Симедиана

Ю.БЛИНКОВ

В этой статье мы расскажем об одной замечательной линии, связанной с треугольником, – *о симедиане*. Оказывается, симедиана явно или неявно присутствует в огромном числе задач. Она связана с глубокими геометрическими идеями и преобразованиями (инверсия, поляра, двойные отношения). Однако мы постараемся выбирать наиболее доступные, «школьные» подходы. Итак,…

Определение

Рассмотрим треугольник ABC, его медиану AM и биссектрису AL (рис.1). Пусть прямая AS симметрична прямой AM относительно прямой AL (точка S лежит на отрезке BC). Тогда отрезок AS называется ***симедианой*** треугольника ABC. Иногда симедианой называют прямую, содержащую отрезок AS.

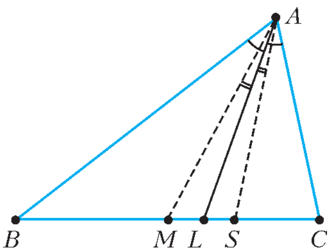

Рис. 1

Антипараллельность

Для дальнейшего знакомства с симедианой нам потребуется одно важное понятие.

Пусть точки B_1 и C_1 лежат на прямых AB и AC. Говорят, что отрезки B_1C_1 *и* BC *антипараллельны (относительно пары прямых* AB *и* AC, *или относительно угла* BAC*)*, если $\angle AC_1B_1 = \angle ABC$. Возможны различные случаи расположения антипараллельных отрезков (рис.2,*а–г*).

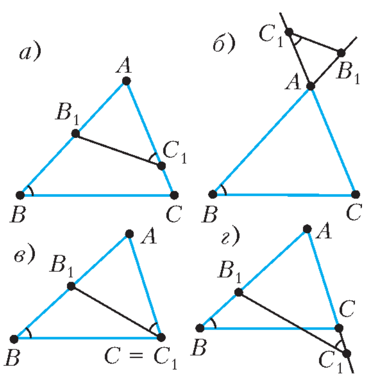

Рис. 2

Упражнения

1. Докажите, что отрезки BC и B_1C_1 антипараллельны тогда и только тогда, когда треугольники ABC и AC_1B_1 подобны (иначе говоря, один из этих треугольников можно перевести в другой, выполнив симметрию относительно биссектрисы угла A и затем гомотетию с центром в точке A (например, рис. 3).

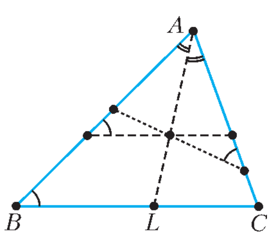

Рис. 3

2. Пусть B_1, C_1, B, C – различные точки. Докажите, что отрезки BC и B_1C_1 антипараллельны тогда и только тогда, когда B_1, C_1, B, C лежат на одной окружности.

3. Пусть BB' и CC' – высоты треугольника ABC. Докажите, что отрезки $B'C'$ и BC антипараллельны.

4. Пусть B' и C' – точки на прямых AB и AC такие, что отрезки $B'C'$ и BC параллельны. Докажите, что отрезки $B'C'$ и B_1C_1 антипараллельны тогда и только тогда, когда отрезки BC и B_1C_1 антипараллельны.

Как известно, медиана треугольника ABC делит пополам не только сторону, к которой она проведена, но и любой отрезок, параллельный этой стороне, с концами на двух других сторонах (докажите это!). Оказывается, аналогичное утверждение с заменой параллельности на антипараллельность будет верно для симедианы.

Факт 1. *В треугольнике* ABC *проведен отрезок* B_1C_1, *антипараллельный стороне* BC, *с концами на прямых* AB *и* AC *соответственно. Прямая* AS *содержит симедиану треугольника* ABC *тогда и только тогда, когда она делит* B_1C_1 *пополам.*

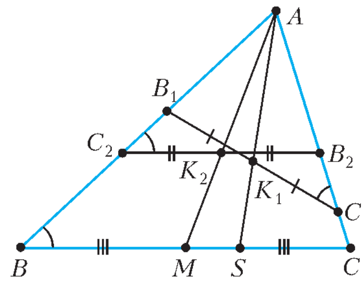

Рис. 4

Доказательство. Рассмотрим симметрию относительно биссектрисы угла A. Тогда отрезок B_1C_1 перейдет в отрезок B_2C_2, который параллелен BC, а его середина K_1 – в середину K_2 отрезка B_2C_2 (например, рис. 4). Тогда K_2 лежит на прямой AM, значит, K_1 лежит на прямой AS.

Комментарий. И наоборот, медиана AM треугольника ABC – симедиана треугольника AB_1C_1.

Другое определение: отношение расстояний и площадей

Известно, что медиана делит сторону и, соответственно, площадь треугольника пополам (или, что то же самое, расстояния от точки M до сторон треугольника обратно пропорциональны этим сторонам).

А в каком отношении делит сторону и площадь треугольника симедиана?

