Сгибнев А.И.

Геометрия помогает алгебре

Лучше один раз увидеть, чем сто раз услышать.
Пословица.

Анри Пуанкаре сказал, что математика — это искусство называть разные вещи одинаковыми именами. Осмелимся добавить: а одинаковые вещи — разными именами. То есть один и тот же объект можно описывать на разных языках, видеть разными глазами. При этом непонятное ранее утверждение может стать очевидным, а к сложной задаче может отыскаться лёгкое решение.

На школьном уровне эта идея обычно реализуется как перевод на язык алгебры арифметических задач (текстовые задачи решают с помощью уравнений) и геометрических задач (координатный и векторный методы). Такой перевод позволяет алгоритмизировать решение задач. Заметим, что алгоритмизация не всегда полезна: не нужно ничего изобретать, решение идёт по накатанной схеме. "Решать с помощью уравнений задачу, допускающую простое арифметическое решение, безнравственно." [1, с. 46]

Менее известны другие случаи, когда арифметические и алгебраические задачи удобно решать на геометрическом языке.

Таким примерам и посвящена эта статья.

Доказать значит сделать оче*видным*

Ключевые факты полезно формулировать на разных языках, чтобы каждый ученик усваивал их на свойственном ему языке. Для многих вовремя показанная картинка может раз и навсегда навести ясность и спасти от типичных ошибок.

1. *Переместительный закон сложения* для положительных чисел можно пояснять так: поезд проехал a км от Москвы до Твери и b км от Твери до Петербурга. На обратном пути он проехал те же расстояния в обратном порядке, и общий путь был тот же самый. Значит, $a + b = b + a$.

Переместительный закон сложения для целых чисел хорошо пояснять с помощью движения лифта. Например, $(+3) + (-5)$ означает, что лифт поехал сначала на 3 этажа вверх, а потом на 5 вниз. А $(-5) + (+3)$ означает, что лифт сначала поехал на 5 этажей вниз, а потом на 3 вверх. Ясно, что в итоге он переместился на одно и то же число этажей в одну и ту же сторону.

2. Обосновывая *переместительный закон умножения*

$$a \cdot b = b \cdot a,$$

мы рисуем картинку 1 и говорим, что можно считать квадратики по рядам, а можно по

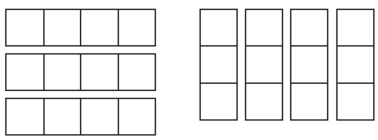

Рис. 1. *Почему* $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$.

столбцам — результат будет один и тот же. Обосновывая *распределительный закон умножения*

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c,$$

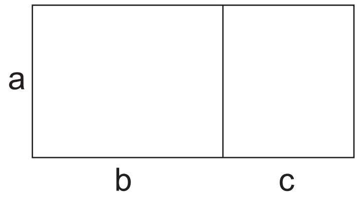

Рис. 2.

мы рисуем картинку 2 и считаем площадь большого прямоугольника двумя способами. Обосновать сочетательный закон умножения для натуральных чисел можно, складывая ряды кубиков.

Трудно разобраться, иллюстрация это или доказательство.

3. Тот же Пуанкаре говорил, что научиться *складывать дроби* можно двумя способами: разрезая яблоки и … разрезая пироги. В статье и на доске проще резать прямоугольники ("шоколадки"), но суть будет та же. Как сравнить две дроби — см. рис. 3. Как привести к общему знаменателю — рис. 4. А рис. 5 надо показать всем, кто думает, что $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$.

