получаем $AX = x\sin\gamma/\sin\delta$. Следовательно,

$$a^2 - x^2 = (a - x)(a + x) = EX \cdot XF = AX \cdot XB = \frac{x^2 \sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\delta},$$

откуда $x = \frac{a}{\sqrt{1+\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\delta}}}$. Мы получили выражение, не меняющееся при замене β на γ, а γ на β. Следовательно, аналогичные вычисления для длины отрезка PY дадут ту же формулу. Теорема о бабочке доказана уже четвёртый раз!

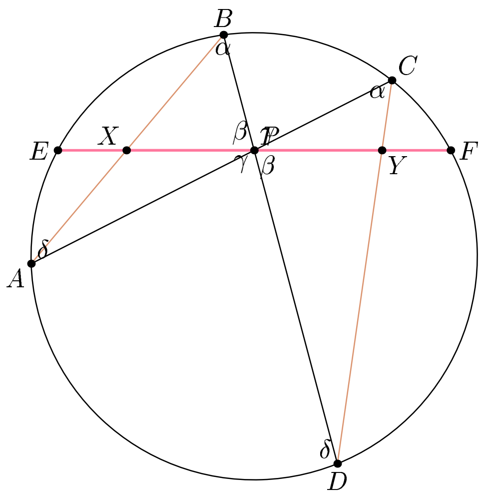

Рисунок 5

V. Перепроецируем $ABCD$ в прямоугольник!

В первом абзаце этой статьи сказано: «Пусть точка P пересечения его диагоналей не совпадает с центром O окружности.» А почему, собственно, не «совпадает»? Для прямоугольника теорема очевидна: при симметрии относительно центра окружности (рис. 6) прямоугольник переходит сам в себя, а поэтому точка X переходит в Y, а K — в N.

А если «не совпадает», применим центральную проекцию. Проще всего дальнейшее объяснить тому, кто знаком с инверсией. На рисунке 7 изображена сфера, точка вне неё и окружность ω на этой сфере. Конус, состоящий из лучей SM, высекает на сфере *окружность* ω'. Да, именно окружность! В самом деле, проведём из точки S касательную SQ к сфере. При инверсии с центром S и радиусом SQ и сфера с центром O, и конус переходят сами в себя, поэтому ω переходит в ω'. А окружность, не проходящая через центр инверсии, как известно всякому, кто изучал инверсию, переходит в окружность!

Центр O окружности ω переходит при проецировании в точку O', вовсе не обязательно являющуюся центром окружности ω'. Для завершения пятого доказательства теоремы о бабочке осталось только подобрать проходящую через окружность ω сферу и точку S (в плоскости, проходящей через точку P перпендикулярно прямой l) так, чтобы точка P спроецировалась в центр окружности ω' (рис. 8).

Для полной строгости надо, конечно, объяснить подробнее, как именно мы «подбираем» точку S. Применим соображения непрерывности. Но точку S мы ищем не на прямой, а на плоскости (той самой, проходящей через P и перпендикулярной прямой l). Для применения теоремы о промежуточном значении это неудобно. Кроме того, надо учесть и интересы тех, кто не знаком с инверсией.

Посмотрите на рисунок 9. Точка S лежит на сфере! Точка N диаметрально противоположна точке S, а плоскость

Центральная проекция в таком случае носит специальное название:

Передвинем точку P!

Точка P пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$ — это точка пересечения прямых AC и BD. Давайте воспользуемся этим, право же, несложным соображением и позволим точке P выйти за пределы круга (рис. 6). Как нетрудно доказать любым из уже рассмотренных нами способов*), опять $XP = PY$ и $KP = PN$. Не правда ли, неожиданно и красиво, хотя на бабочку уже не очень похоже?

Упражнение 3. *Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC (рис. 7), а прямая BP касается этой окружности. Докажите, что прямые AB и BC высекают на восставленном в точке P перпендикуляре к отрезку OP отрезок, для которого P — середина.*

Устремив на рисунке 6 точку B к точке D, в пределе получим касательную к окружности.

