О КАСАТЕЛЬНЫХ, ПРОВЕДЕННЫХ В ДВУХ ВЕРШИНАХ ТРЕУГОЛЬНИКА

В данной статье речь пойдёт о задачах, условие которых начинается следующими словами: *"Касательные, проведенные в вершинах B и C треугольника ABC к описанной около него окружности, пересекаются в некоторой точке..."*
Далее, после дополнительных данных и обозначений некоторых точек, ставится требование доказать равенство определённых углов или отрезков.
Задачи такого содержания нередко участвуют в математических олимпиадах, соревнованиях, турнирах. Поэтому представляется целесообразной попытка создать коллекцию таких задач. С тем, чтобы подметить закономерности в полученных конструкциях, увидеть внутренние связи между отдельными задачами, открыть для себя некоторые новые свойства.
Верим, что предлагаемая подборка будет полезной во время уроков в математических классах, на занятиях математических кружков и спецкурсов! Что она в целом пригодится всем, кто увлекается геометрией!..

Задача 1. Касательные в вершинах B и C треугольника ABC к описанной около него окружности ω пересекаются в точке T *(такую конструкцию вместе с проведенным отрезком AT в дальнейшем будем называть T-конструкцией)*. AM_1 – медиана в треугольнике ABC. AO – радиус окружности ω. Докажите, что $\angle OAM_1 = \angle M_1TA$.

Доказательство. Пусть $\angle 1 = \angle OAM_1$ и $\angle 2 = \angle M_1TA$. Очевидно, точки $T; M_1; O$ лежат на одной прямой (TM_1 – медиана, высота и биссектриса в равнобедренном ΔBTC (рис.1). Соединив C и O, получим $\angle OCT = 90°$. Тогда CM_1 – высота, проведенная к гипотенузе в прямоугольном ΔOCT и $CO^2 = OT \cdot OM_1$. Но $CO = AO = R$. Следовательно, $AO^2 = OT \cdot OM_1$. Это означает, что OA – касательная к описанной около ΔAM_1T окружности. Тогда $\angle 1 = \angle 2$ - как соответственно угол между касательной и хордой и вписанный угол.

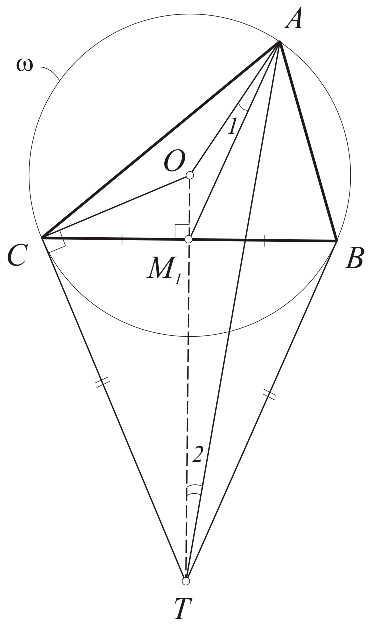

рис.1

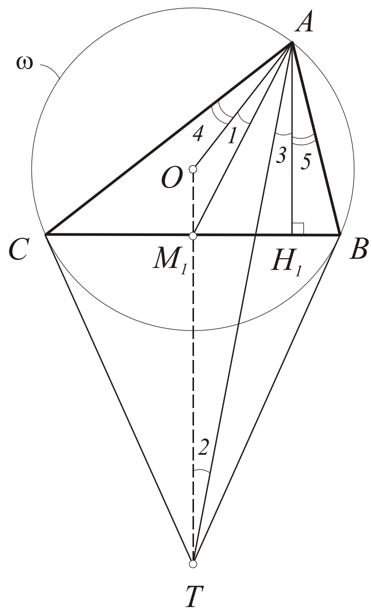

рис.2

Задача 2. Докажите, что в T-конструкции отрезки AT и AM_1 являются изогоналями (составляют равные углы соответственно с AB и AC), то есть $\angle CAM_1 = \angle BAT$.

Доказательство. $\angle 1 = \angle 2$ - по задаче 1. Проведем высоту AH_1 в ΔABC (рис.2). Тогда $\angle 2 = \angle 3$ (внутренние накрест лежащие углы при $AH_1 \parallel TM_1$). Нетрудно показать, что $\angle 4 = \angle 5 = 90° - B$ (покажите!) Следовательно, $\angle 1 + \angle 4 = \angle 3 + \angle 5$, или $\angle CAM_1 = \angle BAT$, что и требовалось доказать.