Используем стандартные обозначения для сторон треугольника $AB = c$, $AC = b$. Расстояние от точки X до прямой l будем обозначать $d(X,l)$.

Факт 2. *Пусть точка* S *лежит на стороне* BC *треугольника* ABC. *Тогда эквивалентны следующие условия: (1)* AS *– симедиана, (2)* $\dfrac{d(S;AB)}{d(S;AC)} = \dfrac{c}{b}$ *(т.е. расстояния от точки* S *до сторон треугольника прямо пропорциональны этим сторонам), (3)* $\dfrac{S_{ABS}}{S_{ACS}} = \dfrac{c^2}{b^2}$, *(4)* $\dfrac{d(B;AS)}{d(C;AS)} = \dfrac{c^2}{b^2}$, *(5)* $\dfrac{BS}{CS} = \dfrac{c^2}{b^2}$.

Доказательство. Пусть AS – симедиана. Проведем к прямым AB и AC перпендикуляры d_c и d_b из середины M отрезка BC и перпендикуляры $d_{c'}$ и $d_{b'}$ из точки S (рис. 5). Так как площади треугольников ABM и ACM равны, то $c \cdot d_c = b \cdot d_b$, значит, $\dfrac{d_b}{d_c} = \dfrac{c}{b}$.

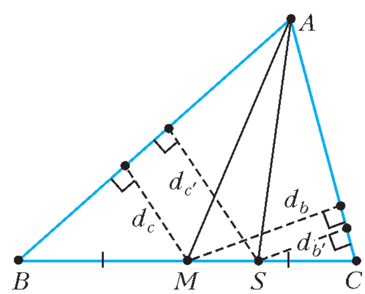

Рис. 5

Среди прямоугольных треугольников с вершиной A есть две пары подобных: с катетами d_c и $d_{b'}$ а также с катетами $d_{c'}$ и d_b. Отсюда следует, что $\dfrac{d_{b'}}{d_c} = \dfrac{AS}{AM} = \dfrac{d_{c'}}{d_b}$, откуда $\dfrac{d_{c'}}{d_{b'}} = \dfrac{d_b}{d_c} = \dfrac{c}{b}$, и мы получили условие (2). Далее, треугольники ABS и ACS имеют общую высоту из вершины A, поэтому $\dfrac{BS}{CS} = \dfrac{S_{ABS}}{S_{ACS}} = \dfrac{c \cdot d_{c'}}{b \cdot d_{b'}} = \dfrac{c^2}{b^2}$, и мы вывели условия (3) и (5).

Предлагаем читателю разобраться с условием (4) самостоятельно.

Упражнения

5. Выведите условие (4) из (3).

Читатель может убедиться, что каждое из условий (2)–(5) влечет (1). Для этого достаточно выполнить следующее упражнение.

6. Докажите, что любое из условий (2)–(5) однозначно определяет точку S на отрезке BC.

Комментарий. Иногда условие 5 используют в качестве определения симедианы.

Симедиана как геометрическое место точек

Пусть через вершину A треугольника ABC проведена прямая, пересекающая сторону BC в некоторой точке R. Заметим, что при движении точки S по прямой AR отношение площадей треугольников ABS и ACS сохраняется и равно отношению перпендикуляров, проведенных к прямой AR из точек B и C (рис.6). В частности $\frac{S_{ABS}}{S_{ACS}} = \frac{S_{ABR}}{S_{ACR}}$. Отсюда несложно получить следующую характеризацию точек, лежащих на симедиане.

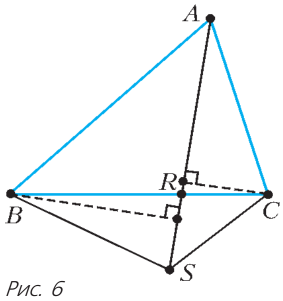

Рис. 6

Факт 3. *Пусть точка S лежит внутри угла BAC. Тогда эквивалентны следующие условия: (1) прямая AS содержит симедиану, (2)* $\frac{d(S;AB)}{d(S;AC)} = \frac{c}{b}$, *(3)* $\frac{S_{ABS}}{S_{ACS}} = \frac{c^2}{b^2}$, *(4)* $\frac{d(B;AS)}{d(C;AS)} = \frac{c^2}{b^2}$.

Упражнение 7. Проведите полностью рассуждения, позволяющие вывести факт 3 из факта 2.

Теперь можно поискать на симедиане интересные точки.

Симедиана и подобие

В геометрических задачах очень часто возникает следующая конструкция.

Дан остроугольный треугольник ABC и точка X внутри него так, что $\angle BAX = \angle ACX$, $\angle CAX = \angle ABX$ (рис.7).

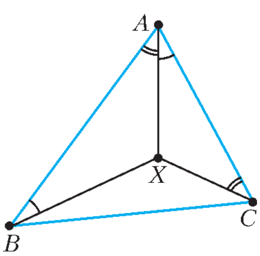

Рис. 7

Факт 4. *В конструкции на рисунке 7 точка X лежит на симедиане.*

Доказательство. Заметим, что треугольники ABX и CAX подобны. Следовательно, отношение высот этих треугольников, проведенных из точки X, равно отношению сторон AB и AC. Теперь остается воспользоваться условием (2) факта 3.