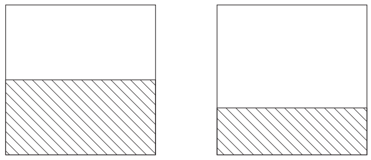

Рис. 3. *Что больше: $\frac{1}{2}$ или $\frac{1}{3}$?*

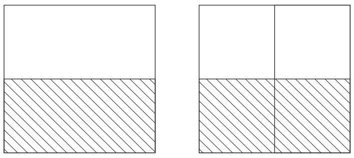

Рис. 4. *Почему $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$?*

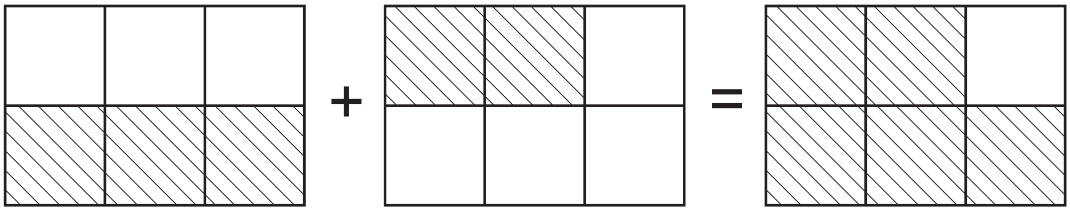

Рис. 5. *Как же складывать? Давайте поделим на одинаковые кусочки по $\frac{1}{6}$!*

4. Спросите пятиклассника, чему равен квадрат суммы — и он наверняка ответит "сумме квадратов". Переубедить его проще всего с помощью картинки 6: считаем площадь большого квадрата двумя способами. Говорят, когда Руссо учился в школе, его убедило только такое доказательство. Можно придумать картинки для доказательства разложения квадрата суммы трёх слагаемых, для разности квадратов и даже для куба суммы [2]. Правда, последнее является скорее тренировкой пространственного воображения, но это тоже полезно.

5. Формула для производной произведения двух функций, как и формула суммы квадратов, не принадлежит к числу интуитивно ясных: хочется по аналогии с производной

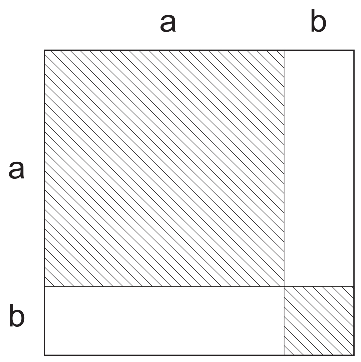

Рис. 6. *Забыв $2ab$, мы выкидываем два прямоугольника!*

суммы сказать “равна произведению производных”. В эту ловушку попался сначала даже... Лейбниц, один из создателей дифференциального исчисления. Наглядной эту формулу может сделать уже знакомая нам картинка 7 и следующая выкладка:

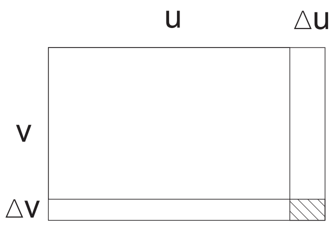

Рис. 7. *Прирост площади происходит в основном за счёт двух длинных прямоугольников. Маленьким прямоугольничком можно пренебречь.*

$$\Delta(uv) = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v \approx u\Delta v + v\Delta u.$$

Остаётся поделить обе части на Δx и устремить Δx к 0. Попробуйте этим способом найти производную от uvw.

Лёгкое решение

1. С помошью рисунка 8 сравните

$$\sin\alpha \vee \alpha,$$

$$\operatorname{tg}\alpha \vee \alpha$$

в случае $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$. Сформулируйте аналогичные неравенства для интервала $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}; 0)$.

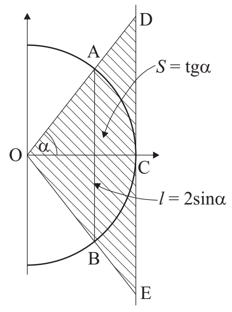

Рис. 8. $2\sin\alpha = AB < ACB = 2\alpha$; $\qquad \operatorname{tg}\alpha = S_{ODE} > S_{OACB} = \alpha$

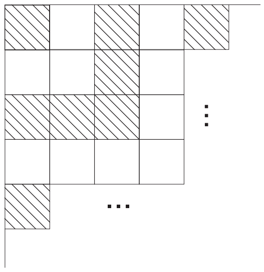

Рис. 9.