Заметим, что AT совпадает с симедианой ΔABC, однако, симедиана, несомненно, заслуживает отдельного разговора вне формата данной статьи.

Задача 3. В *T*-конструкции проведены перпендикуляры *TE* и *TD* на прямые *AB* и *AC* соответственно. Докажите, что M_1 – ортоцентр в треугольнике *ADE*.

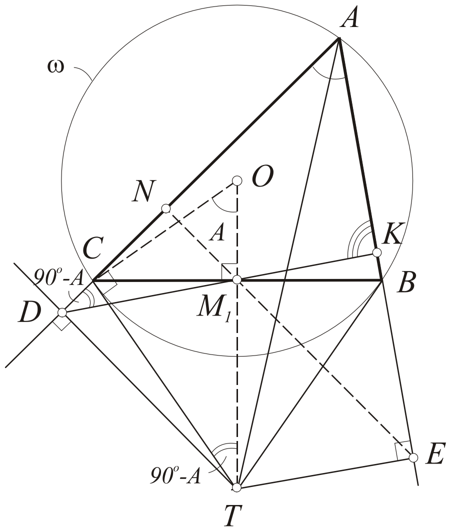

рис.3

Доказательство. В ΔCOT углы известны: $\angle OCT = 90°$ (касательная перпендикулярна радиусу); $\angle COT = A$ ($\angle BOC = 2A$ – центральный). И тогда $\angle CTO = 90° - A$ (рис.3). Около четырехугольника DCM_1T можно описать окружность (два противоположных угла равны по $90°$). Значит, $\angle CDM_1 = \angle CTM_1 = 90° - A$. Пусть луч DM_1 пересекает *AB* в точке *K*. Тогда в ΔADK один из углов равен *A*, другой $90° - A$. Следовательно, $\angle DKA = 90°$ и *DK* – высота в ΔADE. Аналогично (если EM_1 при продолжении пересекает *AC* в точке *N*) *EN* – высота в ΔADE. То есть, точка M_1 – ортоцентр в ΔADE, что и требовалось доказать!

Задача 4. В *T*-конструкции к окружности *ω* проведена касательная в вершине *A*. Она пересекает прямую *CB* в точке *F*. $Q = AT \cap \omega$. Докажите, что *QF* – также касательная к *ω*.

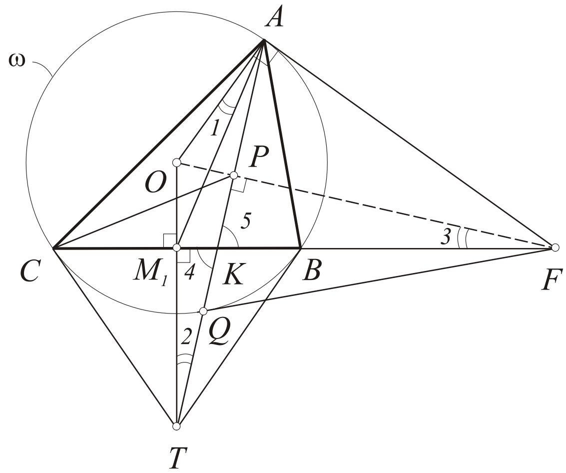

рис.4

Доказательство. Согласно задаче 1 $\angle 1 = \angle 2$ (рис.4). Поскольку точки *A; O; M_1; F* принадлежат одной окружности (два противоположных угла равны по $90°$), то $\angle 3 = \angle 1$ (вписанные, опираются на одну и ту же дугу в этой окружности). Пусть $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \alpha$. Тогда очевидно, $\angle 4 = \angle 5 = 90° - \alpha$ и для ΔKPF ($K = BC \cap AT$; $P = OF \cap AT$) $\angle FPK = 90°$. То есть, *FP* делит хорду *AQ* окружности *ω* пополам ($OP \perp AQ$). Значит, так как *FA* – касательная к *ω*, то и *FQ* – касательная к *ω*. Что и требовалось доказать.

Задача 5. В *T*-конструкции проведена биссектриса AL_1 треугольника *ABC*.