Упражнения

8. Выведите факт 4 из подобия треугольников ABX и CAX и условия (3) факта 3.

9. Выведите факт 4 из подобия треугольников ABX и CAX и свойства биссектрисы (прямая AX содержит биссектрису угла BXC).

10. Докажите, что точка X лежит на окружности, описанной около треугольника BOC (O – центр описанной окружности треугольника ABC).

Гармонический четырехугольник

Гармоническим называют вписанный четырехугольник, у которого произведения противоположных сторон равны.

Добавим в нашу старую конструкцию окружность, описанную около треугольника ABC, и точку D, лежащую на дуге BC, не содержащей точку A (рис.8).

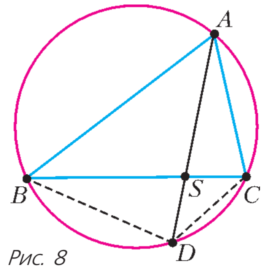

Рис. 8

Факт 5. *Прямая AD содержит симедиану треугольника ABC тогда и только тогда, когда четырехугольник ABDC гармонический.*

Доказательство. Пусть прямая AD содержит симедиану. Из условия (3) факта 3 $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{AB^2}{AC^2}$. С другой стороны, поскольку четырехугольник $ABDC$ вписанный, получим $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{AB \cdot DB \cdot \sin\angle ABD}{AC \cdot DC \cdot \sin\angle ACD} = \frac{AB \cdot DB}{AC \cdot DC}$. Следовательно, $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$, т.е. четырехугольник $ABDC$ гармонический.

Упражнения

11. Докажите обратное утверждение (если $ABDC$ – гармонический, то прямая AD содержит симедиану).

12. Для вписанного четырехугольника $ABDC$ докажите эквивалентность следующих условий:

а) $ABDC$ – гармонический;

б) биссектрисы углов BAC и BDC пересекаются на отрезке BC;

б') биссектрисы углов ABD и ACD пересекаются на отрезке AD;

в) точка D лежит на окружности Аполлония[1] для точек B и C, проходящей через точку A.

г) диагональ AD содержит симедиану треугольника ABC (или DBC);

г') диагональ BC содержит симедиану треугольника ABD (или ACD);

д) треугольник BDC подобен треугольнику BKA (или AKC), где K – середина AD.

13. Пусть симедиана AS треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке D. Докажите, что точка X из факта 4 – середина отрезка AD.

Указание: можно воспользоваться условием д) предыдущего упражнения.

Основная задача: симедиана и касательные

Продлим симедиану еще дальше. Оказывается, на ней лежит еще одна знакомая точка.

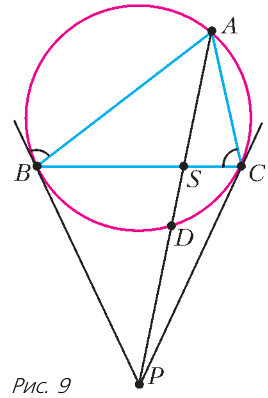

Рис. 9

Факт 6. *Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть касательные к окружности, проведенные в точках B и C, пересекаются в точке P. Тогда прямая AP содержит симедиану треугольника ABC (рис.9).*

Доказательство. Запишем отношение площадей и используем угол между касательной и хордой, равенство касательных и теорему синусов для треугольника ABC:

$$\frac{S_{ABP}}{S_{ACP}} = \frac{AB \cdot PB \cdot \sin\angle ABP}{AC \cdot PC \cdot \sin\angle ACP} = \frac{AB \cdot PB \cdot \sin\angle C}{AC \cdot PC \cdot \sin\angle B} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

Мы приходим к условию (3) факта 3.

[1] На плоскости даны две точки B и C. Геометрическое место точек M, для которых $BM : CM = k \neq 1$, называется окружностью Аполлония для точек B и C.

Комментарий. На самом деле, основную задачу о симедиане мы встречали в следующей геометрической конструкции. Рассмотрев ее, можно получить другой способ доказательства. Пусть BB' и CC' – высоты треугольника ABC, M – середина BC. Поскольку $B'C'$ и BC антипараллельны (см. упражнение 3), то AM – симедиана $AB'C'$ (факт 1). С другой стороны, прямые MB' и MC' являются касательными к описанной окружности треугольника $AB'C'$ (докажите!). Следовательно, факт 6 доказан для треугольника $AB'C'$, а значит, и подобного ему треугольника ABC.

Упражнения

14. Как изменится факт 6 для треугольника с прямым углом A?

15. Дан вписанный четырехугольник $ABDC$. Докажите, что касательные к описанной окружности, проведенные в точках B и C, пересекаются на прямой AD либо параллельны тогда и только тогда, когда касательные к описанной окружности, проведенные в точках A и D, пересекаются на прямой BC либо параллельны

Указание: каждое из этих условий эквивалентно тому, что четырехугольник гармонический.