2. *Арифметическая прогрессия.*

а) Рисунок 9 наводит на ряд числовых равенств. Каких?

Подсказка:

$1+3=?$,

$1+3+5=?$,

$1+3+5+7=?$

...

[$1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2$. Пифагорейцы доказывали это соотношение именно с помощью такой картинки!] Этим же рисунком удобно пояснять, почему при равноускоренном движении тела отрезки, пройденные им за равные последовательные интервалы времени, относятся как последовательные нечётные числа (открытие Галилея).

б) Чуть менее изящное графическое доказательство для более употребительной формулы суммы натурального ряда $S_n = 1+2+3+\ldots+n$. Изобразим слагаемые столбиками из $1, 2, \ldots, n$ чёрных кружков. Поместим над ними добавочные столбики из $n, \ldots, 2, 1$ белых кружков. Общее количество кружков равно $2S_n$. С другой стороны, оно равно $n(n+1)$. Отсюда

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

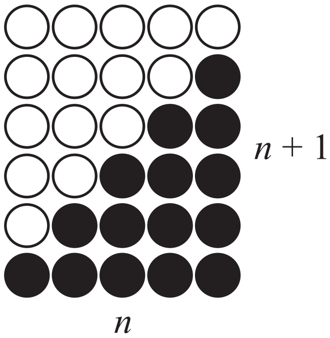

Рис. 10.

в) Сумму $\Sigma_n = 1+4+9+\ldots+n^2$ можно вычислить, рассматривая пирамиду из кубиков (см. рис. 11 слева). Сразу ясно, что объём пирамиды составляет какую-то долю (порядка $\frac{1}{3}$) от объёма куба, т.е. от n^3. Можно получить и точную формулу, аккуратно сложив три такие пирамиды (рис. 11): получится параллелепипед размерами $n \cdot n \cdot (n+1)$

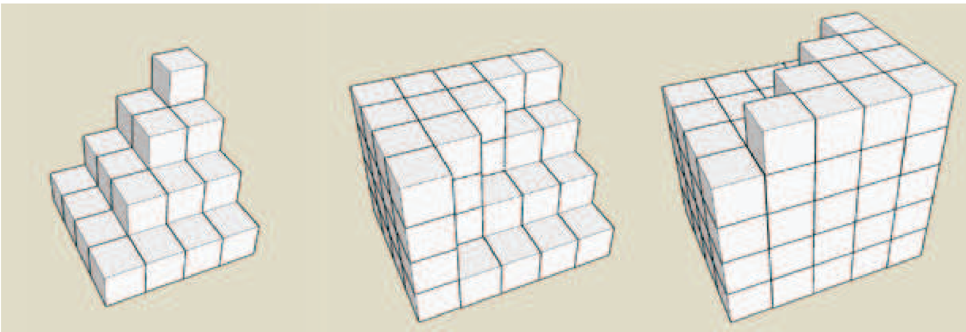

Рис. 11.

с треугольной "нашлёпкой", объём которой, как мы уже знаем, равен $n(n+1)/2$. Итого получаем

$$\Sigma_n = \frac{1}{3}\left(n^2(n+1) + \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}.$$

Эта формула получена Архимедом в трактате “О спиралях”. (Интересно, что такой картинки у него нет, но выкладки полностью ей соответствуют. [3, с. 18].)