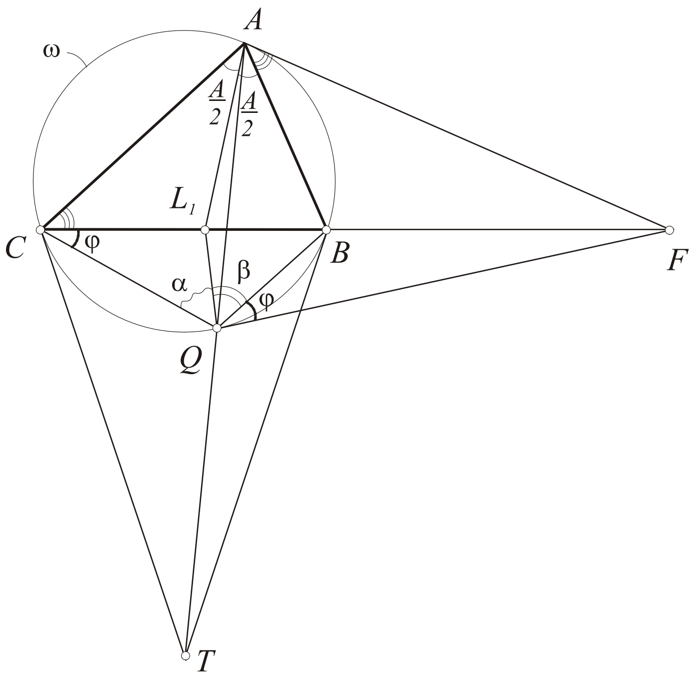

рис.5

Докажите, что QL_1 – биссектриса в ΔBQC, где $Q = AT \cap \omega$ (рис.5).

Доказательство. Пусть $\angle CQL_1 = \alpha$ и $\angle BQL_1 = \beta$. Покажем, что $\alpha = \beta$. Пусть также касательная к ω в вершине A пересекает прямую CB в точке F. Тогда $FA = FQ$ – касательные к ω (задача 4). Поскольку $\angle ACB = \angle BAF$ (вписанный угол и угол между касательной и хордой для окружности ω), то $\angle FAL_1 = C + \dfrac{A}{2}$. Но и $\angle AL_1F = C + \dfrac{A}{2}$ (внешний для ΔAL_1C). Следовательно, $FA = FL_1 = FQ$. Пусть $\angle BCQ = \angle BQF = \varphi$ (вписанный угол и угол между касательной и хордой для ω). Тогда $\angle FL_1Q = \alpha + \varphi$ (внешний для ΔCQL_1). А $\angle FQL_1 = \beta + \varphi$. Но $\angle FL_1Q = \angle FQL_1$, так как $FL_1 = FQ$. Значит, $\alpha + \varphi = \beta + \varphi$ и $\alpha = \beta$.

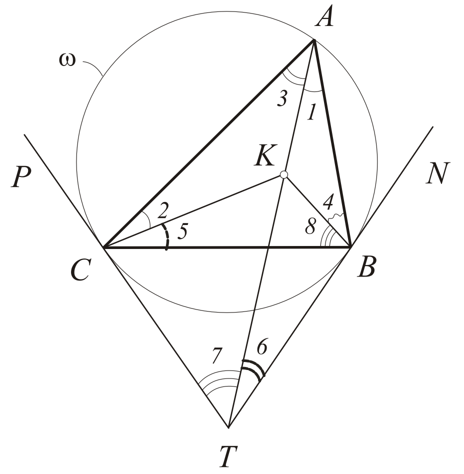

рис.6

Задача 6. В *T*-конструкции $\angle 1 = \angle 2$ (рис.6). Докажите, что $\angle 3 = \angle 4$.

Доказательство. $\angle ABN = C = \angle 2 + \angle 5$ (вписанный угол и угол между касательной и хордой для окружности ω). С другой стороны, $\angle ABN = \angle 1 + \angle 6$ - внешний для ΔABT. Поскольку $\angle 1 = \angle 2$, то $\angle 5 = \angle 6$. Тогда точки *T; B; K; C* принадлежат одной окружности и $\angle 7 = \angle 8$. $\angle ACP = \angle 3 + \angle 7$ - внешний для ΔACT и $\angle ACP = \angle 4 + \angle 8$ (угол между касательной и хордой и вписанный угол для ω). Так как $\angle 7 = \angle 8$, то $\angle 3 = \angle 4$.

Задача 7. В *T*-конструкции треугольника *ABC* оказалось, что $AB \parallel CT$. Докажите, что в таком случае луч *BQ* делит отрезок *CT* пополам.