Найди симедиану!

Рассмотрим несколько задач, в которых могут быть применены перечисленные выше факты. Некоторые из задач весьма сложны, без предварительной подготовки они вызовут затруднения и у искушенных в геометрии. Но можно найти короткие, изящные решения, если умело «играть» с разными свойствами симедианы.

Первая несложная задача показывает, что на самом деле с симедианой, возможно этого не замечая, сталкивался почти любой школьник.

Задача 1. Докажите, что высота прямоугольного треугольника делит гипотенузу в отношении квадратов катетов.

Решение. Пусть M – середина гипотенузы AB, CH – высота (рис.10). Тогда $\angle ACH = \angle ABC = \angle BCM$, т.е. CH – симедиана. Используя второе определение симедианы (условие 5 факта 2), получим требуемое.

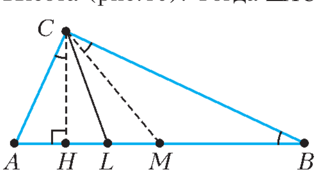

Рис. 10

Комментарий. Стандартное доказательство этого факта – через средние пропорциональные в прямоугольном треугольнике.

Следующая задача предлагалась на Московской математической олимпиаде в 2008 году в качестве сложной.

Задача 2. *Высоты AA_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точка B_0 – середина стороны AC. Докажите, что точка пересечения прямых, симметричных BB_0 и HB_0 относительно биссектрис углов ABC и AHC соответственно, лежит на прямой A_1C_1.*

Решение. Заметим, что A_1C_1 – отрезок, антипараллельный AC (рис.11). Из факта 1 следует, что прямая, симметричная BB_0 относительно биссектрисы угла ABC, проходит через середину A_1C_1 (точку M).

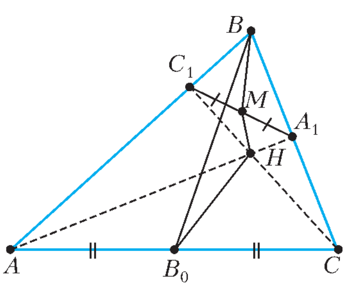

Рис. 11

Аналогично, прямая, симметричная HB_0 относительно биссектрисы угла AHC, проходит через точку M.

Решить следующие три задачи без знания основной задачи (факт 6) весьма непросто.

Задача 3 (Всероссийская олимпиада по математике, 1995 год). *В остроугольном треугольнике ABC на высоте BK как на диаметре построена окружность S, пересекающая стороны AB и BC в точках E и F соответственно. К окружности S в точках E и F проведены касательные. Докажите, что их точка пересечения P лежит на прямой, содержащей медиану треугольника ABC, проведенную из вершины B.*

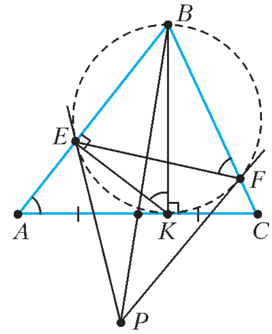

Рис. 12

Решение. Из основной задачи следует, что BP – симедиана в треугольнике BEF (рис.12). Тогда достаточно доказать, что EF антипараллельна AC (см. факт 1). Действительно, $\angle BAK = \angle EKB = \angle EFB$, что и требовалось.

Задача 4. *Две окружности пересекаются в точках M и K. Из точки A одной окружности проводятся лучи AM и AK, пересекающие вторую окружность в точках B и C соответственно. Докажите, что прямые, содержащие медианы всех таких треугольников ABC, проведенные из вершины A, пересекаются в одной точке или параллельны.*

Решение. Заметим, что точки B, M, K и C являются вершинами вписанного четырехугольника (рис.13). Из этого следует, что MK антипараллельна BC, поэтому медиана в треугольнике ABC содержит симедиану треугольника AMK (см. факт 1). Из основной задачи, симедиана треугольника AMK проходит через фиксированную точку P (точку пересечения касательных к первой окружности, проведенных в точках M и K) или перпендикулярна MK, если MK – диаметр первой окружности.

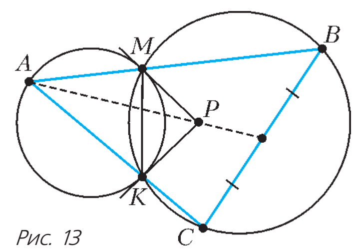

Рис. 13

Отметим, что конструкция, рассмотренная в предыдущей задаче, является частным случай данной конструкции (см. рис. 12 и 13).

А вот еще одна похожая задача.

Задача 5 (Всероссийская олимпиада по геометрии, 2012). *Дан треугольник ABC. Касательная в точке C к его описанной окружности пересекает прямую AB в точке D. Касательные к описанной окружности треугольника ACD в точках A и C пересекаются в точке K. Докажите, что прямая DK делит отрезок BC пополам.*

Решение. Так как $\angle DCB = \angle BAC$, то BC – антипараллель к AC (рис.14). Далее используем факт 1 и основную задачу.