3. *Геометрическая прогрессия.* Рассмотрим сумму

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}.$$

С помощью площадей прямоугольников (рис. 12) угадайте, к чему стремится S_n при $n \to \infty$, а затем найдите формулу для S_n. Попробуйте проделать то же для суммы

$$S_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots + \frac{1}{3^n}.$$

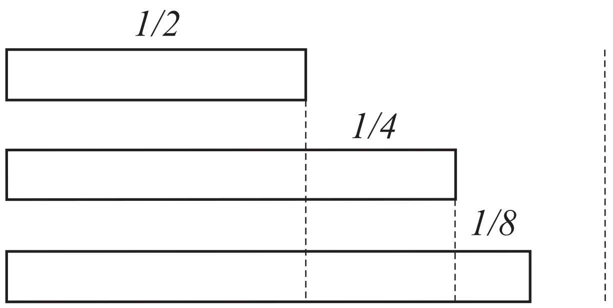

Рис. 12.

4. Докажите неравенство [4, с. 94]

$$\sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y^2}.$$

Когда достигается равенство? Обобщите неравенство разными способами. [Можно складывать больше двух векторов; можно рассматривать векторы в трёхмерном пространстве.]

5. Найдите минимум функции

$$f(x) = \sqrt{1 + x^2 - x} + \sqrt{1 + x^2 - x\sqrt{3}}.$$

[Подумайте о теореме косинусов.]

6. Решите уравнение

$$\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{3 - 2x - x^2} = 3.$$

[Построим графики обоих корней в одной плоскости (рис. 13). Видно, что сумма корней

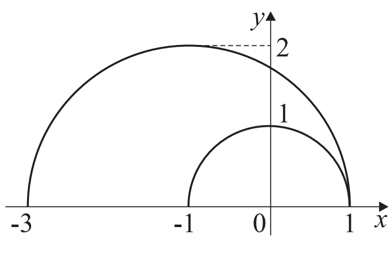

Рис. 13.

всегда меньше 3, значит, решений нет. Попробуйте поменять числа в примере так, чтобы появилось одно решение.]

Перевод

Когда я думала о них по по-польски, то они (некая канадская пара)
мне казались довольно скучными и старомодными,
когда же пыталась сформулировать свое отношение по-английски,
то выходило, что они приветливые и очень милые.
По повести Эвы Хоффман
"Искусство потерь, или Опыт жизни в новом языке".

Для некоторых утверждений уже сам перевод с алгебраического языка на геометрический (или наоборот) доставляет удовольствие, а иногда и даёт неожиданные результаты.

1. Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим легко показать на прямоугольном треугольнике, в котором высота делит гипотенузу на отрезки a и b. Тогда высота равна $\sqrt{ab}$, а медиана $(a+b)/2$. В каком случае достигается равенство? Можно придумать и картинку для неравенства между всеми четырьмя средними. Рассмотрите трапецию и найдите в ней четыре отрезка, параллельных основаниям и равным соответственно четырём средним от оснований. В каком случае достигается равенство между средними?

2. а) При каких натуральных n возможно построить квадрат с вершинами в узлах клетчатой бумаги и площадью n клеток?

б) Какие натуральные числа n представимы в виде суммы квадратов двух натуральных чисел?[1]

3. а) Для некоторых значений c и d система уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 + c, \\ x = y^2 + d, \end{cases}$$

имеет единственное решение (x_0, y_0). Докажите, что $x_0 y_0 = 1/4$.

б) Докажите, что множеством точек касания двух равных парабол со взаимно перпендикулярными осями является гипербола, асимптоты которой лежат на тех же осях.
Глядя на геометрическую формулировку б), хочется задать вопрос: а что изменится, если оси парабол будут пересекаться под острым углом?

4. а) В треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон. Тогда $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC} = \vec{OA}_1 + \vec{OB}_1 + \vec{OC}_1$.

б) Центр масс любого треугольника совпадает с центром масс его серединного треугольника.

в) Рассмотрим три последовательности: $a_{n+1} = \frac{b_n+c_n}{2}$, $b_{n+1} = \frac{a_n+c_n}{2}$, $c_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$, где $a_1 = a$, $b_1 = b$, $c_1 = c$. Все три последовательности сходятся к одному и тому же пределу, равному $\frac{a+b+c}{3}$.