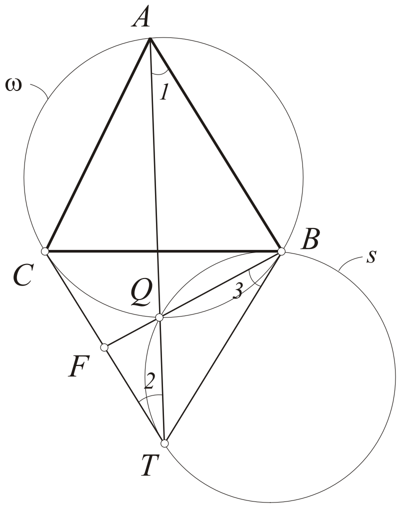

рис.7

Доказательство. Очевидно, $\angle 1 = \angle 2$ (внутренние накрест лежащие при $AB \parallel CT$). В свою очередь, $\angle 1 = \angle 3$ (вписанный угол и угол между касательной и хордой в окружности ω). Опишем окружность *s* около ΔBQT (рис.7). Поскольку $\angle 3 = \angle 2$, то *CT* – касательная к окружности *s*. Следовательно, *CT* – общая касательная к окружностям ω и *s*. Тогда общая хорда *BQ* этих окружностей при продолжении делит *CT* пополам. Действительно, пусть $F = BQ \cap CT$.

Значит, $FC^2 = FB \cdot FQ$ – по теореме о квадрате касательной для окружности ω. Аналогично для окружности *s*: $FT^2 = FB \cdot FQ$. Откуда следует, что *FC* = *FT*.

Задача 8. В *T-конструкции* проведен *QN* – перпендикуляр к *BC* (рис.8), который при продолжении пересекает медиану AM_1 в точке *K*. Докажите, что *QN* = *NK*, или *x* = *y*.

Доказательство. Продолжим медиану AM_1 до пересечения с ω в точке *D* и проведем $DE \perp BC$. Поскольку $\angle 1 = \angle 2$ (задача 2), то $\cup BQ = \cup CD$, а значит, равны и хорды: *BQ* = *CD*.

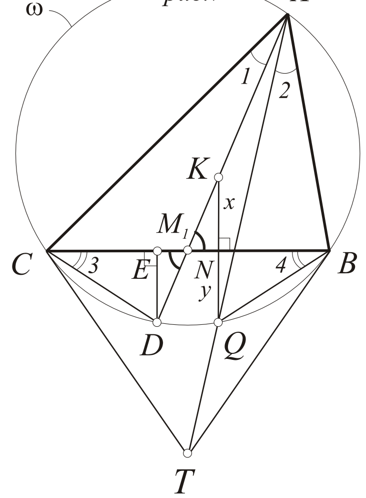

рис.8

Очевидно, $\angle 3 = \angle 4$ - опираются на равные дуги в окружности *ω*. Тогда $\Delta QNB = \Delta DEC$ - по гипотенузе и острому углу. Значит, *BN* = *CE*. Но $BM_1 = CM_1$ и получаем: $NM_1 = M_1E$. Теперь $\Delta KNM_1 = \Delta DEM_1$ – по катету и острому углу. Откуда *KN* = *ED* = *x*. Но *ED* = *QN* = *y* – из равенства ΔBNQ и ΔCED. Следовательно, *x* = *y*.

Задача 9. В *T*-конструкции через точку *T* проведена прямая параллельно *AB*. Она пересекает окружность *ω* в точках *D* и *E*, а сторону *AC* – в точке *K*. Докажите, что *DK* = *KE*. *(лемма Архимеда)*

Доказательство. Пусть *O* – центр окружности *ω*. Тогда $\angle BOC = 2A$ - центральный и $\angle BOT = \angle COT = A$ (рис.9). Поскольку и $\angle CKT = A$ ($KT \parallel AB$), то точки *C; K; O; T* принадлежат одной окружности ($\angle CKT = \angle COT = A$). Так как $\angle OCT = 90°$ (касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания), то и $\angle OKT = 90°$. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам. Значит, *OK* делит хорду *DE* окружности *ω* пополам, то есть *DK* = *KE*.