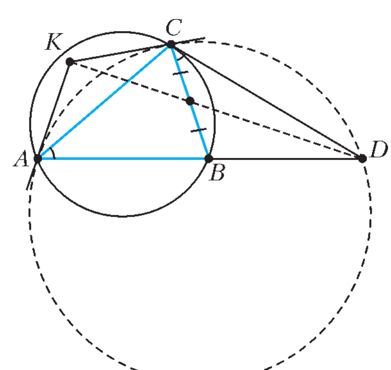

Рис. 14

Теперь рассмотрим известную задачу, которая просто решается при помощи симедианы.

Задача 6 (теорема о симметричной бабочке). *На диаметре KW окружности взята точка M, отличная от центра окружности. Лучи MA и MD таковы, что $\angle KMA = \angle WMD < 90°$*

(A и D – точки пересечения этих лучей с окружностью – лежат в одной полуплоскости относительно прямой KW). Докажите, что все прямые AD, построенные описанным образом, пересекают прямую KW в одной и той же точке P.

Решение. Проведем через M хорду BC, перпендикулярную KW. Пусть AM пересекает окружность в точке E (рис.15). Тогда $\angle EMW = \angle AMK = \angle DMW$. Следовательно, точки E и D симметричны относительно диаметра KW, т.е. дуги BD и CE, а значит, и углы BAD и CAE – равны. Так как AM является медианой треугольника ABC, то AD – симедиана. Используя основную задачу, получим, что AD проходит через точку пересечения касательных, проведенных в точках B и C.

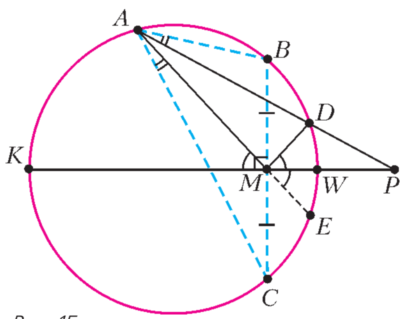

Рис. 15

Решая эту задачу, мы попутно доказали еще один несложный, но важный факт.

Факт 7. *Пусть AM – медиана треугольника ABC, а точка D принадлежит его описанной окружности (см. рис.15). Прямая AD содержит симедиану треугольника ABC тогда и только тогда, когда $\angle AMB = \angle DMB$.*

Комментарии.

1. Отметим, что этот факт нами уже был практически доказан в упражнении 13, так как точка M совпадает с точкой X из факта 4 (с точностью до обозначений).

2. Используя упражнение 10 или теорему об угле между хордами, можно получить, что $\angle AMB = \angle ACD$.

3. Используя упражнение 10 и инверсию относительно данной окружности, можно получить другое доказательство теоремы о симметричной бабочке.

Задача 7 (Всероссийская олимпиада по геометрии, 2013). *В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H. Из точки H провели перпендикуляры к прямым B_1C_1 и A_1C_1, которые пересекли лучи CA и CB в точках P и Q соответственно. Докажите, что перпендикуляр, опущенный из точки C на прямую A_1B_1, проходит через середину отрезка PQ.*

Решение. Так как отрезок A_1B_1 антипараллелен AB относительно угла ACB, то перпендикуляр из точки C на прямую A_1B_1 и высота CC_1 – симметричны относительно биссектрисы угла C (рис.16). Поэтому достаточно доказать, что CH – симедиана в треугольнике PCQ.

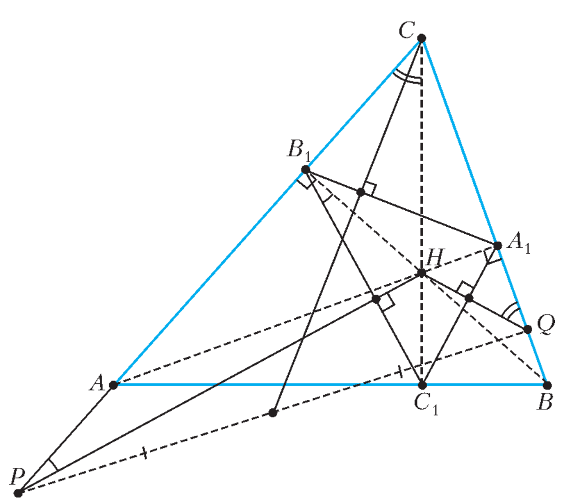

Рис. 16

Используя равенство вписанных углов в окружности, проходящей через точки B, C, B_1, C_1, и прямоугольные треугольники, получим, что $\angle QCH = \angle BCH = \angle BB_1C_1 = \angle CPH$. Аналогично, $\angle PCH = \angle CQH$, т.е. CH – симедиана (см. факт 4 и рис. 7)

Задача 8 (Всероссийская олимпиада по математике, 2009). *В треугольнике ABC проведена биссектриса BD (точка D лежит на отрезке AC). Прямая BD пересекает окружность Ω, описанную около треугольника ABC, в точках B и E. Окружность ω, построенная на отрезке DE как на диаметре, пересекает окружность Ω в точках E и F. Докажите, что прямая, симметричная прямой BF относительно прямой BD, содержит медиану треугольника ABC.*

Решение. Докажем, что BF – симедиана (рис.17).