Билингва

Некоторые темы полезно изучать на двух языках параллельно. Ниже даны два примера. "Мостиком" между алгеброй и геометрией в обоих примерах служит метод координат [5].

Модуль

Заполните пустые строки таблицы.

[1] В формулировке а) это хорошая исследовательская задача для 5-6-классника, который по ходу решения самостоятельно откроет формулу для квадрата суммы и теорему Пифагора.

алгебраически	геометрически
$\|x\|$	расстояние точки с координатой x до начала координат
$\|x-1\|$	
$\|x+3\|$	
решить уравнение $\|x\|=2$	найти множество точек, удалённых от начала координат на 2
$\|x\|>2$	найти множество точек, удалённых от начала координат больше чем на 2

Поупражнявшись с переводом, используем его для решения задач.

1. Решите уравнения: а) $|x-2|=x-2$; б) $|x-2|=2-x$.

2. Найдите минимум выражений: а) $|x|$; б) $|x+7|$; в) $|x+3|+|x-2|$; г*) $|x-2|+|x|+|x+1|$.

3. Решите уравнения с параметром a: а) $|x|=a$; б) $|x-1|=a$.

4. Решите уравнение: $|a-x|=|b-x|$.

5. Решите уравнение: а) $|x|+|x-1|=3$ [Найти множество точек, для которых сумма расстояний до точек 0 и 1 равна 3.]; б) $|x|+|x-1|+|x-2|=2$.

6. Решите неравенства: а) $|x|<1$ [Найти множество точек, для которых расстояние до 0 меньше 1]; б) $|x|\geq 2$; в) $|x-1|\leq 3$; г) $|x+2|>4$; д) $3<|x|<5$; е) $|x+1|+|x+2|\geq 2$; ж) $|x+1|+|x+2|<1$; з*) $|x+3|-|x-1|<2$; и*) $|x+3|-|x-1|>1$.

7. При каких значениях параметра b уравнение а) $|x+3|+|x-1|=b$, б) $|x+3|-|x-1|=b$ не имеет решений, имеет одно решение, два решения, бесчисленное множество решений? Возможны ли другие случаи?

8*. Найдите минимум выражения: а) $|x-14|+|x-10|+|x-3|+|x+1|+|x+5|$, б) $|x-14|+|x-10|+|x-3|+|x|+|x+1|+|x+5|$.

9*. Пусть $f(x)=|x-14|+|x-10|+|x-3|+|x+1|+|x+5|$. Решите уравнение: а) $f(x)=30$, б) $f(x)=31$, в) $f(x)=50$.

Графическое решение систем уравнений

Зри в корень!
Козьма Прутков.

Если для линейных систем графическое решение — это лишь один из методов, причём скорее иллюстративный, то в системах второго порядка это иногда самый простой способ решения.

Основные “кирпичики” таких систем — прямые $ax+by+c=0$, окружности $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$. Реже отрезки: $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}=5$, квадраты: $|x|+|y|=1$ и т.д.

1. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x+y=a, \end{cases}$$

не имеет решений, имеет единственное решение, имеет бесчисленное множество решений? Какие ещё случаи возможны? [Система имеет единственное решение, когда прямая касается окружности.]

2. При каких значениях параметра a система имеет ровно одно решение?

$$\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ (x-a)^2+(y-a)^2=1. \end{cases}$$

Сформулируйте и решите аналогичную задачу для трёх переменных x,y,z.