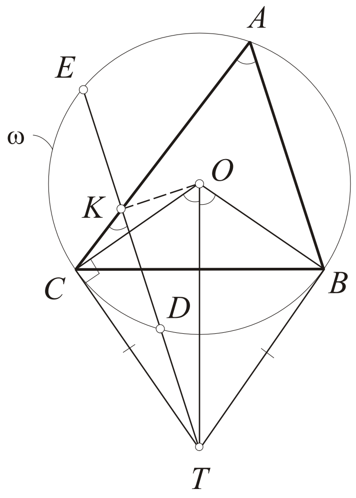

рис.9

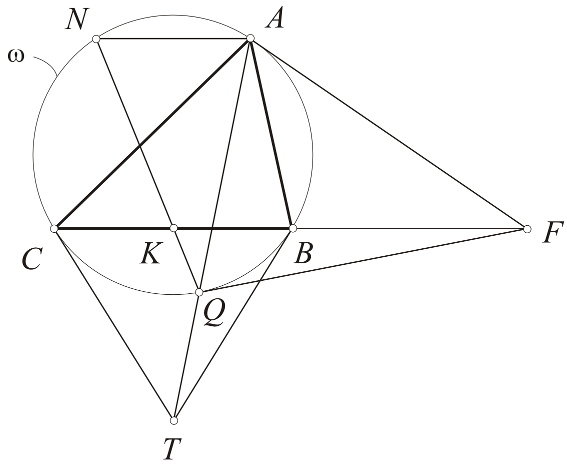

рис.10

Задача 10. В *T*-конструкции *AN* – хорда, проведенная параллельно *BC* в окружности *ω*. $K = NQ \cap BC$. Докажите, что *K* – середина *BC*.

Доказательство. Пусть касательные к ω в точках *A* и *Q* пересекаются в точке *F* (рис.10). Тогда точки *F; B; C* лежат на одной прямой (задача 4). Значит, для касательных *FA* и *FQ*, секущей $F - B - K - C$ и $AN \parallel BC$ выполняется лемма Архимеда и *BK* = *KC* (задача 9).

Задача 11. В *T*-конструкции для прямоугольного треугольника *ABC* ($B = 90°$) точка *D* – середина дуги *AB; M_1* – середина катета *BC*. $N = DM_1 \cap \omega$. Докажите, что $\angle DNT$ - прямой.

Доказательство. Проведем *DE* – диаметр *ω* (рис.11). Соединим *E* и *T*. Пусть $L = ET \cap \omega$ и

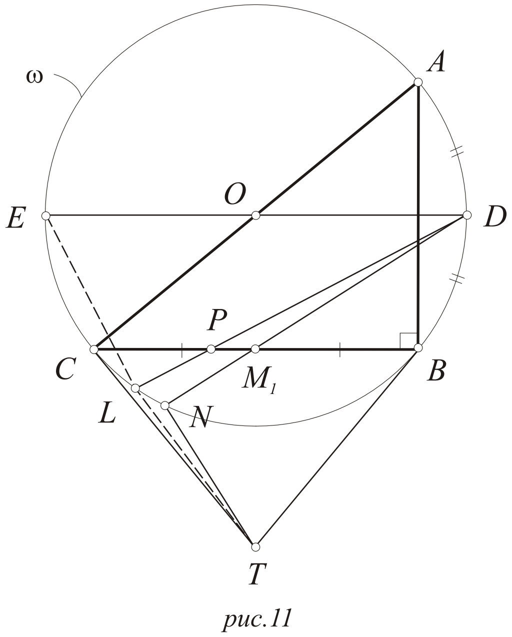

рис.11

$P = DL \cap BC$.Очевидно, $DE \parallel BC$ и для ΔDBC отрезок *DL* делит *BC* пополам (согласно задаче 10), то есть $P \equiv M_1$. Тогда $L \equiv N$. Но $\angle ELD = 90°$ - вписанный, опирается на диаметр в окружности ω. Поскольку $N \equiv L$, то и $\angle DNE = 90°$. Значит, и смежный с ним $\angle DNT = 90°$.

Несколько задач, связанных с *T*-конструкцией, предложим решить самостоятельно.

Задача 12. В *T*-конструкции точка *W* – середина дуги *BC,* не содержащей вершину *A*. Докажите, что $\angle M_1AW = \angle TAW$.

Задача 13. *BF* и *CN* - высоты в треугольнике *ABC*. Прямая *FN* пересекает лучи *TC* и *TB* в точках *X* и *Y* соответственно. Докажите, что четырёхугольники CM_1NX и BM_1FY - вписанные.

Задача 14. Докажите, что в условиях предыдущей задачи точка M_1 (середина *BC*) является центром круга, вписанного в треугольник *TXY*.

Задача 15. Из точки *Q* в *T*-конструкции проведены перпендикуляры *QN*, *QG* и *QL* к прямым *BC*, *AC* и *AB* соответственно. Докажите, что *GN* = *NL*.

Задача 16. Пусть *H* - ортоцентр в треугольнике *ABC*. Окружность, построенная на *AH* как на диаметре, пересекает описанную около треугольника *ABC* окружность в точке *P*. Пусть также *G* - точка, симметричная *H* относительно *BC*. Докажите, что точка *G* принадлежит прямой *TP*.

А.Карлюченко, Г.Филипповский.