Пусть K – точка пересечения FD с окружностью Ω. Так как угол EFD прямой, то KE – диаметр окружности, а точка K – середина дуги ABC. В четырехугольнике $ABCF$ биссектрисы углов B и F пересекаются на стороне AC (в точке D), т.е. он гармонический (см. условие б) упражнения 12) и его диагональ BF является симедианой (см. факт 5).

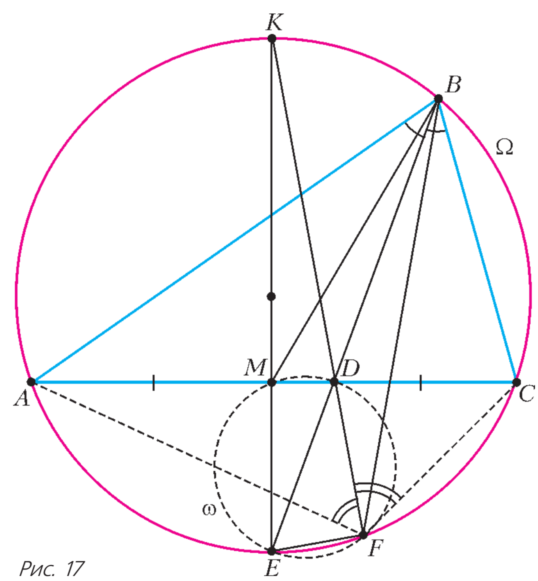

Рис. 17

Тем, кто заинтересовался применением свойств симедианы в задачах, предлагаем еще несколько задач.

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что в неравнобедренном треугольнике одна из симедиан совпадает с высотой тогда и только тогда, когда этот треугольник – прямоугольный.

2. Пусть CL – биссектриса угла BCA треугольника ABC, CD – симедиана треугольника ABC. Точка D – пересечение симедианы с описанной окружностью. Докажите, что DL – биссектриса угла BDA.

3. Окружность S_1 проходит через точки A и B и касается прямой AC, окружность S_2 проходит через точки A и C и касается прямой AB. Докажите, что общая хорда этих окружностей является симедианой треугольника ABC.

4. Касательная в точке B к описанной окружности S треугольника ABC пересекает прямую AC в точке K. Из точки K проведена вторая касательная KD к окружности S. Докажите, что BD – симедиана треугольника ABC.

5. Биссектрисы внешнего и внутреннего углов при вершине A треугольника ABC пересекают прямую BC в точках D и E. Окружность с диаметром DE пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках A и X. Докажите, что AX – симедиана треугольника ABC.

6. Пусть M – середина основания BC равнобедренного треугольника ABC. Точка K внутри треугольника такова, что $\angle ACK = \angle KBC$. Докажите, что $\angle BKM + \angle AKC = 180^\circ$.

7 (Всероссийская олимпиада по геометрии, 2008). Пусть CC_0 – медиана треугольника ABC, серединные перпендикуляры к AC и BC пересекают CC_0 в точках A' и B', прямые AA' и BB' пересекаются в точке C_1. Докажите, что CC_1 – симедиана треугольника ABC.

8. Точки A и A' инверсны относительно окружности ω, причем A' – внутри ω. Через A' проводятся хорды XY. Докажите, что центры вписанной и одной из вневписанных окружностей треугольника AXY фиксированы.

9 (Всероссийская олимпиада по геометрии, 2008). Прямые, симметричные диагонали BD четырехугольника $ABCD$ относительно биссектрис углов B и D, проходят через середину диагонали AC. Докажите, что прямые, симметричные диагонали AC относительно биссектрис углов A и C, проходят через середину диагонали BD.

10. Докажите, что если из точки D пересечения симедианы CS с описанной окружностью треугольника ABC опустить перпендикуляры DD_1, DD_2 и DD_3 на прямые AC, AB и BC соответственно, то D_2 – середина отрезка D_1D_3.

11 (Московская устная олимпиада по геометрии, 2004). Треугольник ABC вписан в окружность. Через точки A и B проведены касательные к этой окружности, которые пересекаются в точке P. Точки X и Y – ортогональные проекции точки P на прямые AC и BC. Докажите, что прямая XY перпендикулярна медиане треугольника ABC, проведенной из вершины C.

12 (Всероссийская олимпиада по геометрии, 2006). Прямые, содержащие медианы треугольника ABC, вторично пересекают его описанную окружность в точках A_1, B_1, C_1. Прямые, проходящие через A, B, C и параллельные противоположным сторонам, пересекают ее же в точках A_2, B_2, C_2. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.