3. (См. [6].) Найдите количество решений в зависимости от m:

$$\begin{cases} \sqrt{(x+15)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-8)^2}=17, \\ x^2+y^2=m^2. \end{cases}$$

4. Симметрия в алгебре и в геометрии. Рассмотрим фигуру на плоскости xOy, задаваемую уравнением

$$F(x,y)=0.$$

Заполните пустые ячейки следующей таблицы:

свойства $F(x,y)$	свойства фигуры
$F(x,y)=F(-x,y)$	симметрия относительно Oy
	симметрия относительно Ox
$F(x,y)=F(-x,-y)$	
$F(x,y)=F(y,x)$	
	симметрия относительно прямой $y=-x$

Язык древних греков

“В соответствии с образным типом мышления греков ведущей математической дисциплиной у них стала геометрия. Исключая наиболее простые, “непосредственно очевидные”, арифметические задачи, все вопросы математики старались осмыслить геометрически: вместо произведения говорили “площадь”, вместо произведения числа на самое себя — “квадрат” (выражение, сохранившееся до нашего времени).” Интересна “античная процедура решения квадратного уравнения

$$x^2+ax=m^2.$$

Задача формулировалась так: к данному отрезку AB (равному a) приложить такой прямоугольник, чтобы, имея избытком квадрат (одной высоты с ним), он был равновелик данному квадрату (со стороной m).

Решается эта задача так ...Отрезок $AB(=a)$ делят пополам в точке C. В точке C восстанавливают перпендикуляр CD, равный AC, и достраивают квадрат $AEDC$. Кроме того, строят прямоугольный треугольник, один катет которого $MN=m$, другой $NP=a/2$. От точки D в сторону точки C откладывают отрезок DF, равный гипотенузе MP, из F проводят прямую FG, параллельную AB, до пересечения с продолжением диагонали AD в точке G; ABB_1A_1 есть искомый прямоугольник.” [3, с. 14]. Здесь AA_1 и BB_1 — высоты, опущенные на прямую GF.

Сделайте чертёж и проверьте решение.

Заметим ещё, что сложность этого решения происходит не только от геометрического языка: до XVI века решение квадратных уравнений было целым искусством, которому посвящали толстые трактаты.

Интересно сравнить алгебраическое и геометрическое доказательства иррациональности $\sqrt{2}$. Неясно, какое доказательство было исторически первым, но бесспорно, что открытие самого факта существования иррациональных чисел привело к потрясению основ древнегреческой математики. (По легенде, Гиппаса за его доказательство пифагорейцы изгнали из своей школы — не хотели верить в существование несоизмеримых величин.)

Начнём с более известного алгебраического доказательства. Предположим, что $\sqrt{2}$ есть число рациональное, равное несократимой дроби $\frac{p}{q}$. Тогда $\frac{p^2}{q^2}=2$, то есть $p^2=2q^2$, то есть $p=2l$ — чётное. Но тогда $q^2=2l^2$, то есть q тоже чётное. Противоречие.

Теперь вспомним геометрическое доказательство. Мы сохраним идею, но слегка модифицируем изложение.

Геометрически иррациональность $\sqrt{2}$ означает несоизмеримость диагонали квадрата с его стороной или гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом: не существует отрезка, который бы целое число раз укладывался и там, и там. Проверить это можно так: отложим меньший отрезок в большем, остаток отложим в меньшем, второй остаток в первом и т.д. Если на каком-то шаге отрезок уложится без остатка, значит, это и есть общая мера двух исходных отрезков (алгоритм Евклида). Давайте отложим отрезок, равный катету BC, на гипотенузе AB. Для этого перегнём наш треугольник по биссектрисе угла B (рис. 14). Образовался "остаток" AD. Дальше нужно бы этот "остаток" отложить на катете, но легко видеть, что он уже "уложен" (отрезок CE). Новые остатки входят в треугольник ADE — опять равнобедренный и прямоугольный! Продолжая процесс, проделаем с новым треугольником точно такую же операцию, как и с большим, в результате чего появится ещё меньший треугольник, и т.д. Получаем бесконечный процесс с бесконечным же уменьшением отрезка. Значит, катет и гипотенуза несоизмеримы.