Но это не самое интересное. Нельзя ли точки A, B, C и D оставить на месте, а точку P ... сдвинуть? Спрашиваете, как может точка пересечения прямых бегать, если прямые неподвижны? Посмотрите на рисунок 8! На нём точка P хоть и отмечена, но перестала быть точкой пересечения прямых AC и BD. А обобщение теоремы о бабочке можно сформулировать, вообще не упомянув букву P:

Теорема. *Если $EI = JF$, то $EX = YF$.*

Впрочем, если прямая l не пересекает окружность, то точек E и F нет. Поэтому не будем совсем уж отказываться от точки P. Вообще, чтобы не запутаться, пора привести полную формулировку обобщённой теоремы о бабочке. Тем более что в «Кванте» эту формулировку вы уже могли прочитать. В 1971 году.

Задача М84. *Пусть P — основание перпендикуляра, опущенного из центра данной окружности на данную прямую l, на которой взяты ещё две точки I и J так, что $IP = PJ$. Через точки I и J проведены соответственно две произвольные секущие, одна из которых пересекает окружность в точках A и C, а другая — в точках B и D. Пусть прямые AB и CD пересекают прямую l в точках X и Y. Докажите равенство $XP = PY$.*

Докажем. Даже пятью способами!

VI. Отношения площадей

Отношение длин отрезков EX и XF равно отношению высот треугольников ABE и ABF, опущенных на прямую AB из точек E и F соответственно (рис. 9). Поскольку площади треугольников, имеющих общее основание, относятся как их высоты, то

$$\frac{EX}{XF} = \frac{S_{ABE}}{S_{ABF}} = \frac{\frac{1}{2}AE \cdot BE \cdot \sin AEB}{\frac{1}{2}AF \cdot BF \cdot \sin AFB} = \frac{AE \cdot BE}{AF \cdot BF}.$$

(Равенство синусов углов AEB и AFB следует из того, что сумма противоположных углов вписанного четырёхугольника равна 180°.) Таким образом,

$$\frac{EX}{XF} = \frac{AE \cdot BE}{AF \cdot BF}.$$

Аналогично можно получить ещё три равенства $\frac{EY}{YF} = \frac{CE \cdot DE}{CF \cdot DF}$, $\frac{EJ}{JF} = \frac{AE \cdot CE}{AF \cdot CF}$ и $\frac{EI}{IF} = \frac{BE \cdot DE}{BF \cdot DF}$. Следовательно,

$$\frac{EX}{XF} \cdot \frac{EY}{YF} = \frac{AE \cdot BE \cdot CE \cdot DE}{AF \cdot BF \cdot CF \cdot DF} = \frac{EJ}{JF} \cdot \frac{EI}{IF}.$$

*) Сделайте это!

Мы доказали равенство
$$\frac{EX}{XF} \cdot \frac{EY}{YF} = \frac{EI}{IF} \cdot \frac{EJ}{JF}. \qquad (*)$$
Вывести из него утверждение задачи M84 несложно. Из условия $EI = JF$ следует равенство $EJ = IF$. Таким образом, равенство $(*)$ превращается в более обозримое равенство
$$\frac{EX}{XF} = \frac{YF}{EY}.$$
Если $EX > YF$, то $XF = EF - EX < EF - YF = EY$ и тем самым $\frac{EX}{XF} > \frac{YF}{EY}$. Аналогично, если $EX < YF$, то $XF = EF - EX > EF - YF = EY$ и $\frac{EX}{XF} < \frac{YF}{EY}$. Следовательно, на самом деле $EX = YF$.

VII. Двойные отношения

Одним из важнейших разделов геометрии является проективная геометрия. А в проективной геометрии одно из основных понятий — двойное (или сложное) отношение.