13 (Московская математическая олимпиада, 2007). Точки A', B' и C' – середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC соответственно, а BH – его высота. Докажите, что если описанные около треугольников AHC' и CHA' окружности проходят через точку M, отличную от H, то $\angle ABM = \angle CBB'$.

14 (Московская устная олимпиада по геометрии, 2009). К двум окружностям ω_1 и ω_2, пересекающимся в точках A и B, проведена их общая касательная CD (C и D – точки касания соответственно, точка B ближе к прямой CD, чем A). Прямая, проходящая через A, вторично пересекает ω_1 и ω_2 в точках K и L соответственно (A лежит между K и L). Прямые KC и LD пересекаются в точке P. Докажите, что PB – симедиана треугольника KPL.

15 (Турнир математических боев имени А.П.Савина, 2014). Через вершину A треугольника ABC проведена прямая a, параллельная BC. Симедиана треугольника, проведенная из вершины B вторично пересекает описанную окружность треугольника в точке D. Прямая CD пересекает прямую a в точке X. Докажите, что углы ABC и AMX, где M – середина AC, равны.

16 (Всероссийская олимпиада по геометрии, 2014). Даны окружность, ее хорда AB и точка W – середина меньшей дуги AB. На большей дуге AB выбирается произвольная точка C. Касательная к окружности из точки C пересекает касательные из точек A и B в точках X и Y соответственно. Прямые WX и WY пересекают прямую AB в точках N и M соответственно. Докажите, что длина отрезка NM не зависит от выбора точки C.

17 (Всероссийская олимпиада по геометрии, 2015). В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC высоты AA' и BB' пересекаются в точке H, а медианы треугольника AHB пересекаются в точке M. Прямая CM делит отрезок $A'B'$ пополам. Найдите угол C.

Автор благодарен П.А.Кожевникову за ценные замечания, способствовавшие существенному улучшению текста статьи, своему ученику (а теперь уже выпускнику) А.Зерцалову, обсуждения с которым данной темы подтолкнули автора к написанию статьи, и Е.С.Горской за выполнение эскизов рисунков.

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Источник в цепи постоянного тока

А.ЧЕРНОУЦАН

Изучение постоянного тока начинается с однородного участка цепи, в котором движение зарядов (носителей тока) поддерживается электростатическим полем. В простейшем случае однородный участок содержит идеальный резистор, ток через который пропорционален приложенной к нему разности потенциалов:

$$U = RI \qquad (1)$$

(хорошо знакомый вам закон Ома для участка цепи). Иными словами, вольт-амперная характеристика – ВАХ – такого элемента представляет собой прямую линию (рис. 1). В действительности зависимость тока от разности потенциалов почти для любого резистора не является линейной, так как при увеличении силы тока резистор нагревается, а сопротивление резистора обычно заметно зависит от температуры. К примеру, сопротивление металлического проводника при нагревании на 100 К возрастает примерно на одну треть, а сопротивление некоторых полупроводников при нагревании, наоборот, уменьшается. Для упрощения задачи обычно оговаривается (или подразумевается), что сопротивление проводника остается постоянным; понятно, что такое приближение является, мягко говоря, не совсем корректным. Не случайно в вопросах и задачах ЕГЭ появляются элементы цепи с нелинейными ВАХ.

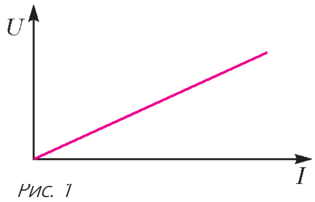

Рис. 1

Энергия, поглощения однородным участком цепи, равна работе электростатических сил над зарядом, прошедшим через любое сечение:

$$W = qU.$$

Соответственно, для мощности поглощения энергии однородным участком цепи можно использовать любое из трех выражений:

$$P = IU = I^2R = \frac{U^2}{R}. \qquad (2)$$

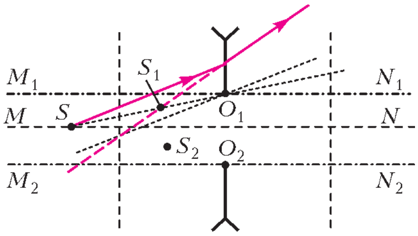

Рис. 14

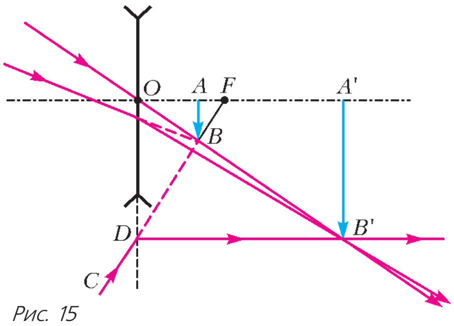

Рис. 15

но быть таким, чтобы расстояние OA было втрое меньше, чем OA'. Фокус линзы можно найти с помощью продолжения луча CD, идущего после преломления в линзе параллельно главной оптической оси.

Микроопыт

Для объяснения постройте изображение карандаша, учитывая преломление лучей света на границе «вода–воздух».