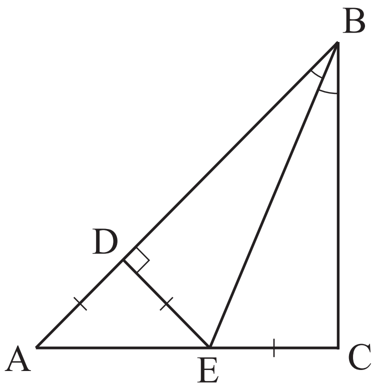

Рис. 14.

Интересно сравнить "результативность" двух доказательств. Алгебраическое легко обобщается на корни из всех натуральных чисел, которые не являются квадратами, но при этом даёт чистое отрицание и ничего больше. Геометрическое уникально — работает лишь для $\sqrt{2}$, зато даёт алгоритм вычисления приближений к нему (попробуйте получить выражение для гипотенузы в виде цепной дроби).

Даёшь геометризацию!

Я на правую руку надела
Перчатку с левой руки.
Анна Ахматова.

"Выявленная и доказанная психологами и физиологами функциональная ассиметрия головного мозга заставляет нас также несколько иначе взглянуть на значение геометрии в развитии человека. Оказывается, левое полушарие нашего мозга ведает логическим, алгоритмическим мышлением... Правое полушарие "отвечает" за чувственную, образную сферы нашего сознания... Некоторые из известных методик обучения математике чрезмерно перегружают левое полушарие мозга." [4, с. 241]. Таким образом, внедрение геометрических интерпретаций и доказательств в алгебре и арифметике способствует гармонизации работы полушарий мозга. В любом случае, решения типа "смотри" развивают не меньше, чем преобразования многочленов.

В заключение приведём несколько красивых задач. Все они довольно легко решаются, если перевести их на геометрический язык; а вот решение на том языке, на котором они поставлены, может оказаться затруднительным.

1. Докажите неравенство

$$2500\pi - 100 < \sqrt{1 \cdot 199} + \sqrt{2 \cdot 198} + \ldots + \sqrt{99 \cdot 101} < 2500\pi.$$

(Шарыгин. [4], с. 92.)

2. Найдите наименьшее значение выражения $|a+b| + \sqrt{(a-1)^2 + (b-3)^2}$. (Гордин. [7] N 2.298.)

3. Найдите $x+y+z$ из системы:

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=a^2, \\ y^2+yz+z^2=b^2, \\ z^2+zx+x^2=a^2+b^2. \end{cases}$$

(Шарыгин. [8], N 195, п. 4. Ср. пп. 1, 2, 3.)

4. При каком наименьшем значении a уравнение $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}=2a$ имеет решение? (Шноль. [9], N 9.)

Когда эта статья дописывалась, автор обнаружил в книге [10] целый раздел 8.1, который называется так же, как данная статья, и содержит подборку сложных и интересных задач по этой теме (см. также задачи 1.62-1.64).

Выражаю благодарность Д.Э. Шнолю, помощь которого была почти соавторством.

Работа выполнена при поддержке РГНФ (грант 06-06-00427а).

Список литературы

[1] Шарыгин И.Ф. Математический винегрет. М., 2002.

[2] Гельфанд И.М., Шень А.Х. Алгебра. М., 2000.

[3] Лурье С.Я. Архимед. М.-Л., 1945.

[4] Шарыгин И.Ф. 2200 задач по геометрии для школьников и поступающих в вузы. М., 1999.

[5] Гельфанд И.М., Глаголева Е.Г., Кириллов А.А. Метод координат. М., 1971, 2007.

[6] Слуцкий Л.Б. Алгебра и геометрия "в одной тарелке"/ Научно-методический сборник "Архимед". Вып. 3. М., 2007. С. 93-97.

[7] Гордин Р.К. Геометрия. Планиметрия. 7-9 классы. М., 2004.

[8] Шарыгин И.Ф. Задачи по геометрии. Планиметрия. М., 1986.

[9] IV творческий конкурс учителей: http://www.mccme.ru/oluch/

[10] Алфутова Н.Б., Устинов А.В. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. М., 2005.