Определение. Двойное отношение $(ABCD)$ четырёх точек A, B, C и D одной прямой — это результат деления отношения длин отрезков AC и BC на отношение длин отрезков AD и BD, то есть
$$(ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}.$$

Лемма. *Для любых лежащих на одной прямой точек A, B, C и D и для любой не принадлежащей этой прямой точки E величину $(ABCD)$ можно выразить через величины углов, под которыми из точки E видны отрезки AB, BC и CD.*

Доказательство. Обозначим $\angle AEC = \alpha$, $\angle CED = \beta$, $\angle DEB = \gamma$, $\angle DCE = \varphi$ и $\angle EDC = \psi$ (рис. 10). По теореме синусов,
$$AC = \frac{AE \sin\alpha}{\sin\varphi},$$
$$BC = \frac{BE \sin(\beta+\gamma)}{\sin\varphi},$$
$$AD = \frac{AE \sin(\alpha+\beta)}{\sin\psi},$$
$$BD = \frac{BE \sin\gamma}{\sin\psi}.$$

Следовательно,
$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{\sin\alpha \sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)\sin(\alpha+\beta)},$$
что и требовалось доказать.

Вспомним о бабочке. Вследствие леммы, двойное отношение $(EFXI)$ можно выразить через величины углов EAB, BAC и CAF (рис. 11). Точно такая же формула выражает двойное отношение $(EFJY)$ можно выразить через величины углов EDB, BDC и CDF. В силу теоремы о вписанном угле, величины углов EAB, BAC и CAF соответственно равны величинам углов EDB, BDC и CDF. Следовательно,
$$(EFXI) = (EFJY).$$

Далее,

$$(EFJY) = \frac{EJ}{FJ} : \frac{EY}{FY} = \frac{FY}{EY} : \frac{FJ}{EJ} = (FEYJ).$$

Рассмотрев центральную симметрию относительно середины отрезка EF, получаем равенство

$$(FEYJ) = (EFY'I),$$

где Y' — образ точки Y при этом отображении. Окончательно,

$$(EFXI) = (EFJY) = (FEYJ) = (EFY'I).$$

Из равенства $(EFXI) = (EFY'I)$ следует равенство $X = Y'$ (хотя это и очень просто, подумайте, почему!).

VIII. Осевая симметрия

Выполним осевую симметрию относительно прямой OP (рис. 12). Пусть A', B', D' и X — образы точек A, B, D и X соответственно. Точки B', C, J и X' лежат на одной окружности, поскольку

$$\angle JX'B' = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{EB'} + \overset{\frown}{A'F}) = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{EB'} + \overset{\frown}{AE}) = \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{AB'} = \angle JCB'.$$

Точки B', C, J и Y тоже лежат на одной окружности, поскольку

$$\angle JYC + \angle JB'C = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{DF} + \overset{\frown}{EC}) + \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{CD'} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{ED'} + \overset{\frown}{EC} + \overset{\frown}{CD'}) = 180^\circ.$$

Таким образом, точки X' и Y лежат на описанной окружности треугольника $B'CJ$. (Случай $C = B'$ легко разобрать отдельно. Сделайте это самостоятельно!) Описанная окружность у треугольника только одна, и она пересекает прямую l, кроме точки J, ещё только в одной точке. Это и есть точка $X' = Y$.

В этом решении есть только один существенный недостаток: оно явно опирается на рисунок 12 и не учитывает, что конфигурация может иметь совсем иной вид: точки на окружности могут располагаться в ином порядке, а прямая l может не пересекать окружность и в таком случае точки E и F вообще не существуют. Как это исправить? Можно, конечно, перечислить каким-то образом всевозможные расположения точек, но это весьма утомительно. Проще переделать решение так, чтобы оно подходило сразу для всех случаев, при помощи не совсем обычного, но часто оказывающегося удобным определения угла между прямыми.

Пусть l_1 и l_2 — две прямые на плоскости, пересекающиеся в точке O. Обозначим через $\measuredangle(l_1, l_2)$ угол, на котороый надо повернуть вокруг точки O против часовой стрелки прямую l_1, чтобы получить прямую l_2. Если прямые l_1 и l_2 параллельны, то по определению $\measuredangle(l_1, l_2) = 0$.