СИМЕДИАНА

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

6. *Указание.* Докажите, что A – точка пересечения касательных к окружности, описанной около треугольника BKC и используйте основную задачу (факт 6).

7. *Указание.* Проведите симедиану и докажите, что точка C_1 совпадает с точкой X из факта 4.

8. *Указание.* Искомые точки – точки пересечения прямой AA' с окружностью. Используйте теорему о симметричной бабочке.

9. *Указание.* Используя второе определение симедианы, докажите, что точка D лежит на окружности Аполлония точек A и C, содержащей точку B. Далее используйте результат упражнения 12 и факт 5.

10. *Указание. Первый способ.* Точки D_1, D_2 и D_3 лежат на одной прямой по теореме о прямой Симсона. Используя следствие из теоремы синусов, получите равенства $\frac{D_3D_2}{\sin\angle CBA} = BD$ и $\frac{D_1D_2}{\sin\angle CAB} = AD$. Далее используйте, что четырехугольник $ACBD$ – гармонический (факт 5) и теорему синусов для треугольника ABC.

Второй способ. Используя факт 7 и, например, упражнение 10, докажите, что треугольники BDD_3, ADD_1 и MDD_2, где M – середина AB, подобны (эквивалентное утверждение содержится в комментарии 2 к факту 7). Далее используйте поворотную гомотетию с центром в точке D, переводящую A в D_1.

11. *Указание.* Используйте, что четырехугольник $PXCY$ – вписанный, определение симедианы и основную задачу (факт 6).

12. *Указание.* Используя теорему о симметричной бабочке или факты 7 и 6, докажите, что данные прямые проходят через точки X, Y и Z пересечения касательных к окружности, проведенных в точках A, B и C и симметричны симедианам треугольника ABC относительно биссектрис треугольника XYZ. Осталось воспользоваться тем, что симедианы треугольника пересекаются в одной точке (точка Лемуана).

13. *Указание.* Докажите, что $A'C'$ является общей касательной к данным окружностям, а прямая MH делит отрезок $A'C'$ пополам. Далее используйте, что точка M лежит на окружности, описанной около треугольника $BA'C'$, и факт 7.

14. *Указание.* Докажите, что прямая AB содержит медиану треугольника ACD. Далее рассмотрите точку B' – образ точки B при преобразовании подобия, переводящем треугольник ACD в треугольник PKL, и докажите, что B и B' изогонально сопряжены относительно треугольника PKL.

Комментарий. Эта задача является обобщением предыдущей.

15. *Указание.* Используя определение симедианы и факт 7, докажите, что четырехугольник $AMDX$ – вписанный.

16. *Указание.* $MN = \frac{1}{2}AB$. Используя основную задачу и факт 1, покажите, что прямая WX содержит симедиану треугольника AWC и, соответственно, медиану треугольника TWA. Аналогично – с прямой WY.

17. $45°$.

Указание. Используя факт 1, докажите, что CM – симедиана треугольника ABC. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Используйте основную задачу и подобие треугольников.

Второй способ. Рассмотрите точку H', симметричную H относительно середины AB, докажите, что CM – симедиана в треугольнике $H'CH$, и используйте второе определение симедианы.

ИСТОЧНИК В ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

1. $I_{\text{кз}} = 29{,}6$ А. **2.** $k = 3$. **3.** $n = 5$.
4. $P_{\max} = 8$ Вт. **5.** $U = 220$ В.

XXXVI ТУРНИР ГОРОДОВ

ЗАДАЧИ ВЕСЕННЕГО ТУРА

Базовый вариант

8–9 классы

1. Можно.

Покрасим верхнюю грань в первый цвет, нижнюю – во второй, а остальные четыре – в третий.

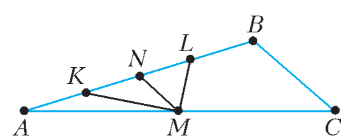

Рис. 16

2. Пусть N – середина AB (и одновременно – середина KL) рис. 16. Длина средней линии MN равна $\frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}KL$. Следовательно, точка M лежит на окружности с диаметром KL.

3. Могли.

$$2^9 + \ldots + 2^{18} = 2^9\left(2^{10} - 1\right) =$$
$$= 1 + 2 + 3 + \ldots + \left(2^{10} - 1\right).$$

Замечание. Это – единственный пример.

4. На 15 квадратов.

Очевидно, крайние левые клетки двух разных строк не могут принадлежать одному квадрату. Значит, квадратов не меньше 15. Пример с 15 квадратами приведен на рисунке 17.

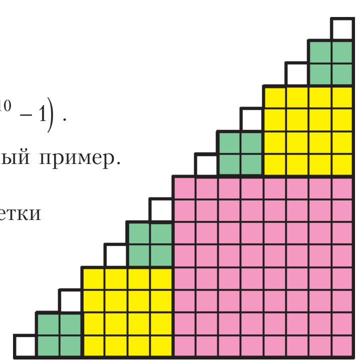
Рис. 17