Рисунки 13 и 14 помогут вам понять, что для любых двух точек A и B и любого угла α, где $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, множеством точек M, для которых $\measuredangle(AM, MB) = \alpha$, является окружность (строго говоря, за исключением самих точек A и B). А именно, на рисунке 13 синим цветом изображено множество точек M, для которых $\measuredangle(AM, MB) = \alpha$, а на рисунке 14 нарисовано ухо Чебурашки — множество точек M, для которых $\angle(AM, MB) = \alpha$.

Таким образом, четыре точки A, B, M и L лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда $\measuredangle(AM, MB) = \measuredangle(AL, LB)$. Теперь утверждение, что точки B', C, J и Y лежат на одной окружности, вытекает из равенств

$$\measuredangle(JY, YC) = \measuredangle(D'D, DC) = \measuredangle(D'B', B'C) = \measuredangle(JB', B'C);$$

а точки B', C, J и X' лежат на одной окружности, поскольку

$$\measuredangle(JX', X'B') = \measuredangle(AA', A'B') = \measuredangle(AC, CB') = \measuredangle(JC, CB').$$

Эти равенства можно проверять, не обращаясь к чертежу,— нужно только помнить, какие точки лежат на одной прямой, какие на одной окружности, а какие прямые параллельны. (Конечно, нужно ещё разобрать «вырожденные» случаи, когда какие-нибудь две точки, определяющие в этих равенствах прямую, совпадают; все они довольно очевидны и мы не будем этим заниматься.)

X. Проективная инволюция

Восьмое доказательство обходится вообще практически без вычислений, используя только центральные проекции. Сначала переформулируем задачу. Через $pr_A(X)$, где $X \in l$, обозначим отличную от A точку пересечения прямой AX с окружностью (рис. 15). Естественно, для точки T, где AT — касательная, полагаем $pr_A(T) = A$; для бесконечно удалённой точки ∞ прямой l по определению $pr_A(\infty)$ — это отличная от точки A точка U пересечения с окружностью прямой, проведённой через A параллельно прямой l (а если такой точки нет, то есть если проведённая прямая касается окружности, то полагаем $U = A$).

Через $Pr_C(Z)$, где Z принадлежит данной окружности, обозначим точку пересечения прямой CZ с прямой l (рис. 16). При этом, разумеется, для $Z = C$ под прямой понимаем касательную к окружности, а для точки V, где $CV \parallel l$, полагаем $Pr_C(V) = \infty$.

Далее, как обычно, через Z_P обозначим центральную симметрию относительно точки P.

Наконец, буквой f обозначим композицию $Z_P \circ Pr_C \circ pr_A$ (рис. 17). Теорему о бабочке можно теперь сформулировать следующим образом: f — инволюция, то есть для любой точки X прямой l имеем $f(f(X)) = X$. (Связь с прежней формулировкой очевидна: $B = pr_A(X)$, $N = Pr_C(B)$, $K = Z_P(N)$, $pr_A(K) = D$, $Pr_C(D) = Y$.)

Прямую l, дополненную бесконечно удалённой точкой (так называемую проективную прямую), естественно представлять себе как окружность (когда точка «уходит в бесконечность» влево, она проходит через «бесконечно удалённую» точку ∞ и «возвращается из бесконечности» справа). Когда точка X совершает оборот по этой окружности, то есть пробегает её слева направо, точка $K = f(X)$ тоже совершает полный оборот по окружности, но движется в противоположном направлении. Пользуясь непрерывностью отображения f, из этого можно вывести существование на прямой l таких точек X_1 и X_2, что $f(X_1) = X_1$ и $f(X_2) = X_2$.

Поскольку $f(f(\infty)) = \infty$ (рис. 18), $f(f(X_1)) = f(X_1) = X_1$ и аналогично $f(f(X_2)) = X_2$, то отображение $f \circ f$ имеет три неподвижные точки: ∞, X_1 и X_2. Знаток проективной геометрии скажет, что теорема доказана: если проективное отображение прямой обладает тремя неподвижными точками, то оно тождественное, то есть оставляет все точки на месте.

А для тех, кто не занимался проективной геометрией, нужно вести определение и доказать несколько утверждений.

Лемма. *Отображение f дробно-линейное.*

X. Пучок кривых второго